MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

75. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

75. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen*

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 75. Bandes

Seite

BAER, R., Partitionen endlicher Gruppen 333

BAUMSLAG, G., Wreath products and finitely presented groups 22

CARTER, R. W., Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups 136

CHARZYNSKI, Z., Bounds for analytic functions of two complex variables 29

CIGLER, J., Ziffernverteilung in ϑ-adischen Brüchen 8

DEMBOWSKI, P., Kombinatorische Eigenschaften endlicher Inzidenzstrukturen . . . 256

EWALD, G., Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nicht-desarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern 395

EWALD, G., Translationsgruppen in verallgemeinerten dreidimensionalenprojektiven Räumen 419

FELSCHER, W., Jordan-Hölder-Sätze und modular geordnete Mengen 86

FRIEDBERG, R., The uniqueness of finite division for recursive equivalence types . 3

GUHA, U. C., Rearrangements of the coefficients of a Power series 325

HARTMAN, PH., and C. WILCOX, On solutions of the Helmholtz equation in exterior domains 228

HOFMANN, K. H., Ein komplexer Neokörper ohne reellen Unterneokörper 295

HUPPERT, B., Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe 140

IIZUKA, K., On Brauer's Theorem on Sections in the Theory of Blocks of Group Characters 299

ITÔ, N., Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. II 127

KEGEL, O. H., Die Nilpotenz der H_p-Gruppen 373

KOVÁCS, L. G., Groups with regular automorphisms of order four 277

MACROBERT, T. M., Fourier Series for E-functions 79

MENZEL, W., Ein Kriterium für die Distributivität des Untergruppenverbandes einer abelschen Operatorgruppe 271

MEULENBELD, B., The generalized Legendre functions with special relations between the parameters 192

NÖBAUER, W., Über die Ableitungen der Vollideale 14

RIBENBOIM, P., Sur la théorie du prolongement des valuations de Krull 499

ROELCKE, W., Über diskontinuierliche Gruppen in lokal-kompakten Räumen 36

SCHÄFKE, F. W., Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II 154

SCHOCH, M., Integration einer Klasse linearer Differentialgleichungen 377

Seite

SHAH, S. M., On Exceptional Values and the Genus of a meromorphic Function . . 385

SIOSON, F. M., Some primal Clusters 201

TACHIKAWA, H., On algebras of which every indecomposable representation has an irreducible one as the top or the bottom Loewy constituent 215

TAMASCHKE, O., Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler 115

TAMASCHKE, O., Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband 211

THIMM, W., Über starke und schwache Holomorphie auf analytischen Mengen (Führeridealgarbe und adjungierte Idealgarbe) 426

TÔGÔ, SH., On linear groups in which all elements can be decomposed in Jordan products 305

TOMIĆ, M., Über trigonometrische Sinus-Reihen mit positiven Koeffizienten 53

TSCHAUNER, J., Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome 1

TSCHAUNER, J., Erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen 392

WIEGOLD, J., Some remarks on generalised products of groups with amalgamations 57

WOLFSON, K. G., Baer subrings of the ring of linear transformations 328

TSCHAUNER, J.
Math. Zeitschr. 75, 1/2 (1961)

Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome

Von
JOHANN TSCHAUNER

In [5] wurde aus der Rekursionsformel für die Kugelfunktionen eine Differentialgleichung ihrer erzeugenden Funktion gewonnen, die im Sonderfall der zugeordneten Legendreschen Polynome eine einfache Lösung zuließ. Im folgenden wird das gleiche Verfahren zur Herleitung einer Differentialgleichung der erzeugenden Funktion von Gegenbauerschen Polynomen verwendet. Ihre Lösung ergibt die in der Literatur [3], [4] bekannte erzeugende Funktion der „abgewandelten" Gegenbauerschen Polynome.

Die Gegenbauerschen Polynome $u_n(x, p) = C_n^{p+\frac{1}{2}}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $p > -\frac{1}{2}$, befriedigen die bekannte Rekursionsformel [1]

$$(1) \qquad (n+2)\,u_{n+2} - (2n+3+2p)\,x\,u_{n+1} + (n+1+2p)\,u_n = 0$$

mit $u_0 = 1$, $u_1 = x(1+2p)$. Die aus den u_n nach Division durch eine Γ-Funktion hervorgehenden abgewandelten Gegenbauerschen Polynome

$$(2) \qquad v_n(x, p) = \frac{u_n}{\Gamma(1+n+2p)} = \frac{C_n^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(1+n+2p)}$$

genügen daher der neuen Rekursionsformel

$$(3) \qquad (n+2)(n+2+2p)\,v_{n+2} - (2n+3+2p)\,x\,v_{n+1} + v_n = 0$$

mit

$$v_0 = \frac{1}{\Gamma(1+2p)}, \quad v_1 = \frac{(1+2p)\,x}{\Gamma(2+2p)} = \frac{x}{\Gamma(1+2p)}.$$

Die Anfangswerte v_0, v_1 erfüllen die Beziehung

$$(4) \qquad v_1 - x\,v_0 = 0.$$

Multipliziert man die Rekursionsformel (3) mit t^n und summiert über n von Null bis Unendlich, dann findet man für die erzeugende Funktion

$$(5) \qquad V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,t^n$$

der abgewandelten Polynome v_n eine wegen des Bestehens von (4) *homogene* Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(6) \qquad t\,\ddot{V} + (1+2p-2x\,t)\,\dot{V} + [t-(1+2p)\,x]\,V = (1+2p)(v_1 - x\,v_0) = 0,$$

welche, wie eine Substitution

$$V(t) = e^{x\,t}\,t^{-p}\,W(t)$$

zeigt, mit der Besselschen Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{W} + t \dot{W} + (y^2 t^2 - p^2) W = 0 \tag{7}$$

verwandt ist. Darin bedeutet $y = \sqrt{1 - x^2}$. Partikuläre Lösungen der Gl. (6) sind daher

$$A\, e^{xt} t^{-p} J_p(yt), \qquad B\, e^{xt} t^{-p} N_p(yt).$$

Da $V(0) = v_0$ endlich ist, kommt hier nur die im Nullpunkt endliche partikuläre Lösung

$$V(t) = A\, e^{xt} t^{-p} J_p(yt)$$

in Betracht. Der Normierungsfaktor A ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$V(0) = v_0 = \frac{1}{\Gamma(1+2p)} = A \frac{y^p}{2^p \Gamma(1+p)}, \qquad A = \frac{2^p y^{-p} \Gamma(1+p)}{\Gamma(1+2p)}.$$

Man findet also die erzeugende Funktion der abgewandelten Gegenbauerschen Polynome

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{p+\frac{1}{2}}(x)}{\Gamma(1+n+2p)} t^n = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+2p)} e^{xt} \left(\frac{yt}{2}\right)^{-p} J_p(yt), \tag{8}$$

welche eine Beziehung dieser Polynome zu den Besselschen Funktionen erster Art herstellt. Sie wurde schon in [3] in anderer Weise hergeleitet. Ihre Wiedergabe in [3] und [4] enthält aber offenbar einen Druckfehler (statt $[\frac{1}{2} t^2 y^2]^{-\alpha}$ lies rechts $[\frac{1}{2} t y]^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)$).

Im Sonderfall $p = 0$ wird $C_n^{p+\frac{1}{2}}(x) = P_n(x)$. Aus Gl. (8) folgt für $p = 0$ unmittelbar die schon von RAINVILLE [2] auf anderem Wege erhaltene erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n = e^{xt} J_0(yt) \tag{9}$$

für die abgewandelten Legendreschen Polynome.

Literatur

[1] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze der speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 98. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.
[2] RAINVILLE, E. D.: Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 268–271 (1945).
[3] TRUESDELL, C. A.: An essay toward a unified theory of special functions, S. 101. Princeton University Press 1948.
[4] ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., TRICONI, F. G.: Higher transcendental functions, Bd. 3, S. 262. New York-Toronto-London 1955.
[5] TSCHAUNER, J.: Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen. Math. Z. **73**, 457 (1960).

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, (13b) Oberpfaffenhofen, Post Weßling

(Eingegangen am 4. März 1960)

FRIEDBERG, R.
Math. Zeitschr. 75, 3–7 (1961)

The uniqueness of finite division for recursive equivalence types

By
RICHARD FRIEDBERG

THEOREM. *Let A and B be recursive equivalence types [1]. Let n be a positive integer. Let multiplication by n denote multiplication [1] by a recursive equivalence type of cardinality n. Then*

$$n\,A = n\,B \Rightarrow A = B. \tag{1}$$

PROOF. Let ε be the set of all non-negative integers. Let α and β be subsets of ε which represent A and B respectively. Let h be some n-to-one recursive function which maps ε onto ε. Then $h^{-1}(\alpha)$ and $h^{-1}(\beta)$ are sets which represent nA and nB respectively. (This follows from the definition of multiplication in [1].)

Assume the left side of (1) is true. Then there is a partial recursive one-one function, φ, which maps $h^{-1}(\alpha)$ onto $h^{-1}(\beta)$. The right side of (1) will be true if there exists a partial recursive one-one function, ψ, which maps α onto β. We shall prove that ψ exists by constructing it from φ.

Since φ is partial recursive, it is possible, by a constructive procedure, to list without repetition all the pairs (x, y) for which $\varphi(x) = y$. The list does not terminate unless α and β are finite, in which case (1) is obvious. Assume the list is infinite, and let $\big(x(a), y(a)\big)$ be the a'th pair on it, for each $a \in \varepsilon$. Then x and y are recursive one-one functions. (We shall use the letters x, y, p, q sometimes for functions and sometimes for their values. When we use them for functions we shall say so explicitly.)

We now define three recursive predicates C, S_1, S_2:

$$\begin{cases} C(a,p,q) \equiv_{\text{def}} (E\,m)\,(E\,p_0, q_0, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m)\,[p_0 = p \,\&\, q_m = q \\ \qquad\qquad \&\,(r)_m\,(E\,a')_a\,\big(h(x(a')) = p_r \,\&\, h(y(a')) = q_r\big) \\ \qquad\qquad \&\,(r)_{m-1}\,(E\,a')_a\,\big(h(x(a')) = p_{r+1} \,\&\, h(y(a')) = q_r\big)\big]; \end{cases} \tag{2}$$

$$S_1(a,p) \equiv_{\text{def}} (E\,a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} \leqq a)\,(r)_{n-1}\,\big(h(x(a_r)) = p\big); \tag{3}$$

$$S_2(a,q) \equiv_{\text{def}} (E\,a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} \leqq a)\,(r)_{n-1}\,\big(h(y(a_r)) = q\big). \tag{4}$$

We now define two recursive one-one functions p, q:

For each $a \in \varepsilon$, let $p(a) =_{\text{def}}$ the smallest p (if any exist) which satisfies

$$\begin{cases} S_1(a,p) \,\&\, (\overline{E}\,a')_{a-1}\,(p(a') = p) \,\&\, (E\,q) \times \\ \qquad\qquad \times\,[S_2(a,q) \,\&\, (\overline{E}\,a')_{a-1}\,(q(a') = q) \,\&\, C(a,p,q)]. \end{cases} \tag{5}$$

If $p(a)$ satisfies (5), let $q(a) =_{\text{def}}$ the smallest q which satisfies

$$(6) \qquad S_2(a, q) \,\&\, (\overline{E}\, a')_{a-1}\,(q(a') = q) \,\&\, C(a, p(a), q).$$

If no p satisfies (5), this will be known after a finite search, because only those values of p and q which are respectively values of $h(x(a'))$ and $h(y(a'))$ for some $a' \leqq a$ need be considered. Then let $p(a)$, $q(a)$ both have no value in ε. (The non-existence of $p(a)$, $q(a)$ is a fact yielded definitely by the recursion and may be referred to in verifying (5) and (6) for higher values of a.)

We now define a partial recursive function ψ:

For any $p \in \varepsilon$, $q \in \varepsilon$, let

$$(7) \qquad \psi(p) = q \equiv_{\text{def}} (E\, a)\,\big(p(a) = p \,\&\, q(a) = q\big).$$

By a sequence of lemmas we shall show that ψ is the desired function.

(The sense of the construction is as follows. The relation $q = h\varphi h^{-1}(p)$ links numbers p and q into chains. $C(a, p, q)$ says that p and q are connected by a chain and therefore (by *Lemma* IV) we are allowed to put $\psi(p) = q$. Doing this at step a means putting $p(a) = p$, $q(a) = q$. Thus we build up ψ. However, we do not always put $\psi(p) = q$ when allowed, for then it might happen that some $p \in \alpha$ was never connected by a chain to any q that was not already assigned as the value of $\psi(p')$ for a $p' \neq p$. Instead, we assign arguments and values to ψ according to the conditions (5) and (6). This ensures that *Lemmas* V and VI are true, as will be shown.)

For each a, p, q, we define two finite sets:

$$(8) \quad \gamma_1(a, p) =_{\text{def}} \{p' \mid S_1(a, p') \,\&\, (p' = p \vee (E\, q')(C(a, p, q') \,\&\, C(a, p', q'))\};$$

$$(9) \quad \gamma_2(a, q) =_{\text{def}} \{q' \mid S_2(a, q') \,\&\, (q' = q \vee (E\, p')(C(a, p', q) \,\&\, C(a, p', q'))\}.$$

LEMMA I.

$$(E\, a')_a\,\big(h(x(a')) \in \gamma_1(a, p) \,\&\, h(y(a')) = q\big) \Rightarrow C(a, p, q);$$

$$(E\, a')_a\,\big(h(y(a')) \in \gamma_2(a, q) \,\&\, h(x(a')) = p\big) \Rightarrow C(a, p, q).$$

PROOF. Suppose that $p' = h(x(a')) \in \gamma_1(a, p)$ & $a' \leqq a$. Then either $p' = p$, in which case the lemma is obvious, or there exists q' such that $C(a, p, q')$ & $C(a, p', q')$; that is, there exist two chains,

$$p, q_{10}, p_{11}, q_{11}, \ldots, p_{1m_1}, q'$$

and

$$p', q_{20}, p_{21}, q_{21}, \ldots, p_{2m_2}, q',$$

each of which satisfies the right side of (2). Now, if $h(y(a')) = q$, then the chain

$$p, q_{10}, p_{11}, q_{11}, \ldots, p_{1m_1}, q', p_{2m_2}, \ldots, q_{21}, p_{21}, q_{20}, p', q$$

satisfies the right side of (2) with $m = m_1 + m_2 + 1$. Therefore $C(a, p, q)$.

Similarly if $q' = h(y(a')) \in \gamma_2(a, q)$, etc.

LEMMA II. *Suppose that*

A. $S_1(a, p)$

and

B. $(q)\left(C(a, p, q) \Rightarrow (E\,a')_a\,(q(a') = q)\right)$;

then

$$(E\,a')_a\,(p(a') = p).$$

Similarly interchanging the roles of p and q, γ_1 and γ_2, S_1 and S_2.

PROOF. Let

(10) $$\delta = \{h(y(a'))\,|\,a' \leqq a \,\&\, h(x(a')) \in \gamma_1(a, p)\}$$

and

(11) $$\eta = \{p(a')\,|\,a' \leqq a \,\&\, q(a') \in \delta\}.$$

By Lemma I,

(12) $$(q)\,(q \in \delta \Rightarrow C(a, p, q)).$$

By (5),

(13) $$p' \in \eta \Rightarrow S_1(a, p').$$

By (6),

(14) $$q(a') = q \in \delta \Rightarrow C(a', p(a'), q).$$

By (2),

(15) $$a' \leqq a \,\&\, C(a', p', q) \Rightarrow C(a, p', q).$$

Combining (14), and (15) with (11), we have

(16) $$(p')\left(p' \in \eta \Rightarrow (E\,q)\,(q \in \delta \,\&\, C(a, p', q))\right).$$

Combining (16) with (12), and using (8), and (13)

(17) $$\eta \leqq \gamma_1(a, p).$$

Now suppose that $\gamma_1(a, p)$ has r members. By (3), there must be nr distinct values of $a' \leqq a$ such that $h(x(a')) \in \gamma_1(a, p)$. But y and h are one-one and n-one functions, respectively; therefore, by (10), δ has at least r members. From (12) and hypothesis B, it now follows that there are at least r values of $a' \leqq a$ for which $q(a') \in \delta$. But p is a one-one function; therefore by (11), η has at least r members — that is, no fewer than $\gamma_1(a, p)$.

Combining this result with (17), we have

(18) $$\gamma_1(a, p) = \eta.$$

Combining (18), (8), hypothesis A, and (11), we have

(19) $$(E\,a')_a\,(p(a') = p).$$

Similarly with p and q, etc., interchanged.

LEMMA III.

$$(p)\,\big(p \in \alpha \Rightarrow (E\,a_1)\,(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_1(a,p))\big);$$
$$(q)\,\big(q \in \beta \Rightarrow (E\,a_1)\,(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_2(a,q))\big).$$

PROOF. From definitions we have

$$\alpha, \beta \leqq \textit{range}\, h;$$
$$h \text{ is a } n\text{-one function};$$
$$h^{-1}(\alpha) \leqq \textit{range}\, x;$$
$$h^{-1}(\beta) \leqq \textit{range}\, y.$$

The lemma follows directly, using (3) and (4).

LEMMA IV. *If* $C(a,p,q)$, *then* $p \in \alpha \Leftrightarrow q \in \beta$.

PROOF. For each a', we have

$$h\,(x(a')) \in \alpha \Leftrightarrow x(a') \in h^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow y(a') \in h^{-1}(\beta) \Leftrightarrow h\big(y(a')\big) \in \beta.$$

The lemma follows directly, using (2).

LEMMA V. $$(p)\,\big(p \in \alpha \Rightarrow (E\,a)\,(p(a) = p)\big).$$

PROOF. Suppose the lemma false. Let $\bar{p} \in \alpha$ and

(20) $$(\bar{E}\,a)\,(p(a) = \bar{p}).$$

Applying Lemma III, and using the fact that p is a one-one function, let a_1 be so large that

(21) $$(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_1(a,p))$$

and

(22) $$(a)\,(p(a) < \bar{p} \Rightarrow a < a_1).$$

By (20), (21), and Lemma II, we can find $\bar{q}$ so that

(23) $$C(a_1, \bar{p}, \bar{q})\ \&\ (\bar{E}\,a)_{a_1}(q(a) = q).$$

By Lemma IV and (23), $\bar{q} \in \beta$. Applying Lemma III, let $\bar{a}$ be the least $a \geqq a_1$ such that $S_2(a,\bar{q})$. Then, combining (21), (20), and (23), we see that $\bar{a}, \bar{p}, \bar{q}$ satisfy (5). Therefore $p(\bar{a}) \leqq \bar{p}$. But since $a \geqq a_1$, this contradicts either (20) or (22). The lemma is proved.

LEMMA VI. $$(q)\,\big(q \in \beta \Rightarrow (E\,a)\,(q(a) = q)\big).$$

PROOF. Suppose the lemma false. Let $\bar{q} \in \beta$ and

(24) $$(\bar{E}\,a)\,(q(a) = \bar{q}).$$

As in the proof of Lemma V, we can find a_1, $\bar{p}$, such that

(25) $$(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_2(a,\bar{q})),$$

(26) $$(a)\,(q(a) < \bar{q} \Rightarrow a < a_1),$$

(27) $$C(a_1, \bar{p}, \bar{q})\ \&\ (\bar{E}\,a)_{a_1}(p(a) = \bar{p}).$$

By (27) and Lemma IV, $\bar{p} \in \alpha$. Therefore, by Lemma V, $p(a) = \bar{p}$ for some a, let us say for $a = \bar{a}$. By (27), $\bar{a} \geqq a_1$. Hence, from (24), (25), and (27), we see that $\bar{a}$, $\bar{q}$ satisfy (6). Therefore $q(\bar{a}) \leqq \bar{q}$. This contradicts (24) or (26). The lemma is proved.

LEMMA VII. $\quad p(a) \in \alpha \Leftrightarrow q(a) \in \beta$.

PROOF. This follows from (6) and Lemma IV.

ψ is a one-one function because p and q are one-one functions. By Lemma V, $\alpha \subseteq$ *domain* ψ. By Lemma VI, $\beta \subseteq$ *range* ψ. By Lemma VII, if $\psi(p) = q$, then $p \in \alpha \Leftrightarrow q \in \beta$. Therefore ψ maps α one-one onto β. The theorem is proved.

OPEN PROBLEMS.

1. Can other functions take the place of multiplication in this theorem?
2. Can n in this theorem be replaced by an infinite isol?

References

[1] DEKKER, J. C. E.: Congruences in Isols with a Finite Modulus. Math. Z. **70**, 113–124 (1958).

Dept. of Math., Columbia University, New York (U.S.A.)

(Eingegangen am 21. März 1960)

CIGLER, J.
Math. Zeitschr. 75, 8–13 (1961)

Ziffernverteilung in ϑ-adischen Brüchen

Von
JOHANN CIGLER

Jede reelle Zahl α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, läßt sich — bei festem reellem $\vartheta > 1$ und gegebenem n — in der Gestalt

$$\alpha = \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_k}{\vartheta^k} = \sum_1^{n} \frac{\lambda_k}{\vartheta^k} + \frac{x_n}{\vartheta^n} \tag{1}$$

darstellen, wobei die λ_k ganz sind mit $0 \leqq \lambda_k < \vartheta$ und für die reellen Zahlen x_k die Ungleichung $0 \leqq x_k < 1$ gilt. Die Darstellung (1) ist eindeutig, wenn man die Zahlen λ_k und x_k durch die folgende Rekursionsformel bestimmt [1]:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, & x_1 = \{\vartheta x_0\}, \ldots, x_{k+1} = \{\vartheta x_k\}, \ldots \\ \lambda_0 = 0, & \lambda_1 = [\vartheta x_0], \ldots, \lambda_{k+1} = [\vartheta x_k], \ldots \end{cases} \quad (\{x\} = x - [x]). \tag{2}$$

Hier sind natürlich $\lambda_k = \lambda_k(\alpha)$ und $x_k = x_k(\alpha)$ Funktionen von α. Wir setzen im folgenden stets $\lambda_k(1) = a_k$ und $x_k(1) = t_k$.

Ist $\vartheta = q$ ganz, so ergibt sich die gewöhnliche q-adische Entwicklung. In diesem Falle ist bekanntlich die Folge $x_n(\alpha)$ für fast alle α gleichverteilt. A. RÉNYI [5] bewies 1957, daß bei jedem $\vartheta > 1$ die Folgen $x_n(\alpha)$ für fast alle α eine Verteilungsfunktion besitzen, die von α unabhängig ist. Im Spezialfall $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ fand er eine explizite Darstellung. Im allgemeinen Fall wurde sie 1959 von A. O. GELFOND [3] bestimmt. Während RÉNYIs Beweis auf ergodentheoretischen Überlegungen beruht, verwendet A. O. GELFOND Sätze aus der Funktionentheorie und elementare Abschätzungen. Wir geben im folgenden einen kurzen Neubeweis des Gelfondschen Resultats, dessen Grundgedanke derselbe wie bei RÉNYI ist. Anschließend untersuchen wir einige Folgerungen, die sich daraus für die Verteilung der Ziffern in ϑ-adischen Brüchen ergeben.

1. Die Transformation $Tx = \{\vartheta x\}$

Die Transformation T ist eine Transformation des Intervalls $[0, 1)$ auf sich. Wir zeigen, daß ein Maß μ existiert, das invariant bezüglich T und äquivalent zum Lebesgueschen Maß ist.

SATZ 1. *Es sei $\varphi_\gamma(t)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, \gamma)$ und $C[0, 1)$ der Raum aller stetigen Funktionen mit der Periode 1. Es sei ferner*

$$\sigma_0(t) = \sigma_0^{(\vartheta)}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_0^{\infty} \frac{\varphi_{t_k}(t)}{\vartheta^k}, \qquad \tau = \sum_0^{\infty} \frac{t_k}{\vartheta^k},$$

[1] Für $\alpha = 1$ gilt (2) nur für nichtganzzahliges ϑ.

und $\mu(f)$ das positive lineare Funktional, das jeder Funktion $f \in C[0,1)$ die Zahl $\mu(f) = \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt$ zuordnet. Dann ist das durch μ auf allen Borel-Mengen erklärte Maß invariant bezüglich T und äquivalent zum Lebesgueschen Maß.

BEWEIS. a) Das Maß μ ist äquivalent mit dem Lebesgueschen Maß, d.h. besitzt dieselben Nullmengen: Wie man sofort sieht, gibt es zwei Konstante c_1 und c_2, für die $0 < c_1 < \sigma_0(t) < c_2$ gilt. Ist nun A eine beliebige Borel-Menge, so ergibt sich also $c_1 \int_A dt < \int_A \sigma_0(t)\,dt < c_2 \int_A dt$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

b) Invarianz. Wir müssen zeigen, daß die Relation $\int_0^1 f(\vartheta t)\,\sigma_0(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt$ für jede stetige Funktion f mit der Periode 1 gilt. Das ergibt sich aber folgendermaßen:

$$\tau \int_0^1 f(\vartheta t)\,\sigma_0(t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^1 \varphi_{i_k}(t)\, f(\vartheta t)\,dt$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^{i_k} f(\vartheta t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{\vartheta i_k} f(t)\,dt$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{[\vartheta i_k]} f(t)\,dt + \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_{[\vartheta i_k]}^{\vartheta i_k} f(t)\,dt$$

$$= \sum_0^\infty \frac{a_{k+1}}{\vartheta^{k+1}} \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{i_{k+1}} f(t)\,dt$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^{i_k} f(t)\,dt = \tau \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt, \qquad \text{wzbw.}$$

SATZ 2. *Die Transformation T ist ergodisch (bezüglich des Lebesgueschen Maßes).*

BEWEIS. Eine Transformation ist genau dann ergodisch, wenn jede invariante Menge E ($T^{-1}x \in E$ für fast alle $x \in E$) entweder das Maß Null oder Eins besitzt.

Mit $|E|$ bezeichnen wir das Lebesguesche Maß von E. Es sei E eine invariante Menge mit $|E| = d < 1$. Wir werden zeigen, daß dann die Menge E an jedem ihrer Punkte eine Dichte < 1 besitzt, woraus nach dem Lebesgueschen Dichtesatz (s. z.B. [4], S. 264) folgt, daß $|E| = 0$ ist und damit die Behauptung unseres Satzes gilt.

Mit J bezeichnen wir die Menge aller Intervalle der Gestalt $\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\vartheta^n}, \frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}\right)$, d.h. aller Intervalle, in denen die ersten n Ziffern feste Werte besitzen (die natürlich zulässig sein müssen, womit gemeint ist, daß sie in

der Entwicklung mindestens einer Zahl α wirklich auftreten). Wir nennen diese Intervalle Grundintervalle n-ter Stufe. Die Zahl λ_n^* ist dabei so gewählt, daß der Punkt $\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}$ der rechte Endpunkt des entsprechenden Intervalles ist. Es ist nicht immer $\lambda_n^*=\lambda_n+1$, weil mit der Ziffernsequenz $[\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_n]$ nicht notwendig auch die Sequenz $[\lambda_1\,\lambda_2\ldots(\lambda_n+1)]$ zulässig ist. Offenbar kann man jedes offene Intervall als Vereinigung von höchsten abzählbar vielen punktfremden Grundintervallen darstellen. Es genügt also zu zeigen, daß $\frac{|E\cap j|}{|j|}\leqq d<1$ für jedes $j\in J$ gilt. (Daraus folgt dann dieselbe Relation für eine beliebige offene Menge j.) Das ergibt sich aber, wenn man die charakteristische Funktion

$$\varphi_E(x)\begin{cases}=1 & x\in E\\ =0 & x\notin E\end{cases}\pmod 1$$

einführt, folgendermaßen:

$$|E\cap j|=\int\limits_{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^n}}^{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}}\varphi_E(x)\,dx=\int\limits_{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^n}}^{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}}\varphi_E(\vartheta x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\vartheta}\int\limits_{\frac{\lambda_2}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^{n-1}}}^{\frac{\lambda_2}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^{n-1}}}\varphi_E(x)\,dx=\cdots=\frac{1}{\vartheta^n}\int\limits_0^{\lambda_n^*-\lambda_n}\varphi_E(x)\,dx\leqq d|j|,\qquad\text{wzbw.}$$

BEMERKUNG. Die beiden Sätze gelten auch im k-dimensionalen Fall. Dabei ist $T(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)})=(\{\vartheta_1x^{(1)}\},\ldots,\{\vartheta_kx^{(k)}\})$, $\vartheta_i>1$ $(i=1,2,\ldots,k)$ und $\sigma_0^{(\vartheta_1\cdots\vartheta_k)}(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{i=1}^{k}\sigma_0^{(\vartheta_i)}(t_i)$ zu setzen. Die Beweise sind fast wörtlich vom eindimensionalen Fall zu übertragen.

FOLGERUNGEN. 1. Für fast alle $\alpha\in[0,1)$ besitzt die Folge $x_n(\alpha)$ die Verteilungsfunktion $\sigma(t)=\int_0^t\sigma_0(t)\,dt=\mu\big([0,t)\big)$. Analog im mehrdimensionalen Fall.

2. Besitzt die Folge $x_n(\alpha)$ die Verteilungsfunktion $\sigma(t)$, dann auch jede Teilfolge der Gestalt $x_{kn+l}(\alpha)$.

BEWEIS. 1. ist unmittelbar klar, weil die Transformation T ergodisch ist, und 2. folgt z.B. aus [2], Satz 7.

2. Die Verteilung der Ziffern in ϑ-adischen Brüchen

Die Folge $x_\nu(\alpha)$ besitze das Verteilungsmaß μ. Was folgt daraus für die Verteilung der Ziffern $\lambda_\nu(\alpha)$? Zunächst einige Vorbemerkungen! Es sei $\alpha=\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_\nu}{\vartheta^\nu}+\cdots$. Wir bilden aus den Ziffern λ_ν die Folge der n-gliedrigen Sequenzen $s_\nu=[\lambda_{\nu+1}\,\lambda_{\nu+2}\ldots\lambda_{\nu+n}]$ $(\nu=0,1,2,3,\ldots)$. Dabei sei

n eine beliebige natürliche Zahl. Sei $c=[c_1\, c_2 \dots c_n]$ eine feste Sequenz. Wir bezeichnen mit $N_p(s_\nu=c)$ die Anzahl der Sequenzen s_ν mit $0\leqq\nu<p$, für die $s_\nu=c$ ist. Den Limes $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{1}{p}N_p(s_\nu=c)=P(s_\nu=c)$ nennen wir die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Ziffernsequenz c. Dieser Grenzwert existiert stets, und zwar ist

$$P(s_\nu=c)=\mu\left(\left[\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n}{\vartheta^n},\ \frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n^*}{\vartheta^n}\right)\right),$$

denn $s_{\nu+1}=c$ ist gleichbedeutend mit

$$\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n}{\vartheta^n}\leqq x_\nu<\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n^*}{\vartheta^n},$$

wie aus (1) sofort ersichtlich ist. Für jede Sequenz c existiert also eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeit.

Da für fast alle $\alpha\in[0,1]$ das Verteilungsmaß der Folge $x_\nu(\alpha)$ gleich μ ist und μ von der Basis ϑ abhängt, ist auch $P(s_\nu=c)=P^{(\vartheta)}(s_\nu=c)$ eine Funktion von ϑ. Ist ϑ ganzzahlig, so gilt bekanntlich (s. [1]) für die eingliedrigen Sequenzen $s_\nu=\lambda_\nu$ die Beziehung

$$\begin{aligned}P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\ \lambda_{\nu+2}=c_2,\dots,\lambda_{\nu+r}=c_r)\\ =P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,P(\lambda_{\nu+r}=c_r)\end{aligned}$$

für jede natürliche Zahl $r\geqq 2$. Die „Zufallsvariablen" $\lambda_{\nu+l}$ $(l=1,2,\dots,r)$ sind also für jedes $r\geqq 2$ voneinander unabhängig. Für die Basis $\vartheta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ zeigte A. RÉNYI [6] die Relation

$$P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r}=c_r)=P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,\pi(c_{r-1},c_r),$$

wobei $\pi(c_{r-1},c_r)$ nur von den beiden Argumenten abhängt. Die Zufallsvariablen $\lambda_{\nu+l}$ $(l=1,2,\dots,r)$ bilden also eine homogene Markowsche Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(c_i,c_j)$. Unser Ziel ist der folgende Satz, der zeigt, daß dieser Sachverhalt für eine ganze Klasse von Basen ϑ eintritt, die $\vartheta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ als Spezialfall enthält.

SATZ 3. *Es sei $\vartheta>1$ eine reelle Zahl, für die die ϑ-adische Entwicklung der Zahl 1 nach endlich vielen Schritten abbricht. Es sei also $1=\frac{a_1}{\vartheta}+\frac{a_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{a_{n+1}}{\vartheta^{n+1}}$. Dann bilden die Ziffernsequenzen $s_\nu=[\lambda_{\nu+1},\dots,\lambda_{\nu+n}]$ $(\nu=0,1,\dots)$ eine homogene Markowsche Kette. Mit anderen Worten: Sind $c_l=[c_{l_1}\dots c_{l_n}]$ $(l=1,\dots,r)$ feste n-gliedrige Sequenzen, dann existieren Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(c_i,c_j)$, so daß*

$$P(s_{\nu+1}=c_1,\dots,s_{\nu+r}=c_r)=P(s_{\nu+1}=c_1,\dots,s_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,\pi(c_{r-1},c_r)$$

für jedes ganze $r\geqq 2$ gilt.

BEMERKUNG. Man überzeugt sich leicht davon, daß die positive Wurzel jeder Gleichung der Gestalt $x^2-mx-n=0$ $(1\leqq n\leqq m)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ebenso sieht man unmittelbar, daß es ganze algebraische

Zahlen beliebigen Grades gibt, die diese Eigenschaft besitzen (z.B. die Lösungen ϑ, $1<\vartheta<2$, der Gleichungen $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ für $n = 2, 3, \ldots$).

Es bedeute jetzt $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ die Länge des Grundintervalles

$$\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N},\ \frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N}\right).$$

Wir sagen auch kurz, $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ sei die Intervallänge der Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

HILFSSATZ. *Ist $t_\nu = 0$ für $\nu \geqq n+1$, so gilt für jede zulässige Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ die Relation*

$$L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N) = \vartheta^{n-N} \cdot L(\lambda_{N-n+1} \ldots \lambda_N) \qquad (N \geqq n).$$

BEWEIS. Wir wenden vollständige Induktion an. Für $N = n$ stimmt der Satz. Es sei also $N > n$ und die Behauptung für $N-1$ schon gezeigt. Dann gilt insbesondere

$$L(\lambda_2 \ldots \lambda_N) = \vartheta^{n-N+1} L(\lambda_{N-n+1} \ldots \lambda_N).$$

Es bleibt somit noch zu zeigen: $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N) = \frac{1}{\vartheta} L(\lambda_2 \ldots \lambda_N)$. Ist $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, [\vartheta] - 1$, so ist diese Beziehung trivial, da alle Grundintervalle $\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta}, \frac{\lambda_1 + 1}{\vartheta}\right)$ dieselbe Länge besitzen und für $\lambda_1 = 0$ die Behauptung offensichtlich stimmt. Es sei also $\lambda_1 = [\vartheta]$. Das Grundintervall, das durch die Sequenz $[\lambda_2 \ldots \lambda_N]$ bestimmt wird, sei $\left[\frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^{N-1}},\ \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^{N-1}}\right)$. Dann ist $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N} < 1$, da ja $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ zulässig sein sollte. (Man bestätigt leicht, daß eine Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ genau dann zulässig ist, wenn $\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N} < 1$ ist und die Sequenz $[\lambda_2 \ldots \lambda_N]$ zulässig ist.) Wir müssen nachweisen, daß auch $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N} \leqq 1$ gilt. (Hier steht das Gleichheitszeichen, weil der rechte Endpunkt nicht mehr zulässig zu sein braucht.) Wäre das nicht der Fall, so würde $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N} > 1$ gelten. Man käme also zu den Ungleichungen

$$(3) \qquad \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^{N-1}} < \vartheta - [\vartheta] < \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^{N-1}}.$$

Nun ist $\vartheta - [\vartheta]$ ein Endpunkt eines Grundintervalles n-ter Stufe. Da ein solcher aber eo ipso auch Endpunkt für jedes Grundintervall höherer Stufe ist, ergibt sich aus (3) ein Widerspruch, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

FOLGERUNG 1. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes hängt die Länge $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ nur von N und den letzten n Ziffern der Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ ab.

FOLGERUNG 2. Unter denselben Voraussetzungen bilden die Intervalllängen der Sequenzen $s_\nu = [\lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+n}]$ eine homogene Markowsche Kette,

d.h. es ist

$$L(s_{\nu+1}=c_1, \ldots, s_{\nu+r}=c_r) = L(s_{\nu+1}=c_1, \ldots, s_{\nu+r-1}=c_{r-1}) \cdot l(c_{r-1}, c_r),$$

wobei $l(c_{r-1}, c_r)$ nur von den beiden Argumenten abhängt.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 1 [2]).

Beweis von Satz 3. Sind die Voraussetzungen zu Satz 3 erfüllt (sie sind identisch mit denen des Hilfssatzes), so besteht die Verteilungsfunktion $\sigma(t)$ aus $n+1$ linearen Teilstücken mit den Endpunkten t_ν ($\nu=0, 1, \ldots, n+1$). Nun ist $t_\nu = \frac{a_{\nu+1}}{\vartheta} + \cdots + \frac{a_n+1}{\vartheta^{n-\nu+1}}$, d.h. jedes t_ν ist Endpunkt eines Grundintervalles n-ter Stufe. Daraus ergibt sich, daß $\sigma(t)$ innerhalb jedes Grundintervalles linear ist. Aus Folgerung 2 folgt nun unmittelbar die Behauptung von Satz 3 mit $\pi(c_i, c_j) = l(c_i, c_j)$. Denn die Übergangswahrscheinlichkeiten werden bei der Ersetzung der Längen durch die Wahrscheinlichkeiten nicht geändert wegen der Linearität von $\sigma(t)$. Eine Änderung tritt nur bei den Anfangswahrscheinlichkeiten ein, für die sich ergibt $P(s_\nu=c) = a(c)\,L(s_\nu=c)$, wo $a(c)$ eine Funktion der Sequenz c ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

[1] Borel, É.: Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo **26**, 247–271 (1909).

[2] Cigler, J.: Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. Erscheint im J. reine u. angew. Math.

[3] Gelfond, A. O.: Über eine allgemeine Eigenschaft von Zahlsystemen. [Russisch.] Iswestija Akad. Nauk **23**, 809–814 (1959).

[4] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954.

[5] Rényi, A.: Representations for Real Numbers and Their Ergodic Properties. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 477–493 (1957).

[6] Rényi, A.: Über Algorithmen zur Darstellung reeller Zahlen. [Ungarisch.] MTA Mat. es Fiz. oszt. Közl. **7**, 265–293 (1957).

Mainz, Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 26. März 1960)

[2]) Es ist natürlich z.B. $L(s_{\nu+1}=c_1,\ s_{\nu+2}=c_2)=0$ zu setzen, wenn das Argument sinnlos wird, wenn also $[c_{12}\cdots c_{1n}] \neq [c_{21}\cdots c_{2,n-1}]$, ist.

NÖBAUER, W.
Math. Zeitschr. 75, 14–21 (1961)

Über die Ableitungen der Vollideale

Von
WILFRIED NÖBAUER

In den Arbeiten [1], [2] wurde von mir der Begriff der ν-ten Ableitung eines Vollideales ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$) und der Begriff des D-Kernes eines Vollideales eingeführt und untersucht. Im folgenden sollen einerseits diese Untersuchungen fortgesetzt und wieder einige allgemeine Sätze über Ableitungen und D-Kerne von Vollidealen gewonnen werden, andererseits werden wir die D-Kerne der Restpolynomideale eines Galois-Feldes und der ganzzahligen Restpolynomideale berechnen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit werden wir für den D-Kern δV des Vollideales V im folgenden stets schreiben $\delta V = V^{(\infty)}$.

Es sei also $\mathfrak{r}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement und $R = \mathfrak{r}[x_1, x_2, \ldots, x_k] = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ der Polynomring über $\mathfrak{r}$ in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Es sei ϑ ein Homomorphismus des Ringes $\mathfrak{r}$ auf den Ring $\mathfrak{t}$ und Θ die durch

$$\Theta \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_k} x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} = \sum (\vartheta a_{\nu_1 \ldots \nu_k})\, x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} \tag{1}$$

definierte Fortsetzung von ϑ zu einem Homomorphismus von R auf den Polynomring $T = \mathfrak{t}[\mathfrak{x}]$. Wir beweisen zunächst folgenden

SATZ 1. *Für jedes Vollideal $V \subseteq R$ und für $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ gilt*

$$\Theta V^{(n)} \subseteq (\Theta V)^{(n)}. \tag{2}$$

BEWEIS. Für $n = 0$ ist (2) trivialerweise richtig. Ist $\varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V'$, so gilt $\varphi(\mathfrak{x}) = \Theta f(\mathfrak{x})$ mit $f(\mathfrak{x}) \in V'$. Es gilt also

$$f(\mathfrak{x}) \in V \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathfrak{x}) \in V \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Daraus folgt durch Anwendung von Θ:

$$\varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V \qquad \Theta \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta f(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V,$$

also haben wir $\varphi(\mathfrak{x}) \in (\Theta V)'$ und damit $\Theta V' \subseteq (\Theta V)'$. Angenommen, es sei $\Theta V^{(n)} \subseteq (\Theta V)^{(n)}$ schon bewiesen, dann haben wir:

$$\Theta V^{(n+1)} = \Theta (V^{(n)})' \subseteq (\Theta V^{(n)})' \subseteq \big((\Theta V)^{(n)}\big)' = (\Theta V)^{(n+1)},$$

daher ist (2) für alle endlichen n richtig. Die Behauptung für $n = \infty$ ergibt sich so:

$$\Theta V^{(\infty)} = \Theta \big(\bigcap_n V^{(n)}\big) \subseteq \bigcap_n \Theta V^{(n)} \subseteq \bigcap_n (\Theta V)^{(n)} = (\Theta V)^{(\infty)}.$$

FOLGERUNG. *Ist V ein D-Vollideal, dann auch ΘV.* Denn aus $V'=V$ folgt $\Theta V=\Theta V'\subseteq(\Theta V)'$, andererseits gilt aber auch die Beziehung $(\Theta V)'\subseteq\Theta V$.

Wir überlegen uns nun, daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt, wenn das Umschließungsideal $\mathfrak{v}$ von V den Kern $\mathfrak{a}$ von ϑ enthält. Dazu beweisen wir, daß unter dieser Voraussetzung auch gilt

$$(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}. \tag{3}$$

Für $n=0$ ist das trivialerweise richtig. Ist $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)'$, dann gilt $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V$, es gibt daher $f(\mathfrak{x})$, $g_i(\mathfrak{x})\in V$, so daß

$$\Theta f(\mathfrak{x})=\varphi(\mathfrak{x})\qquad \Theta g_i(\mathfrak{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathfrak{x}).$$

Wegen $\Theta\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\Theta f(\mathfrak{x})=\Theta g_i(\mathfrak{x})$ haben wir

$$\Theta\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})-g_i(\mathfrak{x})\right]=0,$$

also $\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})-g_i(\mathfrak{x})\in(\mathfrak{a})\subseteq(\mathfrak{v})\subseteq V$ und daher $\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})\in V$, also $f(\mathfrak{x})\in V'$ und damit $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V'$, also $(\Theta V)'\subseteq\Theta V'$. Angenommen, es sei $(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}$ schon bewiesen; da $V^{(n)}$ dasselbe Umschließungsideal wie V hat, haben wir dann:

$$(\Theta V)^{(n+1)}=\left((\Theta V)^{(n)}\right)'\subseteq(\Theta V^{(n)})'\subseteq\Theta(V^{(n)})'=\Theta V^{(n+1)}.$$

Die Behauptung für $n=\infty$ ergibt sich jetzt so: Ist $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)^{(\infty)}$, so gilt $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}$ für jedes endliche n, es gibt daher Polynome $f_n(\mathfrak{x})\in V^{(n)}$ mit $\Theta f_n(\mathfrak{x})=\varphi(\mathfrak{x})$. Daher ist stets $\Theta\left(f_0(\mathfrak{x})-f_n(\mathfrak{x})\right)=0$, daher $f_0(\mathfrak{x})-f_n(\mathfrak{x})\in(\mathfrak{a})\subseteq(\mathfrak{v})\subseteq V^{(n)}$, also haben wir $f_0(\mathfrak{x})\in\bigcap_n V^{(n)}=V^{(\infty)}$ und daher $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V^{(\infty)}$, also $(\Theta V)^{(\infty)}\subseteq\Theta V^{(\infty)}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Urbilder einer Menge $M\subseteq T$ bei Θ mit AM. Wie in [1] gezeigt wurde, ist AM Vollideal in R, wenn M Vollideal in T ist. Wir haben nun

SATZ 2. *Für jedes Vollideal $W\subseteq T$ und für $n=0, 1, 2, \ldots, \infty$ gilt*

$$(AW)^{(n)}=AW^{(n)}. \tag{4}$$

Denn es ist $\Theta(AW)=W$ und das Umschließungsideal von AW enthält $\mathfrak{a}$, daher haben wir

$$W^{(n)}=\Theta(AW)^{(n)},$$

woraus sich durch Anwendung von A unter Beachtung von $(AW)^{(n)}\supseteq(\mathfrak{a})$ tatsächlich (4) ergibt.

Wir definieren nun:

Unter der Ableitungslänge $l(V)$ des Vollideales V verstehen wir die kleinste nichtnegative Zahl n, für welche gilt:

$$V^{(n)}=V^{(\infty)}. \tag{5}$$

Falls ein solches n nicht existiert, setzen wir $l(V)=\infty$.

Offenbar ist $l(V)$ auch die kleinste nicht negative Zahl mit $V^{(n)}=V^{(n+1)}$. Die D-Vollideale lassen sich daher charakterisieren durch $l(V)=0$. Wegen $(A\cap B)^{(\nu)}=A^{(\nu)}\cap B^{(\nu)}$ gilt

$$l(A\cap B)\leqq \max\big(l(A),l(B)\big), \tag{6}$$

Aus (4) ergibt sich fast unmittelbar

$$l(\Lambda W)=l(W). \tag{7}$$

Satz 5 von [1] besagt, daß man genau sämtliche Vollideale von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ erhält, wenn man $\mathfrak{t}=\mathfrak{r}|\mathfrak{a}$ setzt, für ϑ den natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{r}|\mathfrak{a}$ nimmt und dann in ΛW das W alle Vollideale von T mit dem Umschließungsideal (0) durchlaufen läßt.

Beachtet man nun noch (7), so erkennt man, daß auch gilt:

Man erhält genau alle D-Vollideale von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$, wenn man in ΛW das W alle D-Vollideale von T mit dem Umschließungsideal (0) durchlaufen läßt.

Weiter erkennt man: Wenn jedes Vollideal von T mit Umschließungsideal (0) endliche Ableitungslänge hat, dann hat jedes Vollideal von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ endliche Ableitungslänge. Die Voraussetzung dieses Satzes ist nun sicher erfüllt in den folgenden beiden Fällen:

a) $\mathfrak{t}$ ist ein unendlicher Integritätsbereich,

b) $\mathfrak{t}$ hat endliche Charakteristik m.

Denn im Fall a) gilt für jedes Vollideal $W\subseteqq T$ mit Umschließungsideal (0) die Beziehung $\big((0)\big)\subseteqq W\subseteqq\{(0)\}=\big((0)\big)$ also $W=(0)$ und daher $W'=W$.

Im Fall b) wähle ich zunächst die natürliche Zahl σ so, daß gilt $m|\sigma!$ und bilde dann damit die Zahl $n=k(\sigma-1)+1$. Ist nun $f(\mathfrak{x})\in\mathfrak{t}[\mathfrak{x}]$ gegeben, so gilt für jede partielle Ableitung der Ordnung n von $f(\mathfrak{x})$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\sigma_1}\partial x_2^{\sigma_2}\dots\partial x_k^{\sigma_k}}f(\mathfrak{x})=\sigma_1!\,\sigma_2!\dots\sigma_k!\,g(\mathfrak{x})=0,$$

denn es gilt mindestens einmal $\sigma_i\geqq\sigma$. Nun ist aber, wie wir in [1] festgestellt haben, $W^{(n)}$ die Menge aller Elemente von W, für die sämtliche partiellen Ableitungen von einer Ordnung $\leqq n$ zu W gehören; deshalb gilt in unserem Fall für jedes Vollideal $W\subseteqq T$ die Beziehung $W^{(n-1)}\subseteqq W^{(n)}$, also $l(W)\leqq n-1$.

Wir haben daher den folgenden

SATZ 3. *Wenn jedes homomorphe Bild des Ringes $\mathfrak{r}$ ein Integritätsbereich ist oder endliche Charakteristik hat, dann hat jedes Vollideal von $\mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ endliche Ableitungslänge.*

Insbesondere haben also alle Vollideale über einen endlichen Ring $\mathfrak{r}$ und alle Vollideale über den Integritätsbereich $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen endliche Ableitungslänge.

Wir wenden uns nun der am Beginn der Arbeit angekündigten Berechnung von D-Kernen zu:

Zunächst sei $\mathfrak{r}$ das Galois-Feld mit $r=p^r$ Elementen. Dann gibt es in $R=\mathfrak{r}[\underline{x}]$ nur die beiden Restpolynomideale $\{(1)\}=R$ und $\{(0)\}$. Wegen $R'=R$ brauchen wir also nur noch $\{(0)\}=N$ zu betrachten. Aus bekannten Sätzen über Galois-Felder ergibt sich

$$N=(x_1^r-x_1,\ x_2^r-x_2 \dots x_k^r-x_k). \tag{8}$$

Wir bilden nun das Ideal

$$P=\left((x_1^r-x_1)^p,\ (x_2^r-x_2)^p \dots (x_k^r-x_k)^p\right),$$

und behaupten, daß gilt

$$N^{(m)}=(N^{m+1},\ P) \quad \text{für jedes endliche } m. \tag{9}$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Für $m=0$ ist (9) wegen $P\subseteqq N$ richtig. Wir nehmen daher an, (9) sei mit $m-1$ statt m schon bewiesen. Wie wir schon in [1] gezeigt haben, gilt für ein Vollideal V stets $V^n\subseteqq V^{(n-1)}$, also haben wir $N^{m+1}\subseteqq N^{(m)}$; da sämtliche partiellen Ableitungen von $(x_i^r-x_i)^p$ verschwinden, gilt auch $P\subseteqq N^{(m)}$, also $(N^{m+1},\ P)\subseteqq N^{(m)}$. Nun sei umgekehrt $f(\underline{x})\in N^{(m)}$ gegeben. Wegen $N^{(m)}\subseteqq N^{(m-1)}$ und der Induktionsannahme können wir schreiben:

$$f(\underline{x})=\sum a_{e_1 e_2 \dots e_k}(\underline{x})\,(x_1^r-x_1)^{e_1}(x_2^r-x_2)^{e_2}\dots(x_k^r-x_k)^{e_k}+\sum_{i=1}^{k} b_i(\underline{x})\,(x_i^r-x^i)^p, \tag{10}$$

wobei die erste Summe zu erstrecken ist über alle geordneten k-Tupel

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

mit $\quad e_1+e_2+\dots+e_k=m \qquad 0\leqq e_i<p \qquad$ für $\quad i=1, 2, \dots, k.$

Aus (10) erhält man durch Differentiation unter Beachtung von $N^m\subseteqq N^{(m-1)}$

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{e_1}\partial x_2^{e_2}\dots\partial x_k^{e_k}} f(\underline{x})\equiv(-1)^m e_1!\,e_2!\dots e_k!\,a_{e_1 e_2\dots e_k}(\underline{x}) \mod N$$

wegen $f(\underline{x})\in N^{(m)}$ gilt also stets $a_{e_1 e_2\dots e_k}(\underline{x})\in N$, woraus sich wegen (10) sogleich ergibt $f(\underline{x})\in(N^{m+1},\ P)$. Es gilt also tatsächlich auch $N^{(m)}\subseteqq(N^{m+1},\ P)$ und damit (9).

Nun haben wir aber $N^{k(p-1)+1}\subseteqq P$, wegen (9) gilt also $N^{(k(p-1))}=P$, daher $N^{(k(p-1)+1)}=N^{(k(p-1))}$, also gilt $N^{(\infty)}=P$. Andererseits haben wir für das Polynom

$$g(\underline{x})=\prod_{i=1}^{k}(x_i^r-x_i)^{p-1}$$

sowohl

$$g(\underline{x})\in N^{k(p-1)}\subseteqq N^{(k(p-1)-1)}$$

als auch

$$\frac{\partial^{k(p-1)}}{\partial x_1^{p-1}\partial x_2^{p-1}\dots\partial x_k^{p-1}}\,g(\underline{x})\notin N$$

und damit $g(\mathfrak{x}) \notin N^{(k(p-1))}$, also $N^{(k(p-1)-1)} \supset N^{(k(p-1))}$, wir haben also $l(N) = k(p-1)$.

Nun sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, der Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen. Wir wollen für die Restpolynomideale $\{(n)\} \subseteq \mathfrak{g}[\mathfrak{x}] = R$ die Ideale $\{(n)\}^{(\infty)}$ berechnen. Da $\{(0)\} = (0)$ und $\{(1)\} = R$ ersichtlich D-Vollideale sind, können wir annehmen, daß $n > 1$ ist. Es sei

$$n = \prod_{\nu=1}^{t} \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$$

die Primfaktorzerlegung von n. Da für paarweise teilerfremde Ideale Produkt und Durchschnitt übereinstimmen, haben wir

$$(n) = \prod_{\nu=1}^{t} (\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}) = \bigcap_{\nu=1}^{t} (\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})$$

daraus folgt wegen $\{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{a}\} \cap \{\mathfrak{b}\}$

$$\{(n)\} = \bigcap_{\nu=1}^{t} \{(\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})\} \tag{11}$$

nach [1] und [2] daher für $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, \infty$

$$\{(n)\}^{(\sigma)} = \bigcap_{\nu=1}^{t} \{(\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})\}^{(\sigma)}, \tag{12}$$

wobei stets $(\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}) \subseteq \{(\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})\}^{(\sigma)}$, so daß die Glieder der rechten Seite von (12) paarweise teilerfremd sind. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\{(n)\}^{(\infty)} = \prod_{\nu=1}^{t} \{(\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})\}^{(\infty)}. \tag{13}$$

Wir können uns daher von jetzt ab auf den Fall $n = \mathfrak{p}^e$ ($\mathfrak{p}$ Primzahl, $e \geqq 1$) beschränken.

Zunächst betrachten wir den Fall $k = 1$, also den Polynomring $\mathfrak{g}[x]$. Wir verwenden folgenden Satz von STRAUS [3]:

Dann und nur dann nehmen die Ableitungen jeder Ordnung $t \geqq 0$ eines Polynomes $f(x)$ über den Körper der rationalen Zahlen für alle ganzen Zahlen wieder ganze Zahlen als Werte an, wenn gilt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{\prod_{p} p^{[\nu/p]}}{\nu!} r_\nu(x) \tag{14}$$

mit ganzen Koeffizienten c_ν und beliebigem n.

Die $r_\nu(x)$ sind dabei, wie in früheren Arbeiten, definiert durch

$$r_0(x) = 1 \qquad r_\nu(x) = x(x-1)\ldots(x-\nu+1) \qquad \text{für} \qquad \nu > 0. \tag{15}$$

Bezeichnen wir die Menge aller rationalzahligen Polynome mit der in diesem Satz betrachteten Eigenschaft mit $\mathfrak{G}$, so ist $g(x) \in \{(\mathfrak{p}^e)\}^{(\infty)}$ offensichtlich

gleichbedeutend mit den beiden folgenden Bedingungen:

$$g(x)\in\mathfrak{g}[x] \qquad \frac{g(x)}{p^e}\in\mathfrak{G}. \tag{16}$$

Wir haben also dann und nur dann $g(x)\in\{(p^e)\}^{(\infty)}$, wenn man schreiben kann

$$g(x)=\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu p^e \frac{\prod_p p^{[\nu/p]}}{\nu!}\, r_\nu(x)$$

mit ganzzahligen

$$a_\nu = c_\nu p^e \frac{\prod_p p^{[\nu/p]}}{\nu!}. \tag{17}$$

Jedes ganzzahlige a_ν der Gestalt (17) ist — wenn $\varepsilon(\nu)$ den Exponenten der in $\nu!$ enthaltenen Potenz von p bezeichnet und Potenzen mit negativem Exponenten 1 gesetzt werden — teilbar durch $p^{e+\left[\frac{\nu}{p}\right]-\varepsilon(\nu)}$, andererseits aber wird jede dadurch teilbare Zahl bei geeigneter Wahl eines ganzen c_ν in (17) als a_ν erhalten.

Wir können daher zunächst einmal sagen: $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ ist die Menge aller Polynome

$$u(x)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu p^{e+\left[\frac{\nu}{p}\right]-\varepsilon(\nu)} r_\nu(x) \tag{18}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten b_ν.

Nun ist aber bekanntlich

$$\varepsilon(\nu)=\left[\frac{\nu}{p}\right]+\left[\frac{\nu}{p^2}\right]+\left[\frac{\nu}{p^3}\right]+\cdots,$$

daher

$$\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right)=\left[\frac{1}{p}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right]+\left[\frac{1}{p^2}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right]+\left[\frac{1}{p^3}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right]+\cdots.$$

Ist $\nu=\sum_{i=0}^{m} a_i p^i$ die p-adische Zifferndarstellung von ν, so haben wir:

$$\left[\frac{1}{p^{r-1}}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right]=\left[\frac{1}{p^{r-1}}\sum_{i=1}^{m} a_i p^{i-1}\right]=\sum_{i=r}^{m} a_i p^{i-r}=\left[\frac{\nu}{p^r}\right]$$

daher gilt

$$\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right)=\left[\frac{\nu}{p^2}\right]+\left[\frac{\nu}{p^3}\right]+\cdots=\varepsilon(\nu)-\left[\frac{\nu}{p}\right].$$

Setzen wir das in (18) ein, erhalten wir:

$\{(p^e)\}^{(\infty)}$ ist die Menge aller mit ganzen Zahlen b_ν gebildeten Polynome:

$$u(x)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right)} r_\nu(x). \tag{19}$$

Dieses letzte Resultat ermöglicht es nun, eine Idealbasis für $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ anzugeben. Ist nämlich s die größte nichtnegative ganze Zahl, für welche

gilt $\varepsilon(sp)<e$, so haben wir, wie man ohne Mühe erkennt:

$$\{(p^e)\}^{(\infty)} = \left(p^e r_0(x),\ p^{e-\varepsilon(p)} r_{p^2}(x),\ p^{e-\varepsilon(2p)} r_{2p^2}(x) \dots p^{e-\varepsilon(sp)} r_{sp^2}(x),\ r_{(s+1)p^2}(x)\right).$$

Den Fall von mehreren Unbestimmten behandeln wir nun mit vollständiger Induktion nach der Anzahl k der Unbestimmten. Unsere Behauptung lautet:

Ist $R=\mathfrak{g}[x_1, x_2, \dots, x_k]$, *so ist* $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ *die Menge aller Polynome*

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_k} p^{e-\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) r_{i_2}(x_2) \dots r_{i_k}(x_k) \tag{20}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

BEWEIS. Für $k=1$ geht (20) über in (19), die Behauptung ist in diesem Fall daher richtig. Wir nehmen also an, sie sei für $k-1$ Unbestimmte schon bewiesen.

Es sei nun $u(\mathfrak{x}) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{x}_{k-1}=(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ und können dann schreiben:

$$u(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}_{k-1}, x_k) = \sum_{i_k=0}^{n_k} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) r_{i_k}(x_k). \tag{21}$$

Sämtliche partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von $u(\mathfrak{x})$ gehören zu $\{(p^e)\}$, daher gehören auch sämtliche partiellen Ableitungen von

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) r_{i_k}(x_k)$$

zu $\{(p^e)\}$, insbesondere also auch alle Ableitungen nach x_k. Es ist daher für beliebiges $\mu \geqq 0$ und für ein beliebiges $(k-1)$-Tupel $\mathfrak{k}$ von ganzen Zahlen stets

$$H_{\mu,\mathfrak{k}}(x_k) = \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{k}) r_{i_k}^{(\mu)}(x_k) \in \{(p^e)\}.$$

Daher gehört das Polynom $H_{0,\mathfrak{k}}(x_k)$ zu $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ von $\mathfrak{g}[x_k]$; durch Berücksichtigung von (19) mit x_k statt x erhalten wir — wenn wir beachten, daß die Darstellung eines ganzzahligen Polynomes $u(x)$ in der Form $u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i r_i(x)$ eindeutig ist —

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{k}) \equiv 0 \bmod p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}$$

und zwar gilt dies für jedes $\mathfrak{k}$, so daß wir also haben

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) \in \left\{\left(p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}\right)\right\}$$

und damit

$$g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) \in \left\{\left(p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)} \leqq \mathfrak{g}[\mathfrak{x}_{k-1}].$$

Nach Induktionsannahme haben wir daher

$$g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} p^{e - e\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right) - \sum_{\nu=1}^{k-1} e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) \dots r_{i_{k-1}}(x_{k-1}).$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (21) sogleich

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} p^{e - \sum_{\nu=1}^{k} e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) \dots r_{i_{k-1}}(x_{k-1}) r_{i_k}(x_k).$$

Die Polynome (20) enthalten also alle Polynome von $\{(p^e)\}^{(\infty)}$.

Umgekehrt gehört tatsächlich jedes Polynom (20) zu $\{(p^e)\}^{(\infty)}$: Denn $r_{i_\nu}(x_\nu) = p^{e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right) - e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_\nu}(x_\nu)$ gehört wegen (19) zum Ideal $\left\{\left(p^{e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)}$. Es gilt deshalb

$$r_{i_1}(x_1)\, r_{i_2}(x_2) \dots r_{i_k}(x_k) \in \left\{\left(p^{\sum_{\nu=1}^{k} e\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)},$$

also gilt für jedes Polynom der Gestalt (20) wirklich $u(\mathfrak{x}) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$.

Literatur

[1] Nöbauer, W.: Zur Theorie der Vollideale. Monatsh. Math. **64**, 176–183 (1960).
[2] Nöbauer, W.: Zur Theorie der Vollideale II. Monatsh. Math. **64**, 335–348 (1960).
[3] Straus, E. G.: On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 24–27 (1951).

Mathematisches Institut der Universität Wien

(Eingegangen am 8. April 1960)

BAUMSLAG, G.
Math. Zeitschr. 75, 22–28 (1961)

Wreath products and finitely presented groups

By
GILBERT BAUMSLAG*)

§1. The wreath product and its variations has become an increasingly valuable tool in the construction and investigation of both finite and infinite groups. In particular KRASNER and KALOUJNINE [5] have found that the sylow p-subgroup of the symmetric group of degree p^n is simply an "iterated" wreath product of n cyclic groups of order p, P. HALL [4] has utilised the "anti-symmetric" properties of wreath products in his investigations of infinite soluble groups, B. H. NEUMANN and HANNA NEUMANN [6] have constructed finitely generated soluble groups which are isomorphic to one of their proper factor groups, yielding a more complete negation of the so called Hopf problem originally solved by B. H. NEUMANN [7], and BAUMSLAG [1], [2], [3] has used variations of the wreath product to investigate properties of groups with roots.

The (ordinary) wreath product W of two groups A and B may be defined in the following way: Let A_b denote an isomorphic copy of A indexed by $b \in B$ — thus $a_b \in A_b$ corresponds to $a \in A$. Let K be the (restricted) direct product of the groups A_b:

$$K = \prod_{b \in B} A_b .$$

Then each element $b^* \in B$ induces an automorphism $\hat{b}^*$ of K by defining

$$(a_b)^{\hat{b}^*} = (a_{bb^*}) .$$

Furthermore the mapping

$$b^* \to \hat{b}^*$$

is an isomorphism between B and a group $\hat{B}$ of automorphisms of K. Consequently we can form the "splitting extension" W of K by B. Explicitly W is to consist of all formal pairs bk ($b \in B$, $k \in K$) with multiplication defined by

$$b_1 k_1 \cdot b_2 k_2 = b_1 b_2 k_1^{\hat{b}_2} k_2 \quad (b_1, b_2 \in B,\ k_1, k_2 \in K) .$$

We shall identify B and $\hat{B}$: thus $k_1^{b_2}$ coincides with the transform $b_2^{-1} k_1 b_2$ of k_1 by b_2. The group W constructed in this way is called the *wreath product of A by B*.

Suppose now that we call a group finitely presented if it can be defined in terms of a finite number of generators and a finite number of relations

*) This work was supported in part by National Science Foundation Grant G-9665.

in these generators. We ask when the wreath product of finitely presented groups is finitely presented. It is easy to see that the wreath product of two finitely generated groups is finitely generated. Thus the problem at hand is one involving the number of relations of a group. Such problems are sometimes deceptively difficult.

We prove in this note that if A and B are finitely presented groups, then the wreath product of A by B is finitely presented if and only if $A=1$ or B is finite. The proof makes use of the free product with an amalgamated subgroup.

Let us call a group "recursively presented" if it requires only a finite number of generators and a recursive set of defining relations in these generators for its definition. Then an immediate consequence of the above theorem is the existence of a recursive class of recursively presented groups, each group in the class being generated by 3 elements, such that there is no effective procedure to determine whether any group in the class is finitely presented.

§2. I shall prove the following theorem in this section.

THEOREM 1. *Let A and B be finitely presented groups. Then the wreath product W of A by B is a finitely presented group if and only if either $A=1$ or B is finite.*

The one part of the theorem is immediate.

The proof that W is infinitely related if $A\neq 1$ and B is infinite will be achieved by considering a suitable homomorphic image W° of W. This group W° will be constructed in accordance with the following constructive procedure.

Except for the supposition that B is infinite, suppose for the moment that A and B are arbitrary groups and that S is a non-empty subset of B. Let T be that subset of the cartesian product of B with itself defined by:

$$T=\{(s_1 b, s_2 b):\ s_1, s_2\in S,\ b\in B\}.$$

Clearly T is an equivalence relation on B; in particular, if $(u, v)\in T$ then $(v, u)\in T$. In addition if $(u, v)\in T$ then $(ub, vb)\in T$ for any $b\in B$.

Let A_b denote an isomorphic copy of A indexed by the element $b\in B$. We shall construct a group G containing the groups A_b and the group B as subgroups and generated by them. This group G depends on A, B and S and we will denote it by

$$G=\{A.B;\ S\}.$$

We define G by transfinite induction. First we well order the elements of B by means of a well-ordered index set $\mathscr{A}$ which has no last element — since B is infinite this is always possible —

$$1=b(0),\ b(1),\ldots,b(\alpha),\ldots \qquad (\alpha\in\mathscr{A});$$

then we define

$$G_1=A_{b(0)}.$$

Suppose now that G_α has been defined for every $\alpha<\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{A})$ in such a way that

(i) G_α contains the groups $A_{b(\alpha')}$ for every $\alpha'<\alpha$;

(ii) G_α is generated by the groups $A_{b(\alpha')}$ $(\alpha'<\alpha)$.

Then if β does not have a predecessor we put

$$G_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha.$$

If β does have a predecessor, say $\beta-1$, we proceed somewhat differently. We take $P_{\beta-1}$ to be the partners of $b(\beta-1)$ in T, which properly precede $b(\beta-1)$ in the well-order of B; more precisely,

$$P_{\beta-1} = \{b(\alpha):\ \alpha<\beta-1,\ (b(\alpha), b(\beta-1)) \in T\}.$$

We observe that the groups $A_{b(\alpha)}$ $(\alpha<\beta-1)$ are subgroups of $G_{\beta-1}$ and so we may define, without ambiguity, $H_{\beta-1}$ to be that subgroup of $G_{\beta-1}$ which is generated by the groups $A_{b(\alpha)}$ with $b(\alpha)\in P_{\beta-1}$:

$$H_{\beta-1} = gp\left(A_{b(\alpha)};\ b(\alpha)\in P_{\beta-1}\right).$$

We now form the direct product $J_{\beta-1}$ of $H_{\beta-1}$ and $A_{b(\beta-1)}$:

$$J_{\beta-1} = H_{\beta-1} \times A_{b(\beta-1)}.$$

Next we form the free product G_β of $G_{\beta-1}$ and $J_{\beta-1}$ amalgamating their common subgroup $H_{\beta-1}$:

$$G_\beta = \{G_{\beta-1} * J_{\beta-1};\ H_{\beta-1}\}.$$

Then it is clear that G_β satisfies the inductive assumptions (i) and (ii) and so we are entitled to complete the definition of the groups G_α for every $\alpha\in\mathscr{A}$. Finally we put

$$G = \{A.B;\ S\} = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} G_\alpha.$$

We observe that as $\mathscr{A}$ has no last element every element $\alpha\in\mathscr{A}$ has a successor $\alpha+1$, say, in $\mathscr{A}$. Thus G contains every group $A_{b(\alpha)}$ as a subgroup, since $G_{\alpha+1}$ contains $A_{b(\alpha)}$.

The following lemmas will be of use to us in the sequel. We assume the notation and conditions of the previous paragraphs.

LEMMA 1. *Let* $G=\{A.B;\ S\}$. *Then*

$$[A_b, A_c] = 1$$

if, and only if,

$$(b, c)\in T.$$

PROOF. Let us suppose firstly that $(b, c)\in T$. If $b=c$ the result is immediate. If $b\neq c$ we may suppose

$$b = b(\alpha), \qquad c = b(\beta)$$

and that

$$\alpha<\beta.$$

Then it follows immediately from the definition of $G_{\beta+1}$, which contains $A_{b(\alpha)}$ and $A_{b(\beta)}$, that

$$[A_{b(\alpha)}, A_{b(\beta)}] = 1$$

as required.

For the reverse part of the proof assume that

$$[A_b, A_c] = 1.$$

If $b = c$, then

$$(b; c) \in T$$

since T is an equivalence relation on B. If $b \neq c$ then, as before, we may assume

$$b = b(\alpha), \qquad c = b(\beta) \quad \text{and} \quad \alpha < \beta.$$

Then $G_{\beta+1}$ is defined as follows:

$$G_{\beta+1} = \{G_\beta * J_\beta; H_\beta\}.$$

Now

$$J_\beta = H_\beta \times A_{b(\beta)}$$

and since

$$(b(\alpha), b(\beta)) \notin T$$

it follows that $A_{b(\alpha)}$ intersects J_β trivially. Consequently, since $G_{\beta+1}$ is the free product with an amalgamated subgroup, we have

$$[A_{b(\alpha)}, A_{b(\beta)}] \neq 1$$

and this completes the proof of the lemma.

We show next that $G = \{A.B; S\}$ has a group of automorphisms $\hat{B}$ which is isomorphic to B.

LEMMA 2. *Let $G = \{A:B; S\}$ and let $c \in B$. Then the mapping*

$$a_b \to a_{bc} \qquad (b \in B)$$

can be extended to an automorphism $\hat{c}$, say, of G.

PROOF. If $g = \pi a_b$ is a product of elements a_b, then we define

$$g^{\hat{c}} = \pi a_{bc}.$$

We show first that $\hat{c}$ defines an endomorphism of G. To do this we have to show that the elements a_{bc} satisfy the same relations as the elements a_b. But this is an immediate consequence of Lemma 1, since by the construction of G, the only relations satisfied by the elements a_b, besides those relations which stem from the defining relations of A, are the relations

$$[a_b, a_{b'}] = 1 \qquad (b' \in B).$$

It is left only, therefore, to verify tnat the endomorphism $\hat{c}$ is one-to-one. This follows, once again, from the construction of G and Lemma 1.

Now it follows easily from Lemma 2 that the mapping

$$b \to \hat{b} \qquad (b \in B)$$

defines an isomorphism from B onto a group $\hat{B}$ of automorphisms of G. We identify B with $\hat{B}$ and form a splitting extension W° of G by B:

$$W^\circ = gp(G, B; b_1^{-1} a_b b_1 = a_{b b_1}) = \{A \circ B; S\}.$$

We shall call W° the *circle product of A by B via S*. The circle product is a generalization of the wreath product — it degenerates into the wreath product if T coincides with $B \times B$ and so if $S = B$, W° is simply the wreath product of A by B.

Once again we assume the notation developed thus far; in particular we maintain the assumption that B is infinite. The following lemma is critical in the proof of the theorem.

LEMMA 3. *Let $W^\circ = \{A \circ B; S\}$. If S is finite then there exists $c \in B$ such that*

$$[A_1, A_c] \neq 1.$$

PROOF. Let

$$S^* = \{s t^{-1}: s, t \in S\}.$$

Then S^* is finite since S is finite. Therefore we can choose $c \in B$ in such a way that $c \notin S^*$. Then we assert that

(1) $$(1, c) \notin T.$$

To see this we observe that the elements of T are all of the form

$$(s b, t b) \qquad (s, t \in S,\ b \in B).$$

Thus if

$$(1, c) = (s b, t b)$$

we have $s b = 1$ and hence $b = s^{-1}$. Therefore

$$c = t s^{-1} \in S^*$$

which contradicts the choice of c at the outset. So the assertion (1) is verified. Now we apply Lemma 1 to deduce that

$$[A_1, A_c] \neq 1$$

and this completes the proof of the lemma.

We come now to the proof of Theorem 1.

PROOF OF THEOREM 1. Suppose

$$A_1 = gp(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)};\ r_1 = 1,\ r_2 = 1, \ldots, r_i = 1)$$

and that

$$B = gp(b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)};\ s_1 = 1,\ s_2 = 1, \ldots, s_h = 1).$$

It is easy to see then that W, the wreath product of A by B, can be defined by

$$W = gp(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)}; R_1 \cup R_2),$$

where

(1) $$R_1 = \{r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_i = 1, s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots, s_k = 1\}$$

and

(2) $$R_2 = \{[b^{-1} a^{(n)} b, a^{(n)}] = 1^{1}), \ b \in B, \ n = 1, 2, \ldots, h\};$$

in order that the relations R_2 be written in terms of the given generators $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)}$ of W, we may suppose that the elements b appearing in the defining relations R_2 have already been so expressed.

Now by a well-known theorem of B. H. NEUMANN [8] if a finitely generated group is finitely related then it can be finitely defined in terms of any given finite set of generators. Thus in our case if W requires only a finite number of defining relations, then some finite subset R of $R_1 \cup R_2$ will suffice to define W. Suppose then that W actually coincides with

$$W^- = gp(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)}; R),$$

with R finite. In this event we may adjoin to the defining relations R of W^- the relations R_1. Since W and W^- coincide this means that

$$W^- = gp(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)}; R \cup R_1).$$

Consider now

$$(R \cup R_1) \cap R_2.$$

If this set is empty we put W° equal to the free product of A_1 and B:

$$W^\circ = A_1 * B;$$

if it is non-empty then it is a finite subset of R_2, say

$$\{[b_1^{-1} a^{n(1)} b_1, a^{n(1)}] = 1, \ldots, [b_m^{-1} a^{n(m)} b_1, a^{n(m)}] = 1\}.$$

Put

$$S = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

and form

$$W^\circ = \{A \circ B; S\}.$$

Since every relation satisfied in W^- is also satisfied in W° it follows that W° is a homomorphic image of W^-. By Lemma 3, there exists $c \in B$ such that A_1 and A_1^c, qua subgroups of W°, do not commute. It follows then that W^- and W cannot be the same group. For if this were the case, then A_1 and A_1^c, qua subgroups of W^- commute. This is not the case however since $[A_1, A_1^c] \neq 1$ in W°. This completes the proof of the theorem as this contradicts our assumption that $W = W^-$.

[1]) We adopt here the convention that $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$.

As a corollary of Theorem 1, we have the following unsolvability result, which is probably well known.

COROLLARY. *It is effectively undecidable whether any group in any recursive class of finitely generated recursively presented groups can be finitely presented.*

PROOF. Let Z be the infinite cyclic group and let $\mathscr{G}$ be the class of finitely presented groups (see RABIN [9]). Then the class of groups

$$\hat{\mathscr{G}} = \{G \operatorname{Wr} Z;\ G \in \mathscr{G}\}$$

where $G \operatorname{Wr} Z$ denotes the wreath product of G by Z, clearly constitutes a recursive class of finitely generated recursively presented groups. But by Theorem 1,

$$\hat{G} = G \operatorname{Wr} Z \in \hat{\mathscr{G}}$$

is finitely presented if, and only if, $G = 1$. Thus if one can decide effectively for $\hat{\mathscr{G}}$ whether any of its members is finitely presented, then one can decide effectively whether any finitely presented group is trivial. But by a theorem of RABIN [9] this is not possible and so the corollary follows.

We remark that this corollary can be strengthened by making use of the well-known techniques introduced by HIGMAN, NEUMANN, B. H. and HANNA NEUMANN [10]; thus we could even restrict our class of groups to groups involving at most 3 generators.

Reference

[1] BAUMSLAG, GILBERT: Some aspects of groups with unique roots. To appear in Acta Math. (Stockh.).

[2] BAUMSLAG, GILBERT: Wreath products and p-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **55**, 224–231 (1959).

[3] BAUMSLAG, GILBERT: Roots and wreath products. To appear in Proc. Cambridge Phil. Soc. **56**, 109–117 (1960).

[4] HALL, P.: Finiteness conditions for soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) **4**, 419–436 (1954).

[5] KALOUJNINE, L., and M. KRASNER: Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 208–230 (1950); **14**, 36–66, 69–82 (1951).

[6] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. **34**, 465–479 (1959).

[7] NEUMANN, B. H.: A two-generator group isomorphic to a proper factor group. J. London Math. Soc. **25**, 247–248 (1950).

[8] NEUMANN, B. H.: Some remarks on infinite groups. J. London Math. Soc. **12**, 120–127 (1937).

[9] RABIN, MICHAEL O.: Recursive unsolvability of group theoretic problems. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 396 (1956). – Ann. of Math. **67**, 172–194 (1958).

[10] HIGMAN, G., B. H. NEUMANN and H. NEUMANN: Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. **24**, 247–254 (1949).

Inst. math. Sciences, New York University, New York 3, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 13. April 1960)

CHARZYNSKI, Z.
Math. Zeitschr. 75, 29—35 (1961)

Bounds for analytic functions of two complex variables

By
ZYGMUNT CHARZYNSKI[1]

Introduction

In the course of considerations in the theory of functions of two complex variables, S. BERGMAN introduced a certain class of domains on whose boundary one can define very simply the maximum manifold, which is the so-called Bergman-Szilow boundary ([1], [6]). These domains are bounded by finitely many three-dimensional analytic hypersurfaces. The two-dimensional intersections of these surfaces form the so-called BERGMAN's distinguished boundary surface.

In a series of papers BERGMAN obtained the connections between the behavior of an analytic function on the distinguished boundary surface and the behavior in the interior of the domain ([2], [3]).

In another paper BERGMAN investigated the analogous problem with respect to the three-dimensional boundary hypersurfaces. In this direction he obtained, for a function of two complex variables, various bounds in the interior of the domain, depending on the behavior of the function on the three-dimensional part of the boundary where the function is considered as depending on one complex variable in the so-called laminas forming the hypersurface [4].

This note is a continuation of the investigation just mentioned. We follow a procedure connected with BERGMAN'S original work and define the domains in which the bounds hold. Notions and notations introduced by BERGMAN are used.

§ 0. Notions and Notations

1. We shall consider an arbitrary bounded domain $\mathfrak{M}$, lying in the four-dimensional space of two complex variables z_1, z_2. We assume that the boundary $\mathfrak{m}^3$ of this domain consists of finitely many uniformized analytic hypersurfaces

$$\mathfrak{i}_k^3 \qquad k = 1, \ldots, n; \tag{0}$$

every such analytic surface is given by parametric equalities of the form

$$z_1^* = h_{1k}(Z, \lambda), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z, \lambda), \qquad |Z| \leqq 1, \qquad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{00}$$

[1]) This work was supported by the National Science Foundation Grants 3661 and 10375 at Stanford University.

where the expressions on the right side of (00) are continuously differentiable functions of Z, λ, [4]. For a fixed k and λ the corresponding set of points (00) will be called a lamina of $\mathfrak{i}_k^3$ (see [5], p. 188). The set $\mathfrak{D}^2$ of points (00), corresponding to the values $|Z|=1$, contains the so-called distinguished boundary surface on which the maximum principle is realized for the functions regular in $\mathfrak{M}$ (see [3]). We shall assume that the functions (00) are periodical with respect to λ. We shall assume also, that for every $|Z_0|<1$, λ_0, and for arbitrarily small $\delta>0$ the set of points (00) which correspond to the values

$$|Z-Z_0|<\delta, \qquad |\lambda-\lambda_0|<\delta$$

of the parameters, contains all the points of $\mathfrak{m}^3$ lying sufficiently near the point

$$z_{10}=h_{1k}(Z_0,\lambda_0), \qquad z_{20}=h_{2k}(Z_0,\lambda_0).$$

Finally, we shall denote by $\mathfrak{P}_0$ the complement of $\mathfrak{M}$ with respect to the full space.

2. For every $0<R<1$, the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which consists of the points (00) corresponding to the values $|Z|<R$, will be denoted by $\mathfrak{i}_{kR}^3$.

3. The set of points of the four-dimensional space of the form

$$(000) \qquad z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

where the expressions of the right sides are holomorphic functions of ζ, we shall call an analytic surface.

The set of points which correspond to the values $|\zeta|=1$ will be called the boundary of this surface.

§ 1. Bounds on the Analytic Surfaces

Consider a domain $\mathfrak{M}$ and a part $\mathfrak{i}_k^3$ of the boundary of this domain described above. Let $f(z_1, z_2)$ be an arbitrary function analytic in the closure $\overline{\mathfrak{M}}$.

Assume that there is given a normal family Ψ of functions of one complex variable in the unit circle. Put

$$(1) \qquad M(R)=\sup_{\psi\in\Psi}\sup_{|Z|\leq R}|\psi(Z)|, \qquad 0<R<1.$$

Suppose that on the boundary part $\mathfrak{i}_k^3$, $f(z_1, z_2)$ satisfies the condition that for every lamina of this set

$$(2) \qquad f[h_{1k}(Z,\lambda), h_{2k}(Z,\lambda)]\in\Psi.$$

Next, for an R between 0 and 1, suppose there is an analytic surface $\mathfrak{B}$ defined by

$$(3) \qquad z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

which lies in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}_{kR}^3+\mathfrak{P}_0$, contains the points of $\mathfrak{M}$, and whose boundary lies completely in $\mathfrak{P}_0$.

Now we can obtain the following result.

LEMMA. *On the part of* $\mathfrak{B}$, *which lies in* $\mathfrak{M}$, *the function* $f(z_1, z_2)$ *satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R). \tag{4}$$

PROOF. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ under (3) and by D^* its boundary. Then the set of values of $f(z_1, z_2)$ on $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ is identical with the set of values of the composite function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in D. Now one very easily sees that the image of D^* under (3) lies completely in $\mathfrak{i}^3_{kR}$, that is,

$$g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*) \in \mathfrak{i}^3_{kR} \quad \text{for} \quad \zeta^* \in D^*. \tag{5}$$

Therefore, the composite analytic function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in $D + D^*$, that is, $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$, must satisfy the inequalities

$$|f(z_1, z_2)| = |f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))| \leqq \sup_{\zeta^* \in D^*} |f(g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*))| \leqq \sup_{z_1^*, z_2^* \in \mathfrak{i}^3_{kR}} |f(z_1^*, z_2^*)|. \tag{6}$$

On the other hand, according to the previous definitions for every point z_1^*, z_2^* of $\mathfrak{i}^3_{kR}$ we have the representation of the form (00) with $|Z| < R$. From (00), (2), and (1) we obtain that in $\mathfrak{i}^3_{kR}$

$$|f(z_1^*, z_2^*)| = |f[h_{1k}(Z, \lambda), h_{2k}(Z, \lambda)]| \leqq M(R) \tag{7}$$

holds. The relations (6) and (7) give the expected inequality (4).

§ 2. Associated Domains

We shall define for k from (0) and R between 0 and 1 a sequence of sets $\{\mathfrak{P}_m\}$ by induction as follows:

1. $\mathfrak{P}_1$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_1$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0$, and having its boundary in $\mathfrak{P}_0$.

2. $\mathfrak{P}_{m+1}$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m)$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_{m+1}$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1, \tag{8}$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ and having its boundary in $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$.

The sum of all the sets of $\{\mathfrak{P}_m\}$ will be denoted by $\mathfrak{P}_{kR}$ and called the associated domain corresponding to the part $\mathfrak{i}^3_k$ and to the number R. The sequence $\{\mathfrak{P}_m\}$ and the set $\mathfrak{P}_{kR}$, described above, have the following properties:

I. Every $\mathfrak{P}_m$ is either an empty or open set. Consider the first set of our sequence, say $\mathfrak{P}_m$, which does not satisfy this property, then all preceding sets $\mathfrak{P}_0, \ldots, \mathfrak{P}_{m-1}$ are either empty or open; $\mathfrak{P}_0$ is open. According to the definitions and assumptions given above, the sets $(\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0) + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}$

and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ are open also[2]). Now, suppose the set $\mathfrak{P}_m$ is not empty and consider an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of it. From the definition of $\mathfrak{P}_m$ follows immediately that there is an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}_m$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta), \qquad z_2=\hat{g}_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lying in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ having its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$. By a linear transformation of the parameter ζ one can assume that

$$\hat{z}_1=\hat{g}_1(0), \qquad \hat{z}_2=\hat{g}_2(0).$$

The set $\hat{\mathfrak{B}}_m$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*_m$ are closed sets lying in the open sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, respectively. Then there is a positive number d, so that for every point z'_1, z'_2 satisfying the condition

$$\sqrt{|z'_1-\hat{z}_1|^2+|z'_2-\hat{z}_2|^2}<d, \tag{9}$$

the analytic surface $\mathfrak{B}'_m$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta)+(z'_1-\hat{z}_1), \qquad z_2=\hat{g}_2(\zeta)+(z'_2-\hat{z}_2), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lies in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, has its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, and contains the point z'_1, z'_2, which corresponds to the value 0 of the parameter ζ. Thus an arbitrary point z'_1, z'_2 of the neighborhood (9) of $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ belongs to $\mathfrak{P}_m$ according to the conditions of induction. Since the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ was also arbitrarily chosen from $\mathfrak{P}_m$, then the set $\mathfrak{P}_m$ is open.

II. The set $\mathfrak{P}_{kR}$ cannot be extended by an operation analogous to that applied by the previous induction. This means that there are no points $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ in $\mathfrak{M}-\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$, for which there exists an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta), \qquad \hat{z}_2=\hat{g}_1(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$, having its boundary in $\mathfrak{P}_{kR}+\mathfrak{P}_0$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$.

In fact, suppose, contrariwise, that the point and surface described above exist. Then the closed sets $\hat{\mathfrak{B}}$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*$ lie, respectively, in the open sets $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ (see property I). Thus from the Heine-Borel theorem it follows that $\hat{\mathfrak{B}}$ and $\hat{\mathfrak{B}}^*$ must lie in finite sums of sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$, respectively. But in this case the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\hat{\mathfrak{B}}$ must belong to the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ in view of the inductive definition. This contradicts the assumption.

III. The set $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ is locally pseudo convex with respect to its exterior at every point z^0_1, z^0_2 of its boundary which lies in $\mathfrak{M}$. This means, that every analytic surface which passes through z^0_1, z^0_2 must possess in every neighborhood of z^0_1, z^0_2 points of the exterior or boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$ different from z^0_1, z^0_2.

[2]) See p. 2, § 0.1.

In fact, suppose, contrariwise, that there is a neighborhood of z_1^0, z_2^0 and a surface $\mathfrak{B}_0$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

which contains z_1^0, z_2^0 and, except at this point, lies completely in the set $\mathfrak{P}_{kR}$. We can assume obviously that

$$z_1^0 = g_{10}(0), \qquad z_2^0 = g_{20}(0).$$

The boundary of $\mathfrak{B}_0$ is a closed set lying in $\mathfrak{P}_{kR}$ and it has a positive distance from the boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$. Then we can take an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\mathfrak{M} - \overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ sufficiently near z_1^0, z_2^0 and form a new surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta) + (\hat{z}_1 - z_1^0), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta) + (\hat{z}_2 - z_2^0), \qquad |\zeta| \leqq 1.$$

Thus, one sees that the surface $\hat{\mathfrak{B}}$ lies in $\mathfrak{M} + \mathfrak{P}_{kR}$, contains the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ and its boundary is in $\mathfrak{P}_{kR}$. But this contradicts the previous property (see II).

Now we can obtain the following result:

THEOREM. *The function $f(z_1, z_2)$ satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R) \tag{10}$$

in the full set $\mathfrak{P}_{kR}$ and consequently also in its closure $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$.

PROOF. It is sufficient to show that (10) holds in every set of $\{\mathfrak{P}_m\}$. We proceed by induction:

1°. In $\mathfrak{P}_1$ the inequality (10) holds according to the lemma given in 1.

2°. Suppose that (10) holds in the sets $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ and consequently on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$. Consider the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ and a point z_1, z_2 of it. There exists for this point a surface $\mathfrak{B}_{m+1}$ described in condition 2 of the definition of $\mathfrak{P}_{m+1}$ given above. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot (\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m))$ under (8), and by D^* the boundary of D. We conclude, as before, for similar reasons that the image of D^* under (8) must lie completely on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ or in $\mathfrak{i}_{kR}^3$. Then we obtain from the preceding remark that the inequality (10) holds on $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot (\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m))$ and in particular at the point z_1, z_2. Since z_1, z_2 was an arbitrary point of $\mathfrak{P}_{m+1}$, our inequality holds in the full set $\mathfrak{P}_{m+1}$.

Induction finishes the proof.

§ 3. Remarks

1. If we know the bound U_k for $|f(z_1, z_2)|$ on the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which belongs to the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$, we can obtain the bound for $|f(z_1, z_2)|$ in $\mathfrak{P}_{kR}$ using the Cauchy formula for one variable. Namely, we have in this case

$$M(R) \leqq \frac{U_k}{1 - R}$$

and therefore

$$|f(z_1, z_2)| < \frac{U_k}{1 - R} \quad \text{for} \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{kR}.$$

In some cases this inequality can be more conveniently applied than an analogous inequality which follows from the known Bergman integral formula for functions of two complex variables (in terms of values on the distinguished boundary surface):

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{k,s \\ k \neq s}}^{1,\ldots,n} \iint_{\mathfrak{v}_{k,s}} \frac{f(\varphi_1(\lambda_k, \lambda_s), \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s))\ B_{k,s}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k)\, \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)}\, d\lambda_k\, d\lambda_s .$$

Here $\Phi_j(t_1, t_2, \lambda_j)$, and $B_{k,s}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ are certain functions which depend on the domain; $z_1 = \varphi_1(\lambda_k, \lambda_s)$, $z_2 = \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$, $\lambda_k, \lambda_s \in \mathfrak{v}_{k,s}$ are the parametric representations of the intersections of the analytic hypersurfaces i_k^3 and i_s^3; $j = 1, \ldots, n$, $k, s = 1, \ldots, n$, [2].

2. S. BERGMAN considered in his work some examples of normal families and gave the exact corresponding bounds ([4], p. 186–193). They can easily be obtained from our theorem by substituting the corresponding known bounds instead of $M(R)$.

We shall give here these bounds in the case of families of multivalent functions.

Suppose that the function $f(z_1, z_2)$, mentioned above, is multivalent in every lamina of i_k^3; this means more exactly, that the composite function $f(h_{1k}(Z, \lambda), h_{2k}(Z, \lambda))$ is a multivalent function of order p, which does not vanish except at the point 0. For this family the bound $M(R)$ is known ([7], [8], [9]). Thus we obtain for the mentioned function the following estimation

$$|f(z_1, z_2)| < A(p)\,(1 - R)^{-2p} \qquad \text{for} \qquad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{k,R},$$

where $A(p)$ is a universal function, independent from $f(z_1, z_2)$.

3. One sees that one can assume in these considerations, that the function $f(z_1, z_2)$ is regular in the interior of $\mathfrak{M}$ and on the boundary sets $(0, 0)$ which correspond only to the values of Z in the interior of the unit circle. On the distinguished boundary surface it may be that the function is not regular.

If we consider a point of the distinguished boundary

$$z_1^* = h_{1k}(Z^*, \lambda^*), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z^*, \lambda^*),$$

and approach this point from the set $\sum_{0<R<1} \mathfrak{P}_{k,R}$ along a curve L:

$$z_1 = z_1(t), \qquad z_2 = z_2(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \tag{11}$$

then we have on L, according to (10), the estimation

$$|f(z_1(t), z_2(t))| \leq M(R(t)),$$

where $R(t)$ denotes the upper bound of numbers $0 < R < 1$, for which $z_1(t)$, $z_2(t) \in \mathfrak{P}_{k,R}$. The inequality (11) can give some information about the behavior of $f(z_1, z_2)$ while approaching a point on the distinguished boundary surface.

4. One easily sees that these results can be extended to the case of functions of several complex variables, but not of one variable.

Bibliography

[1] Bergman, S.: Über die Abbildungen durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Jber. dtsch. Math. Ver. **39**, 24–27 (1930).

[2] Bergmann, S.: Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. I, II. Math. Z. **39**, 76–94, 605–608 (1934).

[3] Bergmann, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Comp. Mathematica **14**, 107–123 (1938).

[4] Bergmann, S.: Bounds for analytic functions in domains with a distinguished boundary surface. Math. Z. **63**, 173–194 (1955).

[5] Bergmann, S.: Über eine Abschätzung von meromorphen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher in Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche. Trav. Inst. Math. Tbilissi **1**, 187–204 (1937).

[6] Gelfand, J. M., D. A. Rajkow u. D. E. Szilow: Kommutative normierte Ringe. [Russisch.] Uspechi mat. Nauk **12**, 48–146 (1946).

[7] Biernacki, M.: Sur les fonctions multivalentes d'ordre p. C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 449–451 (1936).

[8] Cartwright, M. L.: Inequalities in the theory of functions. Math. Ann. **111**, 98–118 (1935).

[9] Robertson, M. S.: Multivalent functions of order p. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 282–285 (1938).

Mathematisches Institut der Universität Lodz (Polen)

(Eingegangen am 16. April 1960)

ROELCKE, W.
Math. Zeitschr. 75, 36–52 (1961)

Über diskontinuierliche Gruppen in lokal-kompakten Räumen*

Von

WALTER ROELCKE

Das Kernstück der vorliegenden Arbeit bildet die Konstruktion lokalendlicher, unter einer diskontinuierlichen Gruppe Γ invarianter Überdeckungen des zugrunde liegenden lokal-kompakten Raumes X (Satz 4). Als Korollar ergibt sich die Existenz bei Γ invarianter Zerlegungen der Eins auf X, die sich vorgegebenen Überdeckungen in gewisser Weise unterordnen. Anschließend wird die Parakompaktheit des Quotientenraumes X/Γ diskutiert (§ 3). Invariante Zerlegungen der Eins werden sodann als entscheidendes Hilfsmittel für die Konstruktion von vollständigen invarianten Riemannschen Maßbestimmungen auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen eingesetzt (Satz 7). Hierdurch wird die klassische Konstruktion von Fundamentalbereichen von Γ in Gestalt von Normalpolyedern mit den üblichen Eigenschaften ermöglicht (vgl. [1], Satz 5 bis 7). Satz 8 betrifft fixpunkthaltige stetig differenzierbare periodische Selbstabbildungen von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und Satz 9 gibt eine Bedingung dafür an, daß die Fixpunktmenge einer diskontinuierlichen Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit eine Nullmenge ist.

Wir stellen jetzt einige Bezeichnungen und Begriffe zusammen. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle einer Menge $A \subset X$ mit $\bar{A}$, den offenen Kern von A, d.h. die Menge der inneren Punkte von A, mit $\mathring{A}$ und den Rand von A mit $\mathrm{Rd}\, A$. X heißt *σ-kompakt* oder auch abzählbar im Unendlichen, wenn X die Vereinigung von abzählbar vielen Kompakta ist. — Eine Grupp Γ von Homöomorphismen von X heißt *diskontinuierlich* auf X, wenn die Folge $\alpha_k x$ $(k \geqq 1)$ für jede Wahl eines Punktes $x \in X$ und einer Folge α_k $(k \geqq 1)$ von verschiedenen Elementen aus Γ keinen Häufungspunkt in X besitzt. Die Identität von Γ bezeichnen wir mit ι. — Für beliebige Teilmengen A, B von X und $\Lambda \subset \Gamma$ setzen wir

$$A - B := \{x;\ x \in A,\ x \notin B\}^{1}),$$

$$\Lambda A := \{\alpha x;\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A\}.$$

*) Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen identisch mit § 1 meiner von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster angenommenen Habilitationsschrift „Automorphe Funktionen und Spektraltheorie".

[1]) Allgemein bedeute $P := Q$ oder $Q =: P$, daß P durch Q definiert wird.

§ 1. Eigentliche Diskontinuierlichkeit und einfache Folgerungen

Eine Gruppe Γ von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X heißt *eigentlich diskontinuierlich* auf X, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ Umgebungen U bzw. V besitzen, so daß die Relation $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ gilt. Zum Beispiel ist jede diskontinuierliche Gruppe von Isometrien eines metrischen Raumes eigentlich diskontinuierlich. — Aus der eigentlichen Diskontinuierlichkeit folgt offenbar die Diskontinuierlichkeit. Eine unmittelbare Folgerung aus der eigentlichen Diskontinuierlichkeit ist ferner: Sind A, B Kompakta aus X, so gilt $A \cap \alpha B \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$. Für lokal-kompaktes X ist diese Aussage offenbar gleichwertig mit der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ.

Eine Verschärfung des Begriffes der eigentlichen Diskontinuierlichkeit wäre die Forderung: Es gibt eine Überdeckung von X durch offene Mengen, derart daß für je zwei dieser Mengen U, V die Relation $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ zutrifft. Diese Forderung könnte zur Abschwächung der Voraussetzung der lokalen Kompaktheit in Satz 4 herangezogen werden.

Wir übernehmen aus [1], S. 336 das folgende

LEMMA. *Ist Γ eigentlich diskontinuierlich, so gibt es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x, $V \subset U$, so daß die folgenden drei Aussagen, in denen α jeweils dasselbe Element aus Γ bezeichnet, gleichwertig sind:*

$$\text{a)}\quad x = \alpha x; \qquad \text{b)}\quad V = \alpha V; \qquad \text{c)}\quad V \cap \alpha V \neq \emptyset.$$

Aus diesem Lemma folgt

SATZ 1. *Es sei X ein topologischer Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Für $\alpha \in \Gamma$ bezeichne A_α die Menge der Fixpunkte von α in X. Dann besitzt jedes $x \in X$ eine Umgebung U, so daß die Relation $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ zutrifft.*

BEWEIS. Zu vorgegebenem x gibt es dem Lemma zufolge eine Umgebung U von x, so daß für jedes $\alpha \in \Gamma$ die beiden Aussagen $U \cap \alpha U \neq \emptyset$ und $x = \alpha x$ äquivalent sind. Aus einer Relation $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ mit einem $\alpha \in \Gamma$ folgt dann

$$U \cap \alpha U \supset (U \cap A_\alpha) \cap \alpha (U \cap A_\alpha) = U \cap A_\alpha \neq \emptyset,$$

und auf Grund der Auswahl von U folgt $\alpha x = x$. Wegen der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ gibt es hier für α nur endlich viele Möglichkeiten. Die Umgebung U ist also schon von der gewünschten Art. Satz 1 wird im Beweis von Satz 9 benutzt werden.

Der durch Identifizieren nach Γ äquivalenter Punkte entstehende Quotientenraum X/Γ ist bei eigentlich diskontinuierlichem Γ offenbar Hausdorffsch. Hiervon gilt die folgende schwache Umkehrung.

SATZ 2. *Es sei X ein lokal-zusammenhängender, lokal-kompakter Hausdorffscher Raum, Γ sei eine diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X, und X/Γ sei Hausdorffsch. Dann ist Γ eigentlich diskontinuierlich.*

BEWEIS. Zu beliebig vorgegebenen x, $y \in X$ existiert offenbar eine kompakte Umgebung U von x, deren Rand keinen mit y äquivalenten Punkt enthält. Bezeichnet π die natürliche stetige Abbildung von X auf X/Γ, so ist $\pi y \notin \pi \operatorname{Rd} U$, und da $\pi \operatorname{Rd} U$ kompakt *und* X/Γ Hausdorffsch ist, ist

$$W' := X/\Gamma - \pi \operatorname{Rd} U$$

eine Umgebung von πy in X/Γ. Dann ist $W := \pi^{-1} W'$ eine Umgebung von y mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Rd} U \cap \Gamma' W = \emptyset. \tag{1}$$

Es sei nun V eine feste in W enthaltene zusammenhängende Umgebung von y. Wenn dann $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ für ein $\alpha \in \Gamma'$ gilt, liefert der Zusammenhang von V und (1) die Relation $\alpha V \subset U$. Wegen der Kompaktheit von U und der Diskontinuierlichkeit von Γ' gibt es hier für α nur endlich viele Möglichkeiten. Hiermit folgt die Behauptung.

In Satz 2 kann übrigens auf den lokalen Zusammenhang von X nicht verzichtet werden, wie ein Beispiel von A. DOLD zeigt. — Wir beschließen den Paragraphen mit einer Aussage über den lokalen Zusammenhang.

SATZ 3. *Es sei X ein topologischer Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Dann gilt: X ist dann und nur dann lokal-zusammenhängend, wenn X/Γ lokal-zusammenhängend ist.*

BEWEIS. 1. X sei lokal-zusammenhängend. $a' \in X/\Gamma$ und eine Umgebung U' von a' seien vorgegeben. Wir müssen die Existenz einer zusammenhängenden Umgebung V' von a', $V' \subset U'$, zeigen. Wir wählen dazu $a \in X$, so daß $\pi a = a'$, und eine Umgebung U von a, so daß $\pi U \subset U'$. U enthält eine zusammenhängende Umgebung V von a. Dann kann $V' = \pi V$ gewählt werden.

2. X/Γ sei lokal-zusammenhängend. $a \in X$ und eine Umgebung U von a seien vorgegeben. Zum Nachweis einer zusammenhängenden Umgebung V von a, $V \subset U$, sei W eine Umgebung von a, so daß $W \subset U$ und für jedes $\alpha \subset \Gamma'$ die drei folgenden Aussagen äquivalent sind (s. Lemma):

$$W \cap \alpha W \neq \emptyset, \qquad W = \alpha W, \qquad a = \alpha a.$$

W kann und soll hier offen gewählt werden. πW enthält dann eine zusammenhängende offene Umgebung V' von πa. Wir zeigen, daß dann

$$V := W \cap \pi^{-1} V'$$

gewählt werden kann. Jedenfalls ist V eine Umgebung von a, und es gilt $V \subset U$. Ferner ist V offen und

$$\pi V = V'. \tag{2}$$

Angenommen V ist nicht zusammenhängend. Es gibt dann eine Zerlegung von V in zwei nichtleere offene Teilmengen A, B. Es sei etwa $a \in A$. Der endliche Durchschnitt

$$A_0 := \bigcap_{\substack{\alpha \subset \Gamma' \\ \alpha a \in B}} \alpha A$$

ist dann eine offene Teilmenge von V, und es ist $a \subset A_0$. Ebenso wie A ist auch A_0 im Relativraum V abgeschlossen. Daher ist

$$B_0 := V - A_0 \tag{3}$$

offen. Wegen $B \subset B_0$ ist $B_0 \neq \emptyset$. Also ist V' [vgl. (2)] die Vereinigung der beiden nichtleeren offenen Mengen πA_0, πB_0. Wenn wir nun noch

$$\pi A_0 \cap \pi B_0 = \emptyset \tag{4}$$

zeigen, haben wir den gewünschten Widerspruch, nämlich zum Zusammenhang von V'. Angenommen (4) ist falsch. Dann gibt es ein $\alpha \subset \Gamma$, so daß

$$\alpha A_0 \cap B_0 \neq \emptyset. \tag{5}$$

Dann ist erst recht $\alpha W \cap W \neq \emptyset$, und auf Grund der Auswahl von W folgt $\alpha a = a$. Für diese α ist aber $\alpha A_0 = A_0$. (5) liefert also $A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$ im Widerspruch zu (3). Damit ist (4) bewiesen und zugleich der Beweis des Satzes beendet.

§ 2. Konstruktion invarianter Zerlegungen der Eins

Eine *Überdeckung* von X ist eine Familie $U = \{U_i \mid i \in \mathfrak{I}\}$ von Teilmengen U_i von X, so daß $X = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} U_i$. Bei der Abbildung $U: i \to U_i$ dürfen verschiedene Elemente i der Indexmenge $\mathfrak{I}$ dasselbe Bild U_i haben. Die Überdeckung U heißt *offen*, wenn die Mengen U_i offen sind, *abzählbar*, wenn $\mathfrak{I}$ abzählbar ist, und *lokal-endlich*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung W besitzt, so daß $W \cap U_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in \mathfrak{I}$ gilt. U heißt *vom endlichen Typ*, wenn für jedes $i \in \mathfrak{I}$ die Relation $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ nur für endlich viele $j \in \mathfrak{I}$ gilt. — Eine offene Überdeckung $V = \{V_j \mid j \in \mathfrak{J}\}$ heißt eine *Verfeinerung* (bzw. *Quasischrumpfung*) einer offenen Überdeckung U, wenn es zu jedem $j \in \mathfrak{J}$ ein $i \in \mathfrak{I}$ gibt, so daß $V_j \subset U_i$ (bzw. $\overline{V}_j \subset U_i$). V heißt eine *Schrumpfung* von U, wenn $\mathfrak{J} = \mathfrak{I}$ ist und $\overline{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in \mathfrak{I}$ gilt.

Der Raum X heißt *parakompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt. Damit gleichwertig ist, daß jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Quasischrumpfung besitzt.

SATZ 4. *Es sei X ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Der Quotientenraum X/Γ sei parakompakt. Dann gilt*

1. Zu jeder offenen Überdeckung $W = \{W_i \mid i \in \mathfrak{I}\}$ von X gibt es eine Familie $U = \{U_m \mid m \in \mathfrak{M}\}$ von Teilmengen von X, so daß gilt

a) U_m ist offen, $\overline{U}_m$ kompakt;

b) zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ gibt es ein $i \in \mathfrak{I}$, so daß $\overline{U}_m \subset W_i$;

c) $A := \{\alpha U_m \mid (\alpha, m) \subset \Gamma \times \mathfrak{M}\}$ ist eine offene Überdeckung von X vom endlichen Typ;

d) bezeichnet π die natürliche Abbildung von X auf X/Γ, so ist πU eine offene Überdeckung von X/Γ vom endlichen Typ;

e) falls X σ-kompakt ist, können U und A abzählbar gewählt werden.

II. Jede Überdeckung A von X vom endlichen Typ, die sich von einer Familie U mit den obigen Eigenschaften a), b) auf die in c) beschriebene Weise herleitet, besitzt eine Schrumpfung B derselben Art, d.h. es gibt eine Familie $V=\{V_m | m\in\mathfrak{M}\}$ von Teilmengen von X ($\mathfrak{M}$ Indexmenge von U), so daß gilt

a') V_m offen, $\overline{V}_m$ kompakt;

b') $\overline{V}_m < U_m$;

c') $B:=\{\alpha V_m | (\alpha, m)\in\Gamma\times\mathfrak{M}\}$ ist eine Überdeckung von X.

BEMERKUNG. Die Überdeckungen A, B sind bei Γ invariant: Ausübung einer Transformation $\beta\in\Gamma$ auf A, B kommt auf eine Permutation der Indexmenge $\Gamma\times\mathfrak{M}$ hinaus.

BEWEIS. Zu I. Zu jedem $i\in\mathfrak{J}$ und jedem $x\in W_i$ gibt es eine offene Umgebung $G_i(x)$, so daß $\overline{G_i(x)} < W_i$ und $\overline{G_i(x)}$ kompakt ist.

$$G:=\{G_i(x) | (i, x)\in\mathfrak{J}\times X\}$$

ist dann eine Quasischrumpfung von W. Bezeichnet π die natürliche Abbildung von X auf X/Γ, so ist πG eine offene Überdeckung von X/Γ. Da X/Γ parakompakt und lokal-kompakt ist, besitzt πG eine Quasischrumpfung

$$U'=\{U'_m | m\in\mathfrak{M}\}$$

vom endlichen Typ, und falls X σ-kompakt ist, kann $\mathfrak{M}$ abzählbar gewählt werden (N. BOURBAKI [2], S. 109, Prop. 20). Zu jedem $m\in\mathfrak{M}$ gibt es also ein Paar (i_m, x_m) aus $\mathfrak{J}\times X$, so daß

$$U'_m < \pi G_{i_m}(x_m). \tag{6}$$

Für $E < X/\Gamma$ sei allgemein

$$\pi^{-1}E := \{x; x\in X, \pi x\in E\}.$$

Wir zeigen dann, daß die Familie

$$U:=\{U_m | U_m := \pi^{-1}U'_m \cap G_{i_m}(x_m), m\in\mathfrak{M}\} \tag{7}$$

die im Satz behaupteten Eigenschaften hat.

a) U_m ist offenbar offen. $\overline{U}_m$ ist kompakt, da die $\overline{G_i(x)}$ kompakt sind.

b) Nach Konstruktion ist $\overline{U}_m < \overline{G_{i_m}(x_m)} < W_{i_m}$.

c) Die Mengen αU_m sind offen, da die Mengen U_m offen sind. — Zum Nachweis, daß A eine Überdeckung von X ist, genügt es wegen der Invarianz von A zu zeigen

$$\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \pi U_m = X/\Gamma.$$

Nach (7) und (6) ist aber $\pi U_m = U'_m$, und U' ist eine Überdeckung von X/Γ. — Zum Nachweis, daß A vom endlichen Typ ist, sei (α, m) aus $\Gamma \times \mathfrak{M}$ vorgegeben. Aus einer Relation

$$\alpha U_m \cap \beta U_p \neq \emptyset \quad \text{mit} \quad (\beta, p) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$$

folgt durch Anwendung von π, daß $U'_m \cap U'_p \neq \emptyset$ ist. Da U' vom endlichen Typ ist, gibt es also für p nur endlich viele Möglichkeiten. Da $\overline{U}_m$, $\overline{U}_p$ kompakt sind und Γ eigentlich diskontinuierlich ist, folgt daher, daß es auch für β nur endlich viele Möglichkeiten gibt.

d) folgt aus c).

e) Falls X σ-kompakt ist, ist Γ abzählbar, und $\mathfrak{M}$ konnte abzählbar gewählt werden.

Zu II. Es sei A eine Überdeckung von X der unter II. gennanten Art. πU ist dann eine offene Überdeckung von X/Γ vom endlichen Typ. Da X/Γ als parakompakter Raum normal ist (s. z.B. J. O. KELLEY [3], S. 159), besitzt πU also eine Schrumpfung V'. Wir wählen dann zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ und $x \in U_m$ eine offene Umgebung $H_m(x)$ von x, so daß $\overline{H_m(x)} < U_m$. Dann gilt

$$\bigcup_{x \in U_m} \pi H_m(x) = \pi U_m > \overline{V}'_m .$$

Da $\overline{V}'_m$ kompakt ist, genügen hier endlich viele der Mengen $\pi H_m(x)$ zur Überdeckung von V'_m, etwa die Mengen $\pi H_m(x_j)$ $(1 \leqq j \leqq k_m)$. Wir setzen dann

$$V_m := \bigcup_{1 \leqq j \leqq k_m} H_m(x_j) .$$

Die Familie $V := \{V_m \mid m \in \mathfrak{M}\}$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. Denn a'), b') sind klar, und c') gilt wegen $\pi V_m > V'_m$ $(m \in \mathfrak{M})$ und da V' eine Überdeckung von X/Γ ist. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Durch eine einfache Variante des Beweises läßt sich übrigens über die Aussagen des Satzes hinaus erreichen

$$U_m = \alpha U_m \quad \text{und} \quad V_m = \alpha V_m \quad \text{falls} \quad U_m \cap \alpha U_m \neq \emptyset \qquad (m \in \mathfrak{M},\ \alpha \in \Gamma) .$$

Das wird jedoch im folgenden nicht benötigt.

Ist h eine auf X definierte Funktion (Abbildung) und α eine topologische Selbstabbildung von X, so bezeichne allgemein $h^\alpha = h \circ \alpha$ die durch $h^\alpha(x) := h(\alpha x)$ $(x \in X)$ definierte Funktion. Wir beweisen dann das folgende Korollar von Satz 4.

KOROLLAR. *Zu jedem Paar von Überdeckungen A, B der in Satz 4 genannten Art gibt es eine Familie $\{f_m \mid m \in \mathfrak{M}\}$ von reellen, nicht-negativen stetigen Funktionen f_m auf X, so daß für alle $m \in \mathfrak{M}$ gilt*

$$f_m(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in V_m, \qquad f_m(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in X - U_m ,$$

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} f_m^\alpha = 1 \quad \textit{(bei Γ invariante Zerlegung der Eins).}$$

BEWEIS. Auf Grund des Lemmas von URYSOHN gibt es zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ eine stetige reelle Funktion $g_m \geqq 0$ auf X, derart, daß g_m auf V_m positiv ist und auf $X - U_m$ verschwindet. Die Funktion

$$g := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} g_m^\alpha$$

ist dann wohl definiert, stetig, positiv und invariant bei Γ. Die Funktionen

$$f_m := \frac{g_m}{g} \qquad (m \in \mathfrak{M})$$

haben dann die gewünschten Eigenschaften.

Es kommen jetzt noch einige Anwendungen von Satz 4 und seinem Korollar zur Sprache. Es sei X speziell eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k $(0 \leqq k \leqq \infty)$ und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von topologischen Selbstabbildungen der Klasse C^k von X, so daß X/Γ parakompakt ist. Wählt man dann in Satz 4 für W eine Überdeckung von X durch offene Koordinatenumgebungen W_i (Atlas), so ist mit W_i auch αW_i eine zulässige Koordinatenumgebung auf X. Daher liegen dann die sämtlichen Mengen αU_m einer Überdeckung A der im Satz genannten Art in Koordinatenumgebungen. Wählt man nun im Beweise des Korollars die Funktionen g_m aus $C^k(X)$, der Klasse der k-mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf X, so erhält man eine im Sinne des Korollars zu A, B gehörige invariante Zerlegung der Eins mit Summanden f_m^α aus $C^k(X)$. — Ist h eine komplexwertige invariante Funktion auf der Mannigfaltigkeit X, also $h^\alpha = h$ für $\alpha \in \Gamma$, so liefert diese invariante Zerlegung der Eins eine Darstellung von h als bei Γ invariante Summe, deren Summanden hf_m^α dieselben Stetigkeitseigenschaften wie h besitzen. Ähnliches gilt für Funktionenvektoren, Tensoren, Differentialsymbole und andere Objekte an Stelle von h mit einem bestimmten Transformationsverhalten bei Γ [vgl. [4], (13) ff., wo eine Vorstufe zur invarianten Zerlegung der Eins benutzt wurde]. Umgekehrt kann die invariante Zerlegung der Eins zur Konstruktion von Funktionen (Tensoren usw.) mit vorgeschriebenen Transformationseigenschaften dienen (vgl. den Beweis von Satz 7). Schließlich kann man mit Hilfe invarianter Zerlegungen der Eins beweisen — und das ist sicherlich eine ihrer wichtigsten Anwendungen — daß in gewissen Integralen über Fundamentalbereiche von Γ partiell integriert werden kann, ohne daß dabei Randbeiträge auftreten. Diese Anwendung wird an anderer Stelle im Zusammenhang mit Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen ausführlich dargestellt werden.

§ 3. Die Parakompaktheit von X und von X/Γ

SATZ 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist X parakompakt.*

BEWEIS. Es sei $W = \{W_i | i \in \mathfrak{J}\}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Gemäß Satz 4, c) existiert eine offene Überdeckung $A = \{A_j | j \in \mathfrak{J}\}$ von X vom endlichen Typ, so daß die $\bar{A}_j$ kompakt sind. Zu jedem $j \in \mathfrak{J}$ existiert

ein endliches Indexsystem $\mathfrak{J}_j \subset \mathfrak{J}$, so daß

$$A_j < \bigcup_{i \in \mathfrak{J}_j} W_i .$$

Wir zeigen jetzt, daß die Mengenfamilie

$$V := \{A_j \cap W_i \mid j \in \mathfrak{J},\ i \in \mathfrak{J}_j\}$$

eine Verfeinerung von W vom endlichen Typ ist. Die Mengen der Familie V sind offen. Sie überdecken X, denn nach Definition von $\mathfrak{J}_j$ ist

$$A_j = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}_j} (A_j \cap W_i),$$

und die A_j überdecken X. V ist offenbar eine Verfeinerung von W. Zum Nachweis, daß V vom endlichen Typ ist, seien $j_0 \in \mathfrak{J}$ und $i_0 \in \mathfrak{J}_{j_0}$ vorgegeben. Ist dann die Relation

$$(A_j \cap W_i) \cap (A_{j_0} \cap W_{i_0}) \neq \emptyset$$

mit gewissen $j \in \mathfrak{J}$ und $i \in \mathfrak{J}_j$ erfüllt, dann gibt es für j nur endlich viele Möglichkeiten, weil A vom endlichen Typ ist. Da ferner jede Menge $\mathfrak{J}_j$ endlich ist, gibt es also nur endlich viele Paare (j, i), so daß die obige Relation erfüllt ist, d.h. V ist vom endlichen Typ. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die genaue Antwort auf die Frage, ob X/Γ parakompakt ist, falls X parakompakt ist, kenne ich nicht. Es wird nur gezeigt

Satz 6. *Es sei X ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum, Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Dann ist jede der folgenden sechs zusätzlichen Voraussetzungen hinreichend für die Parakompaktheit von X/Γ.*

a) X ist zusammenhängend,

b) X ist σ-kompakt,

c) Γ ist abzählbar,

d) X ist lokal-zusammenhängend,

e) X ist ein metrischer Raum und Γ eine Gruppe von Isometrien von X

f) X und Γ sind folgendermaßen gebildet. Es sei G eine lokal-kompakte topologische Gruppe, K eine kompakte und D eine diskrete Untergruppe von G; X sei der mit der Quotiententopologie ausgestattete homogene Raum $X = G/K$ der Linksrestklassen gK $(g \in G)$. Wendet man die Elemente $d \in D$ auf diese Restklassen im Sinne der Linksmultiplikation an, so liefern die Abbildungen

$$\gamma_d\colon gK \to (dg)K \tag{8}$$

eine Darstellung von D als eigentlich diskontinuierliche Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von X. Γ sei mit dieser Darstellung identisch.

Beweis. Wegen der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ ist X/Γ zunächst Hausdorffsch; ferner lokal-kompakt. Da c) aus b) und b) wegen der Parakompaktheit von X aus a) folgt (vgl. [2], S. 107, Theorem 5), genügt es, die Fälle c) bis f) zu betrachten.

Zu c). Nach [2], loc.cit. ist X die topologische Summe einer Menge $\{X_i;\ i\in\mathfrak{I}\}$ von σ-kompakten offenen Teilmengen X_i. Dann ist auch jede Menge $Y_i:=\Gamma X_i$ $(i\in\mathfrak{I})$ σ-kompakt. Da ferner jedes Kompaktum C von Y_i nur mit endlich vielen X_j einen nichtleeren Durchschnitt hat, hat jedes Y_i nur mit abzählbar vielen X_j einen nichtleeren Durchschnitt. Also hat jedes Y_i auch nur mit abzählbar vielen Y_j $(j\in\mathfrak{I})$ einen nichtleeren Durchschnitt. Wir erklären jetzt für $i\in\mathfrak{I}$ und alle natürlichen Zahlen n induktiv

$$Z_{i1}:=Y_i,\qquad Z_{in}:=\bigcup_{Y_j\cap Z_{in-1}\neq\emptyset} Y_j\qquad (n\geqq 2).$$

Dann ist

$$Z_i:=\bigcup_{n\geqq 1} Z_{in}$$

offen, und die Relation $Z_i\cap Z_j\neq\emptyset$ $(i,j\in\mathfrak{I})$ hat $Z_i=Z_j$ zur Folge. Da jedes Z_{in} die Vereinigung von nur abzählbar vielen Y_j ist (vollständige Induktion nach n), ist Z_i σ-kompakt. Ferner ist $Z_i=\Gamma Z_i$. Also ist X die topologische Summe der Verschiedenen unter den Z_i, und durch Anwendung der natürlichen Abbildung π von X auf X/Γ erhält man eine Darstellung von X/Γ als topologische Summe von σ-kompakten Teilmengen, womit die Parakompaktheit von X/Γ bewiesen ist.

Im Falle d), daß X lokal-zusammenhängend ist, sind die zusammenhängenden Komponenten von X zugleich abgeschlossen und offen und wegen der Parakompaktheit von X also parakompakt. Wegen [2], loc.cit sind sie also σ-kompakt. Γ permutiert sie. Es gibt daher eine Familie $\{K_i\,|\,i\in\mathfrak{I}\}$ von zusammenhängenden Komponenten von X, so daß

$$X=\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}\Gamma K_i\qquad\text{und}\qquad K_i\cap\Gamma K_j=\emptyset\qquad\text{für}\qquad i\neq j\quad (i,j\in\mathfrak{I}).$$

Die Bilder $\pi K_i\subset X/\Gamma$ $(i\in\mathfrak{I})$ sind dann offen, paarweise punktfremd, und ihre topologische Summe ist gleich X/Γ. Da die πK_i auch σ-kompakt sind, folgt nun die Parakompaktheit von X/Γ aus [2], loc.cit.

Im Falle e) sei zunächst daran erinnert, daß jeder metrische Raum parakompakt ist (s. z.B. [3], S. 160) und daß jede diskontinuierliche Gruppe von Isometrien eines metrischen Raumes eigentlich diskontinuierlich ist. Es bezeichne nun $|x,y|$ den Abstand von $x,\ y\in X$. Wegen der Diskontinuierlichkeit von Γ ist dann X/Γ mit der Abstandsdefinition

$$|\pi x,\pi y|:=\inf\{|x,\alpha y|;\ \alpha\in\Gamma\}\qquad (x,y\in X)$$

selbst ein metrischer Raum und somit parakompakt.

Zu f). Wir schließen nach dem Vorbild von [3], S. 172. Es sei M eine kompakte Umgebung des Einselementes von G, welche K enthält, und es sei $M=M^{-1}$. Dann stellt

$$H:=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M^\nu$$

eine offene und daher zugleich abgeschlossene σ-kompakte Untergruppe von G dar, die K enthält. D permutiert die Linksrestklassen von G nach H.

Daher gibt es eine Zerlegung von G in der Gestalt

$$G = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} D g_i H; \tag{9}$$

dabei ist $\mathfrak{J}$ eine Indexmenge, $g_i \in G$ und

$$D g_i H \cap D g_j H = \emptyset \quad \text{für} \quad i, j \in \mathfrak{J}, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Es bezeichne nun $\varphi\colon G \to X$ die kanonische Abbildung von G auf $X = G/K$. Dann folgt aus (10) und (9)

$$X = \bigcup_{d \in D} \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \varphi(d g_i H).$$

Offenbar ist

$$\varphi(d g_i H) = \gamma_d \varphi(g_i H)$$

mit γ_d aus (8). Damit haben wir

$$X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Big(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \varphi(g_i H) \Big).$$

Daraus folgt

$$X/\Gamma = \pi X = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \pi \varphi(g_i H). \tag{11}$$

Wegen (10) handelt es sich hier um eine Zerlegung von X/Γ. Wegen der Offenheit und der σ-Kompaktheit von H und wegen der Offenheit und der Stetigkeit der Abbildungen π, φ sind die Mengen $\pi\varphi(g_i H)$ offen und σ-kompakt, und wir haben in (11) eine Darstellung von X/Γ als topologische Summe von σ-kompakten Teilräumen. Nach [2], loc. cit. ist damit die Parakompaktheit von X/Γ bewiesen. Insbesondere haben wir bewiesen, daß schon $X = G/K$ unter den angegebenen Voraussetzungen über G und K parakompakt ist. — Satz 6 ist nun vollständig bewiesen.

§ 4. Vollständige invariante Maßbestimmungen auf Mannigfaltigkeiten

Wir benutzen jetzt Satz 4 zur Konstruktion einer invarianten definiten Riemannschen Maßbestimmung (Maßtensor G) auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X, so daß (X, G) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit wird im folgenden Sinne. Da G definit sein soll, wird X zu einem metrischen Raum unter der Metrik $|x, y|_G$ $(x, y \in X)$, definiert als untere Grenze der Längen aller stückweise stetig differenzierbaren Verbindungskurven von x, y. (X, G) heißt vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn dieser metrische Raum vollständig ist in dem Sinne, daß jede Cauchy-Folge bezüglich $|x, y|_G$ einen Limes in X hat. Damit gleichwertig ist die Bedingung, daß die Kugeln

$$K_G(z; r) := \{x;\ x \in X,\ |x, z|_G \leqq r\}$$

für alle $z \in X$ und $r \geqq 0$ kompakt sind (s. H. Hopf und W. Rinow [9]).

Satz 7. *Es sei X eine zusammenhängende bel. diffb. (beliebig oft differenzierbare) n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie; Γ sei*

eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von bel. diffb. Homöomorphismen von X. Dann gibt es einen bel. diffb., bei Γ invarianten definiten Maßtensor G auf X, so daß (X, G) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. — Ist ferner auf X ein bel. diffb. invariantes positives Volumenelement dx vorgegeben[2]*, so kann G im Falle $n \geqq 2$ noch so gewählt werden, daß das durch G gelieferte Volumenelement mit dx übereinstimmt. Im Falle $n=1$ ist G durch die Vorgabe seines Volumenelementes eindeutig bestimmt, also Vollständigkeit von (X, G) im allgemeinen nicht gleichzeitig vorhanden.*

BEWEIS. Da X als lokal-kompakter Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Topologie parakompakt ist, erhält man zunächst mit Hilfe von Satz 6, a), b) oder *d*) die Parakompaktheit von X/Γ. Die Voraussetzungen von Satz 4 sind also erfüllt. Es sei nun W irgendeine offene Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen, und U, V seien Familien von Teilmengen (Indexmenge $\mathfrak{M}$) und A, B Überdeckungen von X, so daß die Aussagen von Satz 4 gelten. Jede Menge U_m $(m \in \mathfrak{M})$ liegt dann im (offenen) Definitionsbereich eines lokalen Koordinatensystems $\varkappa_m$ von X. Die Richtung der Koordinatenabbildung $\varkappa_m$ sei $X \to R^n$ (R reeller Zahlkörper). Zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ gibt es einen bel. diffb. nichtnegativ-definiten Maßtensor G_m auf X, so daß gilt

$$G_m > 0 \quad \text{in} \quad \overline{V}_m, \tag{12}$$

$$G_m = 0 \quad \text{in} \quad X - U_m. \tag{13}$$

Wir können dann noch erreichen

$$\{y;\ |y, x|_m \leqq 2\} < U_m \quad \text{für alle } m \in \mathfrak{M} \text{ und } x \in V_m. \tag{14}$$

Denn es ist $\overline{V}_m < U_m$, und wegen (12) gilt $G_m > 0$ auch noch in einer kleinen Umgebung von $\overline{V}_m$, so daß G_m nötigenfalls nur mit einer hinreichend großen positiven Konstanten multipliziert zu werden braucht.

Ist H ein Tensor auf X, so sei allgemein H^α $(\alpha \in \Gamma)$ derjenige Tensor, der in einem beliebigen Koordinatensystem $\varkappa$ von X dieselben Komponenten hat wie H im Koordinatensystem $\varkappa\alpha^{-1}$. Da die Überdeckung A vom endlichen Typ ist, und wegen (13) ist nun der Tensor

$$G := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} G_m^\alpha$$

auf X wohl definiert, bel. diffb. und invariant bei Γ. Wegen (12) und $G_m \geqq 0$, und da B eine Überdeckung von X ist, ist G ferner definit. Wir weisen nach, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit (X, G) vollständig ist, indem wir zeigen, daß die Kugeln

$$K_G(z; i) := \{x;\ |x, z|_G \leqq i\} \qquad (z \in X;\ i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

kompakt sind.

[2]) In einem System $\varkappa$ von lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ auf X hat also dx die Darstellung $dx|_\varkappa = p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ mit einer bel. diffb. positiven Funktion p mit dem üblichen Transformationsverhalten. — Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen des Satzes könnten übrigens weitgehend gemildert werden.

Zunächst gilt wegen (14) und der Konstruktion von G

$$K_G(x;2) < \alpha U_m \quad \text{für} \quad x \in \alpha V_m, \quad \alpha \in \Gamma, \quad m \in \mathfrak{M}. \tag{16}$$

Wir definieren nun induktiv

$$T_0 := \{z\}, \qquad T_i := \bigcup_{\alpha V_m \cap T_{i-1} \neq \emptyset} \alpha \overline{U}_m \qquad (i \geqq 1).$$

Da A vom endlichen Typ ist, ist jedes T_i die Vereinigung von nur endlich vielen Mengen $\alpha \overline{U}_m$ (vollst. Induktion) und ist daher kompakt. Die Kugeln (15) sind daher kompakt, wenn wir zeigen

$$K_G(z;i) < T_i \qquad (i \geqq 0). \tag{17}$$

Wir schließen mit vollständiger Induktion. Die Inklusion ist erfüllt für $i=0$. Angenommen sie ist für ein bestimmtes $i \geqq 0$ erfüllt. Es sei dann $y \in K_G(z; i+1)$ vorgegeben. Aus der Definition von $|z, y|_G$ folgt die Existenz eines $x \in K_G(z;i)$, so daß

$$y \in K_G(x;2). \tag{18}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $x \in T_i$. Da B eine Überdeckung von X ist, ist ferner $x \in \alpha V_m$ für ein gewisses Paar $(\alpha, m) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$. Dann ist $\alpha \overline{U}_m < T_{i+1}$. Nach (16) und (18) ist aber $y \in \alpha U_m$. Damit haben wir insgesamt $y \in T_{i+1}$, und da y ein beliebiger Punkt von $K_G(z; i+1)$ war, ist der Induktionsbeweis von (17) beendet.

Nun zu der Aussage bezüglich des Volumenelementes dx. Die Bemerkung zum Fall $n=1$ ist trivial. Es sei jetzt $n \geqq 2$. Wir wählen auf Grund des eben Bewiesenen einen bel. diffb., bei Γ invarianten definiten Maßtensor H auf X, derart daß (X, H) vollständig ist. $|x, y|_H$ sei die zugehörige Metrik auf X, und $z \in X$ sei fest gewählt. Man konstruiert dann mit Hilfe von Satz 4 eine reelle, bei Γ invariante Funktion $j \in C^\infty(X)$, so daß gilt

$$j \geqq 0, \qquad j(z) = 0; \tag{19}$$

$$j(x) \geqq |x, \Gamma z|_H - 1 \quad \text{für} \quad x \in X, \tag{20}$$

mit

$$|x, \Gamma z|_H := \inf\{|x, \alpha z|_H;\ \alpha \in \Gamma\}.$$

Die Konstruktion von j verläuft wie folgt. Es sei W die aus den offenen Mengen

$$W_1 := \{x; |x, \Gamma z|_H < 1\}, \qquad W_2 := \{x; |x, \Gamma z|_H > \tfrac{1}{2}\}$$

bestehende Überdeckung von X, und U, V seien gemäß Satz 4 hinzubestimmte Familien mit der Indexmenge $\mathfrak{M}$. Nach § 2, Ende, existiert eine invariante Zerlegung der Eins,

$$1 = \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} f_m^\alpha,$$

mit $f_m \in C^\infty(X)$, $f_m \geqq 0$ und $f_m(x) > 0$ für $x \in \overline{V}_m$, $f_m(x) = 0$ für $x \notin U_m$. Wir definieren nun

$$\mathfrak{L} := \{m;\, m \in \mathfrak{M},\, U_m < W_2\}$$

$$c_m := \frac{\sup\{|y, \Gamma z|_H : y \in V_m\}}{\inf\{f_m(y) : y \in V_m\}} \qquad (m \in \mathfrak{M}) \tag{21}$$

und zeigen, daß die Funktion

$$j := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{L}}} c_m f_m^\alpha \tag{22}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. $j \in C^\infty(X)$, die Invarianz bei Γ und (19) sind unmittelbar klar. Zum Nachweis von (20) sei zunächst $x \in W_1$. Dann ist (20) offenbar erfüllt. Ist nun zweitens $x \notin W_1$, so gilt, da B eine Überdeckung von X ist, $x \in \alpha^{-1} V_m$ für ein geeignetes Paar $(\alpha, m) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$. Hier ist sogar $m \in \mathfrak{L}$. Denn andernfalls wäre $U_m \not< W_2$, also $U_m < W_1$ und wegen der Invarianz von W_1 auch $\alpha^{-1} U_m < W_1$ und $x \in W_1$ im Widerspruch zur Annahme. Der zu diesem Paar (α, m) gehörige Beitrag $c_m f_m^\alpha$ zum Ausdruck (22) für $j(x)$ ist dann zufolge (21) mindestens gleich $|x, \Gamma z|_H$, so daß (20) wiederum erfüllt ist. Also hat j die gewünschten Eigenschaften.

Es sei jetzt J der Maßtensor auf X, dessen Komponenten in Bezug auf lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ die Zahlen $\frac{\partial j}{\partial x_\mu} \frac{\partial j}{\partial x_\nu}$ $(1 \leqq \mu, \nu \leqq n)$ sind. J ist semidefinit (wegen $n \geqq 2$ nicht definit), bel. diffb. und invariant. Die zugehörige Quasimetrik bezeichnen wir mit $|x, y|_J$. Für alle $x \in X$ ist dann

$$|x, \Gamma z|_J \geqq |x, \Gamma z|_H - 1. \tag{23}$$

Denn für die Länge einer beliebigen von einem Punkt $y \in \Gamma z$ nach x führenden stückweise stetig differenzierbaren Kurve C auf (X, J) findet man unter Benutzung von lokalen Koordinaten und einer Parameterdarstellung sofort die untere Schranke $|j(x) - j(y)|$; wegen (19) und der Invarianz von j ist hier $j(y) = 0$, und wegen $j \geqq 0$ und (22) folgt die Behauptung (23). — Für jede positive invariante Funktion $u \in C^\infty(X)$ ist

$$F := J + u H \tag{24}$$

ein bel. diffb. invarianter definiter Maßtensor. Der Quotient $\frac{dx}{dx_F}$ des vorschriebenen Volumenelementes dx mit dem zu F gehörigen Element dx_F ist eine positive invariante Funktion aus $C^\infty(X)$. Da die Komponentenmatrix $\left(\frac{\partial j}{\partial x_\mu} \frac{\partial j}{\partial x_\nu}\right)$ von J ausgeartet ist, erkennt man mit Hilfe von Satz 4 leicht, daß u in (24) so gewählt werden kann, daß gilt

$$\frac{dx}{dx_F} \geqq 1. \tag{25}$$

Dann ist

$$G := \left(\frac{dx}{dx_F}\right)^{2/n} F$$

ein positiv-definiter bel. diffb. invarianter Maßtensor mit dem Volumenelement dx. Es bleibt die Vollständigkeit von (X, G) nachzuweisen. Wegen (25) genügt es zu zeigen, daß (X, F) vollständig ist. Es genügt dafür, die Kompaktheit der Kugeln

$$K_F(z;r) := \{x; |x,z|_F \leqq r\} \qquad (r \geqq 0)$$

zu zeigen. Es sei dazu eine Zahl $r \geqq 0$ und eine Folge x_i $(i \geqq 1)$ in $K_F(z;r)$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß die Folge x_i einen Häufungspunkt hat. Wir wählen für jedes i eine von z nach x_i laufende stückweise stetig differenzierbare Kurve C_i mit einer Länge

$$|C_i|_F \leqq r+1 \quad \text{auf } (X,F). \tag{26}$$

Für die Länge auf (X, J) gilt dann erst recht $|C_i|_J \leqq r+1$, d.h. $C_i \subset K_J(z; r+1)$ für alle $i \geqq 1$. Mit (23) folgt

$$C_i \subset \Gamma K_H(z; r+2).$$

$K_H(z; r+2)$ ist kompakt wegen der Vollständigkeit von (X, H). Daher hat u in $K_H(z; r+2)$ eine positive untere Grenze ε. Da u invariant ist, ist ε zugleich die untere Grenze von u in $\Gamma K_H(z; r+2)$. Daher erhalten wir mit Hilfe von (26) und (24)

$$r+1 \geqq |C_i|_F \geqq |C_i|_{uH} \geqq \sqrt{\varepsilon}\,|C_i|_H.$$

Daraus folgt

$$|x_i, z|_H \leqq \frac{r+1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{für} \quad i \geqq 1.$$

Wegen der Vollständigkeit von (X, H) hat also die Folge x_i einen Häufungspunkt. Das beendet den Beweis der Vollständigkeit von (X, G) und zugleich den Beweis von Satz 7.

Ist wie in Satz 7, zweiter Teil, auf einer Mannigfaltigkeit X ein Volumenelement dx ausgezeichnet, so gehört zu jedem Differentialsymbol (auch formaler Differentialoperator genannt) auf X ein adjungiertes Differentialsymbol. Die zweite Aussage von Satz 7 zeigt nun, daß die Betrachtung von Differentialsymbolen und ihren Adjungierten auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten im Falle $n \geqq 2$ nicht spezieller ist als auf den Mannigfaltigkeiten (X, dx) mit Volumenelement und den Voraussetzungen von Satz 7.

Aus der ersten Aussage von Satz 7 folgt die Möglichkeit, einen Fundamentalbereich von Γ in X als Normalpolyeder mit den in [1], Satz 5 bis 7 nachgewiesenen Eigenschaften zu konstruieren. Insbesondere ist also die Fixpunktmenge von Γ in X eine Nullmenge. Dabei definieren wir wie üblich: Eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 heißt (Lebesguesche) Nullmenge, wenn ihr Durchschnitt mit dem Definitionsbereich eines jeden lokalen Koordinatensystems $\varkappa$ von X in den Koordinaten von $\varkappa$ als Lebesguesche Nullmenge erscheint. — Aus dieser Definition folgt, daß $N \subset X$ dann und nur dann eine Nullmenge ist, wenn zu jedem $x \in X$ (oder auch nur zu jedem $x \in N$) eine Umgebung U von x und ein auf U definiertes Koordinatensystem $\varkappa$

existiert, so daß $\varkappa(U \cap N)$ eine Menge vom Lebesgueschen Maß 0 darstellt. Falls auf X ein positives stetiges Volumenelement dx ausgezeichnet ist, sind die Nullmengen von X identisch mit den Mengen vom Maß 0 in Bezug auf das durch dx gelieferte total-additive Maß auf X.

§ 5. Über periodische Transformationen und die Fixpunktmenge von diskontinuierlichen Gruppen auf Mannigfaltigkeiten

Am Ende des vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Fixpunktmengen von diskontinuierlichen Gruppen auf Mannigfaltigkeiten unter den Voraussetzungen von Satz 7 Nullmengen sind. Wir beweisen diese Aussage jetzt noch einmal direkter und unter abgeschwächten Voraussetzungen. — Zunächst ein allgemeiner Satz über periodische Transformationen.

SATZ 8. *Es sei X eine zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1, und α sei eine stetig differenzierbare Selbstabbildung von X von endlicher Ordnung p, also $\alpha^p = \iota$ (Identität). α besitze einen Fixpunkt $a \in X$ und lasse den Tangentialvektorraum in a elementweise fest. Dann ist $\alpha = \iota$.*

BEWEIS. Es sei $\varkappa$ ein lokales Koordinatensystem auf einer Umgebung U von a, derart daß

$$\varkappa(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n .$$

Es sei dann V eine Umgebung von a, so daß $\alpha^k V \subset U$ für $1 \leqq k \leqq p$. Für $x \in V$ sei $\mathfrak{x} := \varkappa(x)$ der als Spalte aufgefaßte Koordinatenvektor von x, und

$$\alpha^k(\mathfrak{x}) := \varkappa(\alpha^k x) .$$

Da α den Tangentialraum in a fest läßt, ist dann

$$\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x}) \tag{27}$$

mit einem stetig differenzierbaren Vektor $\beta(\mathfrak{x})$ mit der Eigenschaft

$$\beta(\mathfrak{x}) = o(\mathfrak{x}) \tag{28}$$

im Sinne von

$$\lim_{\mathfrak{x} \to 0} \frac{\beta(\mathfrak{x})}{|\mathfrak{x}|} = 0 .$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion

$$\alpha^k(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + k\,\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big) \qquad (\mathfrak{x} \to 0;\ k \geqq 1). \tag{29}$$

Nach (27) ist diese Aussage für $k = 1$ richtig. Aus ihrer Gültigkeit für ein bestimmtes k folgt mit Hilfe von (27)

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1}(\mathfrak{x}) = \alpha^k[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] &= [\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] + k\,\beta[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] + o\{\beta[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})]\} \\ &= \mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x}) + k\{\beta(\mathfrak{x}) + B(\mathfrak{x})\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big)\} + \\ &\quad + o\{\beta(\mathfrak{x}) + B(\mathfrak{x})\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big)\}, \end{aligned}$$

wobei $B(\underset{\sim}{x})$ die Funktionalmatrix der Abbildung β an der Stelle $\underset{\sim}{x}$ bezeichnet. Wegen (28) ist $B(0)=0$, wegen der stetigen Differenzierbarkeit von β also $B(\underset{\sim}{x})=o(1)$. Wir erhalten damit aus der letzten Gleichung die Gültigkeit von (29) mit $k+1$ an Stelle von k, und damit ist (29) bewiesen. Aus (29) folgt für $k=p$ wegen $\alpha^p=\iota$

$$\beta(\underset{\sim}{x})=o\big(\beta(\underset{\sim}{x})\big) \qquad (\underset{\sim}{x}\to 0).$$

Das bedeutet, daß β auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $\underset{\sim}{x}=0$ im R^n verschwindet. Nach (27) gibt es also eine Umgebung W von a, so daß $\alpha x=x$ für $x\in W$. Nach einem Satz von M. H. Newman [6] folgt hieraus bereits $\alpha=\iota$. Der Satz von Newman benutzt nicht die Differenzierbarkeit von α, sondern (außer $\alpha^p=\iota$) nur, daß α eine topologische Abbildung ist. Man kommt auch ohne diesen nicht ganz leicht zu beweisenden Satz unter nochmaliger Ausnutzung der Differenzierbarkeit von α wie folgt schnell zum Ziel. Es sei A die Menge der Fixpunkte von α. Wir haben soeben $\mathring{A}\neq\emptyset$ erhalten. Angenommen es ist $A\neq X$. Dann existiert ein $x\in \mathrm{Rd}\,\mathring{A}$, eine Umgebung U von x und ein Koordinatensystem $\varkappa$, so daß $\varkappa U=R^n$. Es gibt dann eine abgeschlossene Kugel $K\subset R^n$, so daß $\varkappa^{-1}\mathring{K}\subset\mathring{A}$ und

$$\mathrm{Rd}\,(\varkappa^{-1}K)\cap\mathrm{Rd}\,\mathring{A}\neq\emptyset.$$

Ist nun b ein beliebiger Punkt aus dem letzteren Durchschnitt, so läßt α den Tangentialraum in b fest, da $\varkappa^{-1}K$ fest bleibt. Daher folgt auf Grund des ersten Teiles dieses Beweises $b\in\mathring{A}$ im Widerspruch zu $b\in\mathrm{Rd}\,A$. Also muß $\mathring{A}=X$ sein, q.e.d.

Jetzt erhalten wir auf einfache Weise den angekündigten

Satz 9. *Es sei X eine zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 und Γ eine Gruppe von stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X. Γ sei entweder eigentlich diskontinuierlich oder aber diskontinuierlich und abzählbar. Dann ist die Fixpunktmenge von Γ in X eine Nullmenge.*

Beweis. 1. Γ sei eigentlich diskontinuierlich. Für jedes $\alpha\in\Gamma$ bezeichne A_α die abgeschlossene Menge der Fixpunkte von α. Die Fixpunktmenge von Γ ist dann definitionsgemäß gleich $\bigcup_{\substack{\alpha\in\Gamma\\ \alpha\neq\iota}} A_\alpha$. Es sei nun $x\in X$ beliebig vorgegeben, $\varkappa$ irgendein Koordinatensystem zu x und V sein Definitionsbereich. Nach Satz 1 existiert eine offene Umgebung U von x, $U\subset V$, so daß $U\cap A_\alpha\neq\emptyset$ nur für endlich viele $\alpha\in\Gamma$ gilt. Nach § 4, Ende, genügt es nun zu zeigen, daß $\varkappa(U\cap A_\alpha)$ für jedes $\alpha\in\Gamma$, $\alpha\neq\iota$, eine Lebesguesche Nullmenge ist. Diese Mengen sind jedenfalls Lebesguesch meßbar. Wir schließen jetzt indirekt: Angenommen es gibt ein $\alpha\in\Gamma$, $\alpha\neq\iota$, so daß die Menge $\varkappa(U\cap A_\alpha)$ ein positives Maß hat. Sie besitzt dann einen Dichtepunkt d (s. S. Saks [7], Kap. III, § 6). Dann ist $\varkappa^{-1}(d)$ ein Fixpunkt von α, und die Wirkung von α auf den Tangentialraum in $\varkappa^{-1}(d)$ ist offenbar die Identität. α besitzt wegen der Diskontinuierlichkeit von Γ eine endliche Ordnung. Satz 8 liefert jetzt $\alpha=\iota$ im Widerspruch zur Annahme.

2. Γ sei diskontinuierlich und abzählbar. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes A_α, $\alpha \neq \iota$, eine Nullmenge ist. Das kann wieder mit dem zuletzt ausgeführten indirekten Schluß geschehen oder auch mit dem folgenden Schluß, der auch schon zuvor hätte angewandt werden können: Ist $\alpha \in \Gamma$, $\alpha \neq \iota$, und betrachtet man die Gleichung $\alpha x = x$ in lokalen Koordinaten in der Umgebung eines beliebigen Punktes $a \in A_\alpha$, so ist die Funktionalmatrix von α in a wegen Satz 8 von der Einheitsmatrix verschieden, und der Hauptsatz über implizite Funktionen liefert, daß A_α in einer hinreichend kleinen Umgebung von a eine $(n-1)$-dimensionale stetig differenzierbare Fläche in X und damit eine Nullmenge darstellt. Daraus folgt, daß A_α selbst eine Nullmenge ist. — Damit ist Satz 9 bewiesen.

Bezüglich Fixpunktmengen von Isometrien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten vgl. S. KOBAYASHI [8]. — Die Aussage von Satz 9 benötigt man z. B. für Integralumformungen der Art

$$\int_X g\,dx = \int_{\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha F} g\,dx = \int_F \sum_{\alpha \in \Gamma} g^\alpha\,dx$$

(dx invariant bei Γ, F meßbare Fundamentalmenge von Γ in X).

Literatur

[1] ROELCKE, W.: Über Fundamentalbereiche diskontinuierlicher Gruppen. Math. Nachr. **20**, 329—355 (1959).

[2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Kap. I. Paris 1951.

[3] KELLEY, J. O.: General topology. Princeton 1955.

[4] ROELCKE, W.: Über den Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten Math. Nachr. **21**, 131—149 (1960).

[5] HOPF, H., u. W. RINOW: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Mat. Helv. **3**, 209—225 (1931).

[6] NEWMAN, M. H.: A theorem on periodic transformations of spaces. Quart. J. Math., Oxford ser. **2**, 1—8 (1931).

[7] SAKS, S.: Théorie de l'integrale. Warschau 1933.

[8] KOBAYASHI, S.: Fixed points of isometries. Nagoya Math. J. **13**, 63—68 (1958).

Münster i. W., 2. Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. April 1960)

Tomić, M.
Math. Zeitschr. 75, 53–56 (1961)

Über trigonometrische Sinus-Reihen mit positiven Koeffizienten

Von
Miodrag Tomić

Das Riemannsche Summierungs-Verfahren (R_2) ist folgendermaßen erklärt: Eine Folge s_n ist R_2-summierbar: $s_n \to s\,(R_2)$ wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n h}{n^2 h}\, s_n \to s\,.$$

Dann folgt bekanntlich [1, S. 301]

$$(a) \qquad s_n \to s\,(R_2) \quad \text{und} \quad s_n = O(1) \Rightarrow s_n \to s\,(C, 1)\,.$$

Man kann das Verfahren (R_2) auch folgendermaßen interpretieren. Es sei $f(\vartheta)$ eine ungerade Funktion und $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu \vartheta$ ihre formale Fourier-Sinus-Reihe. Es existiere

$$(b) \qquad \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi \vartheta} \sum \frac{b_n}{n} (1 - \cos n \vartheta) \to s, \qquad \vartheta \to +0.$$

Nach Hardy und Rogosinski [2] gilt: Ist $n b_n \geqq -1$, dann ist $n b_n \to s\,(C, 1)$ notwendig und hinreichend für (b), und daraus folgt (a) mit einseitiger Verallgemeinerung, falls $n b_n = s_n$, $\vartheta = 2h$. Wenn jetzt die Grenze auf der rechten Seite in (b) existiert, nicht nur für $\vartheta \to +0$, sondern auch für alle ϑ aus $(0, \varepsilon)$, dann folgt die Konvergenz von $\sum b_\nu/\nu$ ohne zusätzlichen Bedingungen über b_ν [1, S. 366]. Wohlbekannt ist, daß diese Konvergenz trivialerweise stattfindet, wenn $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu \vartheta$ die Fourier-Reihe einer ungeraden L-integrierbaren Funktion in $(0, \pi)$ ist.

Anstatt der Konvergenz der rechten Seite in (b) für alle ϑ aus $(0, \varepsilon)$ wird in der vorliegenden Note nur vorausgesetzt, daß die Teilsummen von $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu \vartheta$ in $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon < \pi$, L-integrierbar sind. Dann wird die Aufgabe behandelt, Bedingungen zu finden, aus welchen die Konvergenz von $\sum b_\nu/\nu$ folgt. In dieser Richtung wird folgender Satz bewiesen.

Satz. *Es sei* $(*)$ $\sum b_\nu \sin \nu x$ *eine trigonometrische Reihe mit nichtnegativen Koeffizienten* $b_\nu \geqq 0$, *oder allgemeiner* $b_\nu \geqq -\lambda_\nu$, *wo* λ_ν *eine monotone, gegen Null fallende Folge ist, mit* $\sum \lambda_\nu/\nu < \infty$; *und es sei für ein festes* $\varepsilon < \pi$

$$(1) \qquad \int_0^{\varepsilon} |s_n(x)|\, dx = O(1)\,,$$

wo $s_n(x)$ die Teilsummen von (*) bedeutet. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}. \tag{2}$$

Wenn $b_\nu \downarrow 0$ folgt der Satz (zum Beispiel) unmittelbar aus der Tatsache, daß dann $|\sum b_\nu \sin \nu x| \leqq b_1/\sin \frac{x}{2}$ in (ε, π), also wegen (1) $f(x) \in L(0, \pi)$.

Für den Beweis des oben genannten Satzes benützen wir die Wienersche Methode, und zwar in ihrer einfachsten elementaren Form, die von HEILBRONN und LANDAU in [3], [4] gegeben ist.

BEWEIS DES SATZES. Setzen wir zuerst $b_\nu \geqq 0$, voraus, dann brauchen wir nur die folgende elementare Formel aus [3, S. 12], [4]:

$$\begin{cases} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{\varphi}{\lambda}\right) \cos \alpha \varphi \, d\varphi = \left\{\left(1 - \frac{\varphi}{\lambda}\right) \frac{\sin \alpha \varphi}{\alpha} - \frac{\cos \alpha \varphi}{\lambda \alpha^2}\right\}_0^{\lambda} \\ \qquad = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha \lambda}{2}}{\alpha^2 \lambda} < \frac{2}{\alpha^2 \lambda}, \qquad \alpha \gtrless 0. \end{cases} \tag{3}$$

Es sei $m = m(\varepsilon)$ eine ganze Zahl, die später festgesetzt wird. (1) und eine bekannte Abschätzung geben für $0 \leqq x \leqq \varepsilon$

$$\int_0^{\varepsilon} \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \sin kx \right| dx < 2M, \qquad \left| \sum_{k=m}^{n} \frac{\sin k x}{k} \right| < 2K, \tag{4}$$

wo K und M von n und m unabhängig sind.

Aus

$$S_n = \int_0^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{n} b_k \sin k x \right) \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin k x}{k} \right) \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \tag{5}$$

folgt wegen (4) $|S_n| < 4KM$.

Anderseits, man kann S_n wie folgt ausrechnen

$$S_n = \int_0^{\varepsilon} \sum_{k=m}^{n} \frac{b_k}{k} \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \sin^2 k x \, dx +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} \sum_{\substack{k,p=m \\ k \neq p}}^{n} \frac{b_k}{p} \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \sin k x \sin p x \, dx = I_1 + I_2.$$

Wegen (3) ist

$$\int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \sin^2 k x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) (1 - \cos 2 k x) \, dx \geqq \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2k^2 \varepsilon}.$$

Wir lassen nur diejenige k zu, für welche $(k^2 \varepsilon)^{-1} < \varepsilon^5$, d.h. $k > \varepsilon^{-3}$. Es sei $m = m(\varepsilon)$ die kleinste solche Zahl k. Wir haben dann

$$I_1 \geqq \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^5}{2}\right) \sum_{k=m}^{n} \frac{b_k}{k}. \tag{6}$$

Andererseits ist

$$(7)\qquad I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\sum_{\substack{k,p=m\\k\neq p}}^{n}\frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\{\cos(k-p)\,x-\cos(k+p)\,x\}\,dx=I_2'-I_2'',$$

mit

$$I_2''=\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\sum_{\substack{k,p=m\\k\neq p}}^{n}\frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos(k+p)\,x\,dx.$$

Nochmalige Anwendung der Formel (3) auf I_2'' gibt

$$I_2''<\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,p=m\\k\neq p}}^{n}\frac{b_k}{p}\,\frac{1}{(k+p)^2\,\varepsilon}<\frac{1}{2m\,\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-m}b_{m+k}\left(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{1}{(2m+r)^2}\right)$$

$$<\frac{1}{2m\,\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{b_{m+k}}{2m+k-1}.$$

Wegen $m\,\varepsilon>\varepsilon^{-2}$, d.h. $1/m\,\varepsilon<\varepsilon^2$ gilt erst recht

$$(8)\qquad I_2''<\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{b_{m+k}}{2m+k-1}<\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=m}^{n}\frac{b_k}{k}.$$

(6), (7) und (8) liefert in Hinsicht auf (5) die Ungleichung

$$\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^5}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\sum_{k=m}^{n}\frac{b_k}{k}+\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\sum_{\substack{k,p=m\\k\neq p}}^{n}\frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos(k-p)\,x\,dx<$$

$$<I_1+I_2'-I_2''=S_n\leqq|S_n|<4KM.$$

Nach einer Vertauschung der Summen- und Integralzeichen auf der linken Seite der letzten Ungleichung sind nach (3) für $k\gtrless p$ alle Integrale positiv. Für ein festes ε ist die Zahl $m=m(\varepsilon)$ beschränkt, und für $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$ folgt aus der letzten Ungleichung für jedes n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}<C(\varepsilon),$$

d.h. wegen $b_\nu\geqq 0$ die Konvergenz von (2).

Im allgemeineren Fall folgt der Satz in der Weise, daß man $b_\nu\geqq 0$ durch $c_\nu=b_\nu+\lambda_\nu\geqq 0$ ersetzt. Es ist dann nur noch nötig eine Abschätzung der rechten Seite in (5) zu geben. Man kann sie folgendermaßen gewinnen:

$$|S_n|\leqq 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=m}^{n}c_k\sin k\,x\right|dx\leqq 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=m}^{n}b_k\sin k\,x\right|dx+$$

$$+2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin k\,x\right|dx+2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_\kappa\sin k\,x\right|dx.$$

Also für genügend großes $m=m(\varepsilon)$ sind die zwei letzten Summen unter dem Integralzeichen (wegen $\lambda_\nu \downarrow 0$) positiv in $(0,\varepsilon)$, falls ε genügend klein ist [5, S. 229]. Die Beschränktheit in der letzten Ungleichung folgt dann aus der Voraussetzung $\sum \lambda_\nu/\nu < \infty$. Nach dem oben Gesagten folgt wegen $(b_\nu+\lambda_\nu) \geqq 0$ die Konvergenz von $\sum (b_\nu+\lambda_\nu)/\nu$ und daraus diejenige von $\sum b_\nu/\nu$.

Literatur

[1] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949.
[2] HARDY, G. H., and W. W. ROGOSINSKI: Notes on Fourier Series (1): On sine series with positive coefficients. J. London Math. Soc. **18**, 50–57 (1943).
[3] HEILBRONN, H., u. E. LANDAU: Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn BOCHNER. Math. Z. **37**, 10–16 (1933).
[4] HEILBRONN, H., u. E. LANDAU: Ein Satz über Potenzreihen. Math. Z. **37**, 17 (1933).
[5] ZYGMUND, A.: Trigonometric Series, Vol. I. Cambridge 1959.

Institute Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences Belgrade (Yougoslavie)

(Eingegangen am 2. Mai 1960)

WIEGOLD, J.
Math. Zeitschr. 75, 57–78 (1961)

Some remarks on generalised products of groups with amalgamations

By
JAMES WIEGOLD

1. Introduction

In [1] we introduced the concepts of generalised free nilpotent and verbal products of groups with amalgamations, and in the opening sections derived some of their more elementary properties, heuristic for a discussion of the existence of such products for a given system of groups with given amalgamations. This was the central theme of the paper, and similar existence problems will be dealt with here. Examples showed that the most innocent-looking systems of groups with amalgamations may not have generalised products of one sort or another; and in fact the only type of product which really yielded to attack was the second nilpotent product of two groups with an amalgamation. For these it was possible to give a set of necessary and sufficient conditions that they exist, and while the conditions are unmanageable in practice, they are at least some insight into the subject. I have been able to extend this result a little, in that I show (§ 5) that conditions of a like nature are necessary for the existence of a much wider class of products. They are however not sufficient (Example 5.7) despite being very strong conditions: and I can see no way of supplementing them with further necessary conditions so that the combined set is both necessary and sufficient.

Section 2 is given to a discussion of notation and elementary results — the reader is referred to [1] for such notation as is either not standard, or not described here. The remainder of the paper contains some more or less unconnected results on generalised products with amalgamations. In [1] we gave some normal forms for the elements of the generalised free second nilpotent product of two groups with an amalgamation. These however are not very useful, the derivation of the normal form of the product of two elements in normal form being rather complicated. In § 3 we derive a much simpler normal form for the elements of a *generalised regular product* (§ 2) of any number of groups in the special case where each pair of constituents intersect in one and the same subgroup, and this common intersection is central in the whole group. The normal form is particularly suitable for an illumination of the structure of the generalised free second nilpotent product of groups with a central amalgamation.

In [2] B. H. NEUMANN uses permutational products of groups to show that any amalgam (§ 2) of two soluble groups such that the amalgamation

is central in one factor is always embeddable in a soluble group whose soluble length is bounded in terms of those of the original groups. As was shown in [1], this is no longer true if the word "soluble" is replaced by "nilpotent": an amalgam of an abelian group with a nilpotent group of class 2 need not be embeddable in a nilpotent group. However, if both the groups under discussion are nilpotent and *finite* (and the amalgamation is still central in one of them — this is a very important restriction), then the amalgam is indeed (§ 4) embeddable in a nilpotent group. This time there is no bound on the class of the embedding group in terms of those of the original groups: Example 4.3 provides for each natural number n an amalgam of a cyclic group with the dihedral group of order 8 embeddable in no group which is nilpotent of class less than n. Strangely enough, however, there *is* a bound in terms of the *orders* of the original groups.

Finally in § 6 we consider metabelian products of two groups with an amalgamation. Here the results are very incomplete. We give some sufficient conditions that the generalised free metabelian product of two groups with amalgamation exist, having already in the previous section given strong necessary ones. Neither set is both necessary and sufficient. In contrast with the case of second nilpotent products, I have been unable to find a set of necessary and sufficient conditions for the existence of the generalised free metabelian product of two groups with amalgamation — other than those in [1] in terms of the generalised free product, which do not tell us very much. The overall conclusion seems to be, even in the light of the remarks of the preceding paragraph, that solubility is perhaps even worse behaved in this context than is nilpotency.

2. Preliminaries

We first of all fix such of our notation, definitions and elementary results as are not contained in §§ 2, 3, 4 of our previous paper [1]. In order to save much undue repitition, we shall assume the content of those introductory sections as known. In addition we shall need some results on generalised free and generalised direct products, and also on permutational products: for definitions see [2] and for instance [3].

2.1. [3, p. 505] Let F be the generalised free product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), and further let Q be a group containing homomorphic images $G_\alpha\varphi_\alpha$ of the G_α, where two mappings φ_α and φ_β agree on their common region $H_{\alpha\beta}$ of definition. Then the φ_α can be simultaneously extended to a homomorphism of the whole of F into Q.

2.2. [4] Let F be the generalised free product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating a single normal subgroup H: $G_\alpha \cap G_\beta = H$ for all $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$, $\alpha \neq \beta$. Then the factor group F/H is isomorphic with the (ordinary) free product $\prod_{\alpha\in\mathfrak{M}}^{*} G_\alpha/H$ of the factor groups G_α/H.

This second result is presumably well-known, but apparently not published anywhere except in [4], which is the author's doctoral dissertation. It is in any case very easy to prove.

Suppose now that G is any group generated by its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), with amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$, and that F is the generalised free product of the G_α with these amalgamations. Then, as can be seen from 2.1, there is an obvious homomorphism of F onto G, namely that extending isomorphisms of the G_α in F onto their isomorphic copies in G. If the kernel of this homomorphism is contained in the cartesian[1] $[G_\alpha]^F$ of the G_α in F, then G will be called a *generalised regular product* of its subgroups G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$. The motivation for using this term is that in the case where the amalgamations are all trivial, so that F is the ordinary free product of the G_α, we get a regular product in the sense of GOLOVIN [5]. All the generalised products defined in [1] — at least the *free* ones — are generalised regular products.

In particular, we defined in [1] two sorts of generalised nilpotent product, namely those given the names Golovin nilpotent products and Moran nilpotent products. We shall remind the reader of these constructions. Let the group G be generated by its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), with the amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$, and define by induction the following sequence of normal subgroups of G:

$$[G_\alpha]^G = O_1(G) \geqq O_2(G) \geqq \cdots \geqq O_n(G) \geqq \cdots,$$

where $O_n(G) = [G, O_{n-1}(G)]$ for $n > 1$. Next let V be any set of words (see e.g. [1], Definition 2.1), and $V(G)$ the verbal subgroup of G associated with V. Then if in G the equality[2] $O_n(G) = E$ holds, G is called a *generalised Golovin n-th nilpotent (for short GN_n)* product of the G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$; if on the other hand $V(G) \cap [G_\alpha]^G = E$, G is called a *generalised Moran V-verbal* (MV-) product of the G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$. With $V(G) = {}^nG$ [the $(n+1)$-th term of the lower central series[2]) of G], we have the *generalised Moran n-th nilpotent* (MN_n-) product.

One of the characteristic differences in behaviour between these two sorts of nilpotent product is that a homomorphic image of a generalised Golovin nilpotent product of groups is a generalised Golovin nilpotent product of the homomorphic images of these groups: whereas, as we saw in [1], Example 6, the corresponding result does not hold for the Moran products. The Moran soluble products also have this bad behaviour under homomorphisms, but on the basis of some results of MORAN [6], we can define what we naturally call generalised Golovin soluble products. However, we shall do this only for metabelian products:

[1]) That is, the normal closure in F of the set of all commutators $[g_\alpha, g_\beta]$, where $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$, $\alpha \neq \beta$, and α and β run over the whole of $\mathfrak{M}$.

[2]) For any group G, the unit subgroup is denoted by E; the lower central series is $G = {}^0G \geqq {}^1G \geqq \cdots \geqq {}^nG \geqq \cdots$; the derived series is $G = G^{(0)} \geqq G' \geqq G'' \geqq \cdots \geqq G^{(n)} \geqq \cdots$.

DEFINITION 2.3. *The group G is a generalised Golovin metabelian product (for short GS_2-product) of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), if*

(i) *the G_α together generate G;*

(ii) *for each pair α, β of different suffices in $\mathfrak{M}$,*

$$[G'_\alpha, G'_\beta] = E;$$

(iii) $[G', [G_\alpha]^G] = E$.

The result of MORAN just mentioned is that in the free product F of groups G_α,

$$F'' \cap [G_\alpha]^F = [G'_\alpha]^F [F', [G_\alpha]^F].$$

This means of course that the corresponding regular products (for details see [5]) coincide. A generalised *free* GS_2-product is defined in a manner completely parallel to that in which generalised free nilpotent products were defined in [1], Definition 4.3: any other GS_2-product of the same groups with the same amalgamations is to be a homomorphic image of the free one.

Next we need a result on the generalised direct product of groups with a single amalgamation. Of the possible definitions we use the following:

DEFINITION 2.4. *The group G is the generalised direct product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating a single subgroup H if*

(i) *the groups G_α together generate G;*

(ii) *if $\alpha \neq \beta$, G_α and G_β commute elementwise;*

(iii) *if G^α denotes the subgroup of G generated by all the G_β with $\beta \neq \alpha$,*

$$G_\alpha \cap G_\beta = G_\alpha \cap G^\alpha = H$$

for all $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$, $\alpha \neq \beta$.

Clearly H is central in G, and moreover G is uniquely determined by these properties, so that the use of the definite article is justified. B. H. NEUMANN [3] has shown that the generalised direct product of any set of groups with a single amalgamation always exists provided only that this amalgamation is central in all the constituents. The result that we need can be found in M. F. NEWMAN [7]:

2.5. Let G be the generalised direct product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with a single amalgamated subgroup H. If now $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements, and, for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, S_α is a left transversal (complete system of left coset representatives) of G_α modulo H, then every element of G has a unique expression of the form

$$s_1 s_2 \dots s_m h,$$

where $m \geqq 0$, $h \in H$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$.

LEMMA 2.6. *Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H. Then for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, $G_\alpha \cap [G_\alpha]^G = E$.*

PROOF. Let F be the generalised free and D the generalised direct product of the G_α amalgamating H. Then obviously $F/[G_\alpha]^F \cong D$, and by definition $G \cong F/N$ for some $N \subseteq [G_\alpha]^F$. But then D is a homomorphic image of G,

$$D \cong F/N \,/\, [G_\alpha]^F N/N \cong G/[G_\alpha]^G,$$

and it is not hard to see that the mapping of G onto D which maps the constituents G_α isomorphically will have $[G_\alpha]^G$ as its kernel. This is sufficient to prove the lemma.

A strict definition of an *amalgam* of two groups would be the following. It consists of a quintuplet (A, B, H, K, φ), where A and B are groups, H and K isomorphic subgroups of A and B respectively, and φ an isomorphism of H onto K. In practice we think of the elements of H and K as being identified according to the mapping φ, so that the amalgam becomes an "incomplete group" (BAER [8]) consisting of the set-theoretical union of A and B, these groups intersecting in the subgroup H. With this agreement we shall write the amalgam as $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$. The isomorphism φ is now suppressed and plays no further role: it is to be noted, however, that different amalgamating isomorphisms φ can give rise to very different incomplete groups (§ 3). By an *embedding* of $\mathfrak{A}$ we mean any group C containing isomorphic copies A_1, B_1 of A, B respectively intersecting in an isomorphic copy H_1 of H; specifically there are to be isomorphisms μ, ν of A, B onto A_1, B_1 respectively, such that for any $h \in H$, $h\mu = h\nu \in H_1$, and for any $h_1 \in H_1$, $h_1 \mu^{-1} = h_1 \nu^{-1} \in H$. In short, the amalgam $\mathfrak{A}$ is "isomorphically contained" in C. It is well-known (see for instance O. SCHREIER [9]) that any amalgam of two groups is embeddable in a group. Further information on this subject is to be found in [3] and [10].

Next we come to a definition of *permutational products*. Let

$$\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$$

be an amalgam of two groups, and choose arbitrary — though hereafter fixed — left transversals S, T of A, B respectively modulo H. Form the set W of all triplets of the form (s, t, h), with $s \in S$, $t \in T$, $h \in H$; then the permutational product of $\mathfrak{A}$ corresponding to the transversals S and T will be a certain permutation group on W, as follows. For arbitrary $a \in A$, we define a mapping $\varrho(a)$ of W into itself by the rule:

$$(s, t, h)^{\varrho(a)} = (s', t, h'),$$

$s' \in S$ and $h' \in H$ being defined by the equality

$$s\,h\,a = s'\,h'.$$

Similarly for $b \in B$, we define a mapping $\varrho(b)$ of W into itself by the rule:

$$(s, t, h)^{\varrho(b)} = (s, t'', h''),$$

$t'' \in T$ and $h'' \in H$ being given this time by

$$t\,h\,b = t''\,h''.$$

B. H. NEUMANN shows in [2] that

(i) for $h^0 \in H$, there is no ambiguity in the definition of $\varrho(h^0)$;

(ii) $\varrho(a)$ and $\varrho(b)$ are permutations of W;

(iii) the set $\varrho(A)$ of all $\varrho(a)$ is a subgroup of the full symmetric group $\Sigma(W)$ on W, isomorphic with A; the set $\varrho(B)$ of all $\varrho(b)$ a subgroup isomorphic with B;

(iv) $\varrho(A) \cap \varrho(B) = \varrho(H)$ is isomorphic with H.

In other words, $\Sigma(W)$ is an embedding for $\mathfrak{A}$. The subgroup P of $\Sigma(W)$ generated by $\varrho(A)$ and $\varrho(B)$ is called a *permutational product* of $\mathfrak{A}$. We use the indefinite article since P depends not only on $\mathfrak{A}$ but also on the choice of transversals S and T — NEUMANN gives examples in [2] to show how very heavy this dependence is.

We need the following result on permutational products, which is implicit in Corollary 3 to Lemma 2 of [2]:

2.7. Let $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ be an amalgam such that H is in the centre of A. Then in any permutational product of $\mathfrak{A}$, the cartesian is isomorphic with a subgroup of the unrestricted direct product of $|A:H|$ isomorphic copies[3]) of $[B, H]$.

Lastly we need some results on regular products of groups. We recall that a group G is a regular product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), if each G meets the normal closure in G of the subgroup G^α generated by all the G_β with $\beta \neq \alpha$ in the unit element only. The first two results can be found in GOLOVIN [5], [11]:

2.8. If $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements, then every element of G has a unique expression of the form

$$g_1 g_2 \cdots g_m u,$$

where $m \geqq 0$, $u \in [G_\alpha]^G$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, and $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.

2.9. In the (free regular) second nilpotent product[4]) G of groups G_α, the cartesian is central and is the direct product of all the subgroups $[G_\alpha, G_\beta]$ with $\alpha \neq \beta$. Moreover $[G_\alpha, G_\beta]$ is isomorphic with the cartesian of G_α and G_β in *their* second nilpotent product.

Now it is known (see [1], [12]) that the cartesian of two groups A, B in their second nilpotent product is isomorphic with their tensor product $A \otimes B$. Putting all these facts together, we have the following lemma:

LEMMA 2.10. *In the second nilpotent product of groups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), the cartesian is isomorphic with the direct product $\prod^\times G_\alpha \otimes G_\beta$ of all tensor products $G_\alpha \otimes G_\beta$ with $\alpha \neq \beta$, each pair α, β being taken just once.*

[3]) The index of the subgroup H in A is denoted by $|A:H|$.

[4]) That is, the factor group $F/[F, [G_\alpha]^F]$ of the free product F of the G_α; it is the largest group generated by the G_α for which the cartesian is central.

3. Normal forms

Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α (α ranging over some suffix set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamation H: $G_\alpha \cap G_\beta = H$, $\alpha \neq \beta$. For each $\alpha \in \mathfrak{M}$, choose an arbitrary left transversal S_α of G_α modulo H, so that each element of G_α is uniquely of the form sh, with $s \in S_\alpha$, $h \in H$. For convenience we assume that the unit element $1 \in S_\alpha$ for each α. Suppose now that $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements; then it is not difficult to see that every element of G can be expressed in the form

$$g = s_1 s_2 \dots s_n h u, \tag{3.1}$$

where $n \geqq 0$, $h \in H$, $u \in [G_\alpha]^G$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Our aim is to show that the form (3.1) is in fact uniquely determined. To do this, we invoke the aid of known properties of the generalised direct product D of the G_α amalgamating H. For the sake of clarity, we think of D as being the generalised direct product of groups G_α^0 ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha^0 \cap G_\beta^0 = H^0$; for each $\alpha \in \mathfrak{M}$ there is to be an isomorphism ϑ_α of G_α onto G_α^0, two such mappings agreeing where they are both defined (namely on H), and moreover $H\vartheta_\alpha = H^0$ for each α. In this way we get left transversals $S_\alpha^0 = S_\alpha \vartheta_\alpha$ of the G_α^0 modulo H^0, consisting of left coset representatives $s_\alpha^0 = s_\alpha \vartheta_\alpha$.

From Lemma 2.6 we see at once that the isomorphisms ϑ_α can be simultaneously extended to a homomorphism ϑ of G onto D, whose kernel is the cartesian $[G_\alpha]^G$. Suppose then that in G,

$$g = s_1 s_2 \dots s_n h u = t_1 t_2 \dots t_m k v \tag{3.2}$$

are two expressions of the form (3.1) for the element g; in this, $m \geqq 0$, $k \in H$, $v \in [G_\alpha]^G$, $t_i \in S_{\beta_i}$ and $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m$. Applying ϑ to (3.2) we get

$$s_1^0 s_2^0 \dots s_n^0 h^0 = t_1^0 t_2^0 \dots t_m^0 k^0.$$

By 2.5, this means that $m = n$, $h^0 = k^0$, $s_i^0 = t_i^0$ for $i = 1, 2, \dots, n$. But Lemma 2.6 tells us that the kernel $[G_\alpha]^G$ of ϑ meets each of the factors G_α in the unit element only, so that in fact $h = k$, $s_i = t_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Finally, these results mean from (3.2) that $u = v$, and hence that (3.1) is a normal form for the elements of G, as asserted.

This treatment applies to all the generalised products defined in [1]. It has a special significance for the generalised free GN_2-product of groups with a single central amalgamated subgroup, arising out of the fact that we can specify the structure of the cartesian subgroup of such a product, this time in terms of the tensor product.

Let then G be the generalised free GN_2-product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating the central subgroup H, and let F be the generalised free product — generated by isomorphic copies $G_\alpha^0 = G_\alpha \vartheta_\alpha$ of the G_α with the subgroup $H^0 = H\vartheta_\alpha$ amalgamated, in a way exactly analagous to that described

earlier in this section for the generalised direct product. Then by [1], Theorem 4.6, $G \cong F/[F, [G_\alpha^0]^F]$, so that

$$G/H \cong F/[F, [G_\alpha^0]^F] / H^0 [F, [G_\alpha^0]^F]/[F, [G_\alpha^0]^F]$$

$$\cong F/H^0 / H^0 [F, [G_\alpha^0]^F]/H^0.$$

But, by (2.2), F/H^0 is the ordinary free product of the factor groups G_α^0/H^0, so that in fact G/H is isomorphic with the (free) regular GN_2-product of the G_α^0/H^0. The cartesian of the G_α^0/H^0 in this group is, by Lemma 2.10, isomorphic with the direct product $\prod_{\alpha \neq \beta}^{\times} G_\alpha^0/H^0 \otimes G_\beta^0/H^0 = L$, say; hence the cartesian of the G_α in G is given by

$$[G_\alpha]^G H/H \cong L,$$

cartesians being preserved under homomorphic mappings. Finally, by Lemma 2.6, H intersects $[G_\alpha]^G$ trivially, so that we arrive at the conclusion that $[G_\alpha]^G$ is isomorphic with L.

To sum up, we have proved the following theorems:

THEOREM 3.3. *Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H. For each $\alpha \in \mathfrak{M}$, let S_α be an arbitrary but fixed left transversal of G_α modulo H, containing the unit element. Suppose further that $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by the relation $<$ between its elements. Then every element of G has a unique expression of the form*

$$s_1 s_2 \dots s_n h u,$$

where $n \geqq 0$, $h \in H$, $u \in [G_\alpha]^G$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

THEOREM 3.4. *If G is the generalised free GN_2-product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H, then the cartesian $[G_\alpha]^G$ of the G_α in G is isomorphic with the direct product $\prod_{\alpha \neq \beta}^{\times} G_\alpha/H \otimes G_\beta/H$.*

These theorems mean that we can construct the generalised free GN_2-product of groups with a central amalgamation as a set of words in an obvious way, and specify the product of two such words by means of not too complicated equations. In a sense it makes the generalised GN_2-product in this case no more formidable an object than the regular one.

4. Nilpotent embeddings of group amalgams

The general questions we ask in this section are the following. When can an amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ of two nilpotent groups be embedded in a nilpotent group? When can such an amalgam be embedded in a nilpotent group of class bounded in terms of the classes of A and B? As we shall see presently (Example 4.3) there exists for each natural number n an amalgam of a cyclic group with the dihedral group of order 8 which is embeddable in a group of class n, but in no group of lower class. This of course means that the two problems are in fact different.

Let us examine the latter question first, since it is rather more difficult, and the answer less complete. As the example quoted shows, it is not always possible to embed $\mathfrak{A}$ in the required way. However, some progress was made towards a solution in [*1*], where I gave (in slight disguise, Theorem 8.13) necessary and sufficient conditions that $\mathfrak{A}$ be embeddable in a nilpotent group of class 2. In the following section (Theorems 5.4—5.6) we deduce some similar conditions which are necessary for $\mathfrak{A}$ to be embeddable in a group belonging to a given variety[5] $\mathfrak{V}$. These conditions are not sufficient for the variety of metabelian groups (Example 5.7); whether they are sufficient for some variety of nilpotent groups (other than the second nilpotent, where we know that they are [*1*, Theorem 8.13]) remains an open question[*].

We shall now give a partial answer to the first question. It is certainly not always possible to embed $\mathfrak{A}$ in a nilpotent group. Even more, B. H. NEUMANN constructs in [*2*] an example where both A and B are of order 125 and nilpotent of class 2, and yet $\mathfrak{A}$ is embeddable in no *soluble* group — any group generated by this amalgam has the alternating group on 5 symbols as a homomorphic image. In [*1*] I give an amalgam where A is a Prüfer group of type 2^∞ and B the dihedral group of order 8, and for which the intersection of the terms in the finite part of the lower central series of any group containing $\mathfrak{A}$ always has the non-trivial subgroup B': such a group is therefore not nilpotent[6]. The infiniteness of A — or rather the fact that A does not have finite exponent — plays a crucial role here, and the question immediately arises as to the effect of imposing the condition that A be finite as well as abelian, while keeping B finite and nilpotent of class 2. As we shall now see, this is more than enough to ensure that $\mathfrak{A}$ be embeddable in a nilpotent group.

THEOREM 4.1. *Let $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ be an amalgam of two p-groups (p a prime) such that H is central in A, and either A/H is finite, or $[B, H]$ has finite exponent. Then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a p-group.*

PROOF. We shall show that any permutational product P of $\mathfrak{A}$ is a p-group. Firstly the cartesian $C=[\varrho(A), \varrho(B)]$ is normal in P, since $\varrho(A)$ and $\varrho(B)$ generate P (see [*5*]); P/C is generated by its p-subgroups $\varrho(A)C/C$ and $\varrho(B)C/C$, which commute elementwise. Consequently P/C is a p-group.

Next, by 2.7, C is isomorphic with a subgroup of the unrestricted direct product of $|A:H|$ copies of $[B, H]$. But the remaining assumptions of the theorem entail that this direct product is a p-group; hence C, and likewise P, being an extension of a p-group by a p-group, is a p-group.

I do not know whether the restriction that either A/H or the exponent of $[B, H]$ be finite is necessary for the conclusion of the theorem.

---

[*] Added in proof: This point is now settled; they are not sufficient for the variety of third nilpotent groups — Example 5.7 suffices.

[5] A *variety* of groups is any class of groups closed with respect to the three operations of taking subgroups, homomorphic images and unrestricted direct products.

[6] However, as with any amalgam of two soluble groups where the amalgamation is central in one factor, this amalgam in embeddable in a soluble group — see NEUMANN [*2*].

COROLLARY 4.2. *If $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ is an amalgam of finite p-groups such that H is central in A, then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a finite p-group, and so a fortiori in a nilpotent group.*

This follows from the proof of Theorem 4.1 and the obvious remark that any permutational product of finite groups is finite.

One can prove a little more than this corollary, namely that $\mathfrak{A}$ is embeddable in a group of class bounded in terms of certain numerical invariants associated with $\mathfrak{A}$. For instance let the orders of the groups A, B, H, $[B, H]$, centre of B be p^α, p^β, p^γ, p^δ, p^ε respectively. Then one shows that the centre of $\varrho(B)$ is central in any permutational product P, so that the centre of P has order at least p^ε. Again one shows very easily that the order of P does not exceed p^N where

$$N=\alpha+\beta+\delta p^{\alpha-\gamma}.$$

This is because P/C certainly cannot have order more than $p^\alpha p^\beta$, this being the product of the order of A by the order of B, and C itself, as a subgroup of the direct product of $p^{\alpha-\gamma}$ copies of $[B, H]$, cannot have order more than $p^{\delta p^{\alpha-\gamma}}$. Putting these facts together we see that the class of P is not more than $\alpha+\beta+\delta p^{\alpha-\gamma}-\varepsilon-1$. These methods are very rough, and it is scarcely probable that they would yield anything like the real truth: in any case the true bound should not depend on p. However, the following example shows that the bound depends at least on α, β and γ, and *not* on the classes of A and B. It is based on Lemma 7.9 of [1], which we briefly quote:

Let G be an arbitrary group, g an element of G and d an element of G whose square commutes with g. Then for each $r\geqq 0$, the r-th term ${}^{r+1}G$ of the lower central series of G contains the commutator $[g^{2^r}, d]$.

EXAMPLE 4.3. Suppose that α, β, γ are three integers satisfying the inequalities:

$$\alpha>\gamma>1, \qquad \beta>\gamma+2.$$

Let A be a cyclic group of order 2^α:

$$A=G\mathfrak{p}(a; a^{2^\alpha}=1),$$

and let B be a group of order 2^β and class $\beta-\gamma-1$:

$$B=G\mathfrak{p}(b, c; b^{2^{\beta-\gamma}}=c^{2^\gamma}=1, c^{-1}bc=b^{-1}).$$

This group is the splitting extension of $G\mathfrak{p}(b)$ by $G\mathfrak{p}(c)$, the element c inducing the inverting automorphism of $G\mathfrak{p}(b)$. Next form an amalgam $\mathfrak{A}$ of A and B by identifying c with $a^{2^{\alpha-\gamma}}$. We shall show that $\mathfrak{A}$ is embeddable in no nilpotent group of class less than $\alpha+\beta-2\gamma$. To that end we let G be any group embedding $\mathfrak{A}$, and observe first of all that $(bc)^2$ commutes with a. In fact the relations of B imply that $(bc)^2=c^2$, so that $(bc)^2$ is even a power of a. Hence by the lemma quoted above, ${}^{\alpha-\gamma+1}G$ contains the commutator

$$[a^{2^{\alpha-\gamma}}, bc]=[c, bc]=[c, b]^c,$$

and therefore it of course contains $[c, b]=b^2$. It now follows very quickly that ${}^{\alpha+\beta-2\gamma-1}G$ contains the non-trivial element $b^{2^{\beta-\gamma-1}}$ of B, and hence that G is certainly not nilpotent of class less than $\alpha+\beta-2\gamma$.

Corollary 4.2 deals with the case of an amalgam of two finite p-groups with the amalgamation central in one factor; to get the case of arbitrary finite nilpotent groups we first prove an auxiliary lemma:

LEMMA 4.4. *Let $\mathfrak{A}_\alpha=(A_\alpha, B_\alpha; A_\alpha\cap B_\alpha=H_\alpha)$ be an amalgam of two groups which is embeddable in a group of some variety $\mathfrak{V}$, for each α in some index set $\mathfrak{M}$. Then if $A=\prod^\times A_\alpha$, $B=\prod^\times B_\alpha$, $H=\prod^\times H_\alpha$ are the restricted direct products of the A_α, B_α and H_α respectively, then the amalgam $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ is also embeddable in some group of the variety $\mathfrak{V}$.*

PROOF. Suppose that for each $\alpha\in\mathfrak{M}$, G_α is a group of the variety $\mathfrak{V}$ which embeds the amalgam $\mathfrak{A}_\alpha$. Then of course the direct product G of all the G_α lies[7]) in $\mathfrak{V}$, and we shall show that it embeds $\mathfrak{A}$. Firstly, G contains A and B, and they intersect in at least H in G. Next suppose that g is an element of A, B, so that

$$g=(\ldots, a_\alpha, \ldots)=(\ldots, b_\alpha, \ldots).$$

It follows that for each $\alpha\in\mathfrak{M}$, $a_\alpha=b_\alpha\in H_\alpha$; consequently $A\cap B$ is exactly H, and G embeds the amalgam.

THEOREM 4.5. *If $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ is an amalgam of two finite nilpotent groups such that H is central in A, then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a nilpotent group.*

PROOF. Let $p_1, p_2, \ldots, p_r$ be all the distinct primes occurring in the orders of A and B, and express A, B and H as direct products of their Sylow subgroups:

$$A=A_{p_1}\times A_{p_2}\times\cdots A_{p_r},$$

$$B=B_{p_1}\times B_{p_2}\times\cdots B_{p_r},$$

$$H=H_{p_1}\times H_{p_2}\times\cdots H_{p_r}.$$

We now have the situation of the preceding lemma. For each i, $\mathfrak{A}_i=(A_{p_i}, B_{p_i}; A_{p_i}\cap B_{p_i}=H_{p_i})$ is an amalgam of two p_i-groups with H_{p_i} central in A_{p_i}. Thus by Corollary 4.2, $\mathfrak{A}_i$ is embeddable in a group G_i which is nilpotent of class let us say n_i. If now we denote by n the maximum of the r numbers $n_1, n_2, \ldots, n_r$, all the groups $G_1, G_2, \ldots, G_r$ belong to the variety of groups which are nilpotent of class not exceeding n; and our theorem is proved by an obvious application of Lemma 4.4.

Once again, one can show that the amalgam is embeddable in a nilpotent group whose class is bounded in terms of $\mathfrak{A}$. With the notation of the theorem and that immediately following Corollary 4.2, the largest of the numbers $\alpha_i+\beta_i+\delta_i p_i^{\alpha_i-\gamma_i}-\varepsilon_i-1$ is a rough estimate.

[7]) Actually this lemma remains true if the words "variety $\mathfrak{V}$" are replaced by "any class $\mathfrak{V}$ of groups closed with respect to the operation of taking restricted direct products".

I think it is apposite at this point to deal with a conjecture I made some time ago in [4], and should have made in [1]. Let X, Y be any two groups, and let $J_X(Y)$ be the subgroup of Y consisting of those elements y such that $x \otimes y = 1$ for all $x \in X$, in the tensor product $X \otimes Y$. As was pointed out in [1], the following conditions are necessary for the amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ of two nilpotent groups of class 2 to be embeddable in a nilpotent group of the same class:

$$[J_A(B) \cap H, A] = [J_B(A) \cap H, B] = E.$$

The conjecture was that these are not sufficient. We now confirm this.

EXAMPLE 4.7. Let A be an infinite cyclic group generated by the element a, and let B be the second nilpotent product of an infinite cycle and a cycle of order 2:

$$B = G\not p\,(b, c; [[b, c], b] = [[b, c], c] = c^2 = 1).$$

We form our amalgam $\mathfrak{A}$ by putting $a^2 = b$. Then $\mathfrak{A}$ is not embeddable in a nilpotent group of class 2; if it were we would have

$$[a^2, c] = [b, c] \neq 1,$$

$$[a^2, c] = [a, c^2] = 1,$$

a manifest contradiction. On the other hand, the condition that $[J_A(B) \cap H, A] = E$ is trivially satisfied, since A is abelian. Next, it is easy to see that $A \otimes B$ is generated by $a \otimes b$ which has infinite order, and $a \otimes c$ which has order 2. It thus follows that $J_B(A) = E$; for if $a^m \otimes b = 1$ for some integer m, then also $(a \otimes b)^m = 1$, which yields the required result that $m = 0$. Hence the remaining condition is satisfied, and we have our assertion.

We end this section by posing some problems. Suppose that

$$\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$$

is an amalgam where A is abelian and B is nilpotent of class k. Is it true that that $\mathfrak{A}$ is embeddable in a ZA-group[8]) and likewise in a ZD-group? On the whole, it seems likely. In fact it is probably that such an amalgam is embeddable in a group whose lower central series terminates after $\omega + k - 1$ steps, and also one whose upper central series terminates after the same number of steps. (ω is the first transfinite ordinal.) For each k, there exists an amalgam of this sort such that the $(\omega + k - 2)$-th term of the lower central series of any group containing the amalgam is *non*-trivial: the following is an example.

EXAMPLE 4.6. Again A is a Prüfer group of type 2^∞:

$$A = G\not p\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots;\ a_1^2 = 1, a_{n+1}^2 = a_n,\ n = 1, 2, \ldots);$$

[8]) A ZA-group is one whose transfinite upper central series terminates in the whole group; a ZD-group one whose transfinite lower central series terminates in the unit subgroup.

while B is dihedral of order 2^{k+1}:

$$B = G\mathfrak{p}\left(a, b; a^{2^k} = b^2 = (ab)^2 = 1\right).$$

We form an amalgam by putting $H = G\mathfrak{p}(a_1) = G\mathfrak{p}(b)$, and let G be any group containing the amalgam. Then as before we see that ${}^{n+1}G$ contains $[a_n^{2^n}, ab] = [b, ab] = a^{-2}$ for each n, so that ${}^{\omega}G = \bigcap_{i=1}^{\infty} {}^{i}G$ contains a^2. This of course means that ${}^{\omega+k-2}G$ contains $a^{2^{k-1}}$, and is therefore non-trivial.

I have been unable to confirm that the $(\omega+k-2)$-th term of the upper central series of G must be strictly smaller than G, though this seems a probable result.

Finally we pose the following question without conjecture:

Is every amalgam of two nilpotent groups of finite exponent, where the amalgamation is central in one factor, embeddable in a nilpotent group?

5. Necessary conditions for the existence of generalised products

In this section we change our standpoint a little, and restrict attention to generalised products of two groups with an amalgamation. Suppose that A and B are any groups, H and $H\varphi$ subgroups of A and B respectively, isomorphic under the mapping φ. We shall look for conditions that certain generalised products of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exist — namely, those whose abbreviations are MV, GN_n and GS_2. If X stands for one of these properties, then by an almost word-for-word repitition of the proofs of Lemmas 8.1 and 8.2 of [1], we get the following lemmas.

LEMMA 5.1. *If the generalised free X-product of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exists it is G_0/N, where*

(i) *G_0 is the free regular X-product of A and B,*

(ii) *N is the normal closure in G_0 of the set of all elements of the form $h^{-1}h\varphi$, where h ranges over H.*

LEMMA 5.2. *With the same notation as in Lemma 5.1, and if X is GN_n or GS_2, the generalised free X-product of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exists if and only if the implication*

$$[a \in A,\ b \in B,\quad ab \in N] \Rightarrow [a \in H,\ b = a^{-1}\varphi]$$

always holds. If X is MV, then the condition is necessary for the existence of the generalised free MV-product, but not sufficient.

This last assertion is confirmed by examples given in [1]. We shall say that N is "tidy" in G_0 with respect to A and B if it has the property formulated in Lemma 5.2.

On the motivation of Lemma 5.2 we now prove some results, couched in rather more general terms than are strictly necessary for our main theme. In them, G_0 is *any* regular product of A and B, and N is the normal closure

in G_0 of the set of all elements of the form $h^{-1}h\varphi$, where h ranges over H. First a preparatory lemma:

LEMMA 5.3. *If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are any elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ are any elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ are any integers ± 1, then N contains the element* $\prod_{i=n}^{1} [h_i, a_i]^{\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j}$.

PROOF. This is by induction on n. For $n=1$, proceed as follows. Let a be any element of A and h any element of H; then since $h\,h^{-1}\varphi$ is in N and N is normal, it contains the commutator[9])

$$\begin{aligned}[a\,h, h\varphi\,h^{-1}] &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h\,[h, h\varphi\,h^{-1}]\\ &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h\,[h, h\varphi].\end{aligned}$$

However, $[h, h\varphi] = h^{-1}h^{-1}\varphi\,hh\varphi = (h^{-1}h\varphi)\,(h^{-2}\varphi h^2)\,(h^{-1}h\varphi) \in N$, so that also the commutator $k = [a, h\varphi\,h^{-1}]^h \in N$. Next,

$$\begin{aligned}k &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h = [a, h^{-1}]^h\,[a, h\varphi]\\ &= [h, a]\,[h\varphi, a]^{-1},\end{aligned}$$

so that the lemma is proved with $n=1$, $\varepsilon_1=1$. To get the case $\varepsilon_1=-1$, we simply take the inverse of k, that is

$$\begin{aligned}k^{-1} &= [h\varphi, a]\,[h, a]^{-1}\\ &= [h, a]^{-1}\,[h\varphi, a]^{[h, a]^{-1}}.\end{aligned}$$

Transforming this by $[h, a]$, we see that $[h, a]^{-1}[h\varphi, a] \in N$, as required.

Suppose now that $n \geqq 1$ and that N contains the element $x\,y$, where

$$x = \prod_{i=n}^{1} [h_i, a_i]^{\varepsilon_i} \in A,$$

$$y = \prod_{j=1}^{n} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j} \in [A, B],$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ being arbitrary elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ arbitrary elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ arbitrary integers ± 1. Let $h_{n+1}=h$, $a_{n+1}=a$ be further elements of H, A respectively, and let $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon=\pm 1$; then by the first part of the lemma, N contains the element $[h, a]^{\varepsilon}[h\varphi, a]^{-\varepsilon}$, and therefore the product

$$\begin{aligned}(x\,y)^{[a, h]^{\varepsilon}}\,[h, a]^{\varepsilon}\,[h\varphi, a]^{-\varepsilon} &= [h, a]^{\varepsilon}\,x\cdot y\,[h\varphi, a]^{-\varepsilon}\\ &= \prod_{i=n+1}^{1} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n+1} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j}.\end{aligned}$$

This completes the induction, and the proof of the lemma.

[9]) For all commutator identities used here see § 2 of [1].

THEOREM 5.4. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, there is a homomorphism δ of $[A, H\varphi]$ onto $[A, H]$ defined by*

$$[a, h\varphi]\,\delta = [a, h].$$

PROOF. If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are any elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ any elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ any integers ± 1, then it is enough to show that the equation $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i\varphi]^{\varepsilon_i} = 1$ has the equation $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} = 1$ as a necessary consequence. As we saw in the preceding lemma, N contains the element $\prod_{i=n}^{1} [a_i, h_i]^{-\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n} [a_j, h_j\varphi]^{\varepsilon_j}$. If now $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i\varphi] = 1$, then N contains $\prod_{i=n}^{1} [a_i, h_i]^{-\varepsilon_i}$; but N is tidy with respect to A and B, so that we must conclude that $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} = 1$.

In a precisely analagous fashion we prove the following result.

THEOREM 5.5. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, there is a homomorphism δ^0 of $[H, B]$ onto $[H\varphi, B]$ defined by*

$$[h, b]\,\delta^0 = [h\varphi, b].$$

Finally, we establish the necessary consonance between δ and δ^0.

THEOREM 5.6. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, and if d is any element of the intersection $[A, H\varphi] \cap [H, B]$, then*

$$d\delta \in H, \qquad d\delta\varphi = d\delta^0.$$

PROOF. By theorems 5.3 and 5.4, N contains the elements $n_1 = d\delta \cdot d$ and $n_2 = d\delta^0 \cdot d$, and consequently their quotient:

$$\begin{aligned} n_1 n_2^{-1} &= (d\delta \cdot d)\,(d^{-1} \cdot d^{-1}\,\delta^0) \\ &= d\delta \cdot d^{-1}\,\delta^0. \end{aligned}$$

But N is tidy, and $d\delta \in A$, $d\delta^0 \in B$, so that we conclude that $d\delta \in H$ and that $d\delta\varphi = d\delta^0$, as required.

Suppose now that A and B belong to some variety of $\mathfrak{V}$ groups. Then associated with $\mathfrak{V}$ there is a set V of words — consisting of the identical relations satisfied by all the groups in $\mathfrak{V}$ (see for instance GARRETT BIRKHOFF [*13*]) — and then of course an MV-product. It follows easily from results of MORAN in [*14*] (see [*1*, (4.7)]) that the existence of the generalised free MV-product of A and B with H and $H\varphi$ amalgamated according to φ is equivalent to the embeddability of the corresponding amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ in a group belonging to the variety $\mathfrak{V}$. We have therefore obtained the result promised in the second paragraph of the preceding section: in Theorems 5.4–5.6 we simply take G_0 to be the free regular MV-product of A and B.

The necessary conditions provided by the theorems are strong in the sense that all the other sets of necessary conditions that I have been able to find are easy consequences of them. Indeed, as has been said already, they are also sufficient for the case of GN_2-products. That being the case, it would appear likely that they are also sufficient for the case (for instance) of GS_2-products. Unfortunately this is not so, as the following example shows.

EXAMPLE 5.7. A and B are both dihedral groups of order 8:

$$A = G\mathfrak{p}\left(a, b\,;\, a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = 1\right),$$

$$B = G\mathfrak{p}\left(c, d\,;\, c^4 = d^2 = (c\,d)^2 = 1\right);$$

we take H to be the subgroup $G\mathfrak{p}\,(a^2, b)$ of A, and $H\varphi$ the subgroup $G\mathfrak{p}\,(c^2, d)$ of B, the isomorphism φ being generated by the correspondences $a^2 \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c^2$. We show three things about this system of groups.

(i) *If G is any group containing the amalgam so formed, then b and d are contained in all terms of the lower central series of G.* Clearly they are in the first term, which is just G itself. Now suppose that σ is any ordinal number, and that $b,\ d \in {}^{\lambda}G$ for all $\lambda < \sigma$. If σ is a limit number, $G = \bigcap_{\lambda<\sigma} {}^{\lambda}G$, whence it is obvious that $b,\ d \in {}^{\sigma}G$; if not, ${}^{\sigma}G = [{}^{\sigma-1}G, G]$ and so it contains

$$[a, b] = a^2 = d, \qquad [c, d] = c^2 = b.$$

This gives us the assertion. As a consequence, G certainly cannot be locally nilpotent, for in the contrary case the subgroup generated by the amalgam would be nilpotent. Hence G cannot be a ZA-group, nor a ZD-group. It is instructive to note that if φ is replaced by the isomorphism generated by $a^2 \leftrightarrow c^2$, $b \leftrightarrow d$, the amalgam so formed is embeddable in a nilpotent group of class 2. For instance the splitting extension of a cyclic group $G\mathfrak{p}\,(c)$ of order 4 by a dihedral group $G\mathfrak{p}\left(a, b;\ a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = 1\right)$, a inducing the identity automorphism and b the inverting automorphism of $G\mathfrak{p}\,(c)$, embeds this amalgam, and is nilpotent of class 2. This amply demonstrates the importance of the amalgamating isomorphisms.

(ii) *Further, the amalgam is embeddable in no metabelian group; in other words, the generalised free GS_2-product does not exist.* For if it were, we would have a metabelian group with the generators a, b, c, d and further relations

$$a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = c^4 = d^2 = (c\,d)^2 = 1, \qquad c^2 = b, \qquad a^2 = d.$$

Then, since $a^2 = [a, b]$ and our group is metabelian, the following chain of equalities is readily established:

$$[a, c] = [a, c]^{a^2} = [a, c]^{d} = [a, c^3] = [a, c]\,[a, c^2]^{c} = [a, c]\,[a, b]^{c}.$$

These entail that $[a, b] = 1$, that is, a collapse of the group A. In fact it is easy to see that any metabelian group satisfying the above relations must

be a homomorphic image of the four-group. On the other hand, the generalised free product F of the amalgam is soluble of length 3, because F/H is the free product of two cycles of order 2, which is metabelian. So the amalgam has the strange property that *every* group generated by it is soluble of length exactly 3.

(iii) *Nevertheless, the system satisfies the necessary conditions provided in Theorems* 5.4–5.6. The proof of this fact is fairly complicated, and we shall content ourselves with a brief outline.

Firstly we need some information on commutators in the free metabelian product G_0 of A and B. This is a metabelian group with generators and further relations as follows:

$$G_0 = G\mathfrak{p}\left(a, b, c, d; a^4 = b^2 = (ab)^2 = c^4 = d^2 = (cd)^2 = 1\right).$$

Consider $[g, c^2]$, for any $g \in G_0$. Then, as $c^4 = 1$ and $c^2 \in G_0'$,

$$1 = [g, c^4] = [g, c^2]\,[g, c^2]^{c^2} = [g, c^2]^2,$$

that is, $[g, c^2]$ is either trivial or of order 2. We wish to show that $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ are both of order exactly 2. To that end, we construct [10]) a group K which is a homomorphic image of G_0, in such a way that the images of these commutators are non-trivial. Let T be an elementary abelian group of order 8 with generators t_1, t_2, t_3, and consider the automorphisms π and $\varkappa$ of T defined by

$$t_1\pi = t_1 t_2, \quad t_2\pi = t_2 t_3, \quad t_3\pi = t_3,$$
$$t_1\varkappa = t_1, \quad t_2\varkappa = t_2 t_3, \quad t_3\varkappa = t_3.$$

It is routine to verify that π has order 4, $\varkappa$ and $\pi\varkappa$ have order 2, and therefore that π and $\varkappa$ together generate a dihedral group Δ of order 8. Our group K is the splitting extension of T by Δ:

$$K = G\mathfrak{p}(t_1, t_2, t_3, \pi, \varkappa; t_1^2 = t_2^2 = t_3^2 = [t_1, t_2] = [t_1, t_3] = [t_2, t_3] = 1,$$
$$\pi^4 = \varkappa^2 = (\pi\varkappa)^2 = 1,$$
$$t_1^{\varkappa} = t_1, \quad t_2^{\varkappa} = t_1 t_2, \quad t_3^{\varkappa} = t_3,$$
$$t_1^{\pi} = t_1 t_2, \quad t_2^{\pi} = t_2 t_3, \quad t_3^{\pi} = t_3).$$

One readily sees that

a) K is nilpotent of class 3, therefore metabelian;

b) K may be generated by t_1, π and $\varkappa$;

c) $[t_1, \pi^2] = [t_1, \pi]\,[t_1, \pi]\,[[t_1, \pi], \pi] = [t_2, \pi] = t_3 \neq 1$.

Now, by virtue of the fact that G_0 is the *free* metabelian product of two dihedral groups of order 8, we see that the mapping which takes b onto 1,

[10]) I am grateful to Dr. M. F. Newman for this method of construction.

a onto t_1, c onto π and d onto $\varkappa$ may be extended to a homomorphism of the whole of G_0 onto K. Since $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ are both mapped onto the non-trivial element $[t_2, \pi]$, they can neither of them be trivial. Consequently, by the above remarks, they are both of order 2; and a completely parallel argument shows that $[a^2, d]$ and $[a^2, cd]$ are also of order 2.

Next we have to show that the mapping δ of the set of all commutators of the form $[a, h\varphi]$ (with a ranging over A and h over H) onto $[A, H]$ defined by

$$[a, h\varphi]\,\delta = [a, h]$$

generates a homomorphism of $[A, H\varphi]$ onto $[A, H]$. This is equivalent to showing that any relation between the $[a, h\varphi]$ in $[A, H\varphi]$ is reflected as a relation between their images under δ in $[A, H]$. The proof of this fact, though based on completely elementary ideas, is very laborious, and we shall merely indicate how it goes. Since $[A, H\varphi]$ is abelian (the cartesian of any metabelian product is abelian), any relation is of the form $r = \prod_{a\in A, h\in H} [a, h\varphi]^{\lambda_{ah}} = 1$, and we have to show that likewise $r' = \prod_{a\in A, h\in H} [a, h]^{\lambda_{ah}} = 1$. Now the element r' is some power $a^{2\xi}$ of a. It is not hard to see that $[A, H\varphi]$ is generated by the commutators $[a, c^2]$, $[a, d]$, $[a^2, d]$, $[ab, c^2]$, $[ab, d]$, $[b, c^2]$ and $[b, d]$, and in terms of these new generators, suppose the powers to which $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ occur in r are ϱ and σ respectively. It turns out that $\varrho + \sigma = \xi$, and the problem reduces to showing that $\varrho + \sigma$ is even. This we do by mapping G_0 once more onto K, this time by the rule $b \to 1$, $a \to t_1$, $c \to \pi$, $d \to \varkappa$. Then r goes over into $[t_1, \pi^2]^{\varrho+\sigma}$; since it is the identity, we conclude that $\varrho + \sigma$ is even, as required.

In a similar way we see that the mapping δ^0 of the set of all $[h, b]$ onto $[H\varphi, B]$ defined by

$$[h, b]\,\delta^0 = [h\varphi, b]$$

generates a homomorphism of $[H, B]$ onto $[H\varphi, B]$.

Lastly we have to establish the consonance between δ and δ^0 on the intersection $[A, H\varphi] \cap [H, B]$. This follows much the same sort of pattern as the previous proofs; one first shows that any element d of the intersection can be expressed on the one hand in the form

$$[a, c^2]^{\alpha_1}\,[a, d]^{\alpha_2}\,[a^2, d]^{\alpha_3}\,[ab, c^2]^{\alpha_4}\,[ab, d]^{\alpha_5}\,[b, c^2]^{\alpha_6}\,[b, d]^{\alpha_7},$$

and on the other hand in the form

$$[a^2, c]^{\beta_1}\,[b, c]^{\beta_2}\,[b, c^2]^{\beta_3}\,[a^2, cd]^{\beta_4}\,[b, cd]^{\beta_5}\,[b, c^2]^{\beta_6}\,[b, d]^{\beta_7}.$$

The image of d under δ is therefore $a^{2(\alpha_1+\alpha_4)}$, that under δ^0 is $c^{2(\beta_1+\beta_4)}$. Mapping G_0 onto K in the right way now gives that $[t_1, \pi^2]^{\alpha_1+\alpha_4} = 1$, so that $\alpha_1 + \alpha_4$ is even and $d\,\delta = 1$. In the same way $d\,\delta^0 = 1$, and δ and δ^0 are indeed consonant. This completes the example.

I have no idea what extra conditions have to be added to obtain a set of necessary and sufficient conditions for the existence of the relevant generalised product; indeed they are likely to differ from product to product, and to increase in complication the further away one gets from second nilpotent products.

6. Metabelian products

We now take a closer look at the generalised GS_2-product of two groups with an amalgamation. Once again we consider an amalgam

$$\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$$

and this time try and find out whether any conditions of a different sort from those in the preceding section are possibly necessary and sufficient for the existence of the generalised free GS_2-product of $\mathfrak{A}$.

Sufficient conditions immediately spring to mind; for instance that H be central in both constituents, or a free regular metabelian factor of them. In the first case the generalised direct product of $\mathfrak{A}$, and in the second case the free metabelian product of H with its metabelian complements in A and B, are generalised GS_2-products of $\mathfrak{A}$. (The first of these claims is trivially easy to justify, the second is still easy, though not trivial.)

Obvious necessary conditions are the following:

$$(6.1) \qquad [A' \cap H, B'] = [B' \cap H, A'] = [[A, H], A'] = [[B, H], B'] = E.$$

This follows immediately from the definition of GS_2-product; any generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$ satisfies

$$[A', B'] = [G', [A, B]] = E.$$

That (6.1) are not also sufficient is readily verified. First observe that if both of A and B are nilpotent of class 2, (6.1) are automatically satisfied. Thus we only need to take the example of Neumann quoted in § 4, or Example 5.7 to see this. In fact it is not difficult to show that (6.1) are consequences of the necessary conditions given in Theorems 5.4 and 5.5; cf. Theorem 8.7 in [1].

In [2], B. H. Neumann shows that if $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ is any amalgam such that A and B are soluble of lengths m and n respectively, and H is central in A, then any permutational product of $\mathfrak{A}$ is soluble of length not more than $m + n - 1$. In particular, it follows that if A is abelian and B is metabelian, any permutational product of is metabelian; and therefore P is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$. We shall show just a little more than this, namely that if A is abelian and the amalgam satisfies (6.1) — which now condenses to the single requirement that $[[B, H], B']$ should be the unit

subgroup — then any permutational product of $\mathfrak{A}$ is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$.

Firstly note that in any permutational product P of $\mathfrak{A}$, the cartesian $[\varrho(A), \varrho(B)]$ is abelian, indeed 2.7 tells us that it is in the least variety containing $[B, H]$. All we have to show, then, is that

$$[\varrho(A'), \varrho(B')] = [P', [\varrho(A), \varrho(B)]] = E.$$

As A is abelian, this amounts to showing that $\varrho(B')$ commutes elementwise with $[\varrho(A), \varrho(B)]$.

LEMMA 6.2. *If $\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$ is any amalgam such that H is central in A and $[[B, H], B'] = E$, then in any permutational product of the amalgam $\varrho(B')$ commutes elementwise with the cartesian $[\varrho(A), \varrho(B)]$.*

PROOF. Let S, T be left transversals of A and B respectively modulo H, and let W be the set of all triplets (s, t, h) with $s \in S$, $t \in T$, $h \in H$. To get our result we choose any elements a, b, b' out of A, B, B' respectively and show that the effects of $[\varrho(a), \varrho(b)]\,\varrho(b')$ and $\varrho(b')\,[\varrho(a), \varrho(b)]$ on an arbitrary triplet in W are identical. This is done by simple computation; in what follows the s_i and σ_i are in S, the t_i and τ_i in T, and the h_i and χ_i in H. Firstly

$$\begin{aligned}
(s, t, h)^{\varrho(a^{-1})} &= (s_1, t, h_1) && \text{where} && s\,h\,a^{-1} = s_1\,h_1;\\
(s_1, t, h_1)^{\varrho(b^{-1})} &= (s_1, t_1, h_2) && \text{where} && t\,h\,b_1^{-1} = t_1\,h_2;\\
(s_1, t_1, h_2)^{\varrho(a)} &= (s_2, t_1, h_3) && \text{where} && s_1\,h_2\,a = s_2\,h_3;\\
(s_2, t_1, h_3)^{\varrho(b\,b')} &= (s_2, t_2, h_4) && \text{where} && t_1\,h_3\,b\,b' = t_2\,h_4.
\end{aligned}$$

In the same way

$$\begin{aligned}
(s, t, h)^{\varrho(b')} &= (s, \tau_1, \chi_1) && \text{where} && t\,h\,b' = \tau_1\,\chi_1;\\
(s, \tau_1, \chi_1)^{\varrho(a^{-1})} &= (\sigma_1, \tau_1, \chi_2) && \text{where} && s\,\chi_1\,a^{-1} = \sigma_1\,\chi_2;\\
(\sigma_1, \tau_1, \chi_2)^{\varrho(b^{-1})} &= (\sigma_1, \tau_2, \chi_3) && \text{where} && \tau_1\,\chi_2\,b^{-1} = \tau_2\,\chi_3;\\
(\sigma_1, \tau_2, \chi_3)^{\varrho(a)} &= (\sigma_2, \tau_2, \chi_4) && \text{where} && \sigma_1\,\chi_3\,a = \sigma_2\,\chi_4;\\
(\sigma_2, \tau_2, \chi_4)^{\varrho(b)} &= (\sigma_2, \tau_3, \chi_5) && \text{where} && \tau_2\,\chi_4\,b = \tau_3\,\chi_5.
\end{aligned}$$

We have to show that $\sigma_2 = s_2$, $\tau_3 = t_2$, $\chi_5 = h_4$. Looking at the S-components first, and using throughout the fact that H is central in A, we get that

$$\begin{aligned}
s_2 &= s_1\,a\,h_2\,h_3^{-1} = s\,h\,h_1^{-1}\,h_2\,h_3^{-1},\\
\sigma_2 &= \sigma_1\,a\,\chi_3\,\chi_4^{-1} = s\,\chi_1\,\chi_2^{-1}\,\chi_3\,\chi_4^{-1}.
\end{aligned}$$

Consequently $s_2 = \sigma_2 = s$, $s_1 = \sigma_1$ and

$$1 = h\,h_1^{-1}\,h_2\,h_3^{-1} = \chi_1\,\chi_2^{-1}\,\chi_3\,\chi_4^{-1}, \qquad h_2\,h_3^{-1} = \chi_3\,\chi_4^{-1}. \tag{6.3}$$

Next, the T-components:

$$\tau_3 = \tau_2 \chi_4 b \chi_5^{-1} = \tau_1 \chi_2 b^{-1} \chi_3 \chi_4^{-1} b \chi_5^{-1}$$
$$= t\, h\, b' \chi_1^{-1} \chi_2 b^{-1} \chi_3^{-1} \chi_4 b \chi_5^{-1} = t\, h\, b' [\chi_3^{-1} \chi_4, b] \chi_5^{-1},$$

since $\chi_1 \chi_2^{-1} \chi_3 \chi_4^{-1} = 1$ and H is abelian. Further

$$t_2 = t_1 h_3 b\, b' h_4^{-1} = t\, h_1 b^{-1} h_2^{-1} h_3 b\, b' h_4^{-1} = t\, h_1 h_2^{-1} h_3 [h_2^{-1} h_3, b]\, b' h_4^{-1}.$$

Applying (6.3) we see that

$$t_2 = t\, h [\chi_3^{-1} \chi_4, b]\, b' h_4^{-1}.$$

But by assumption B' centralises $[B, H]$, so that since $h_4 \in H$, $\chi_5 \in H$, we conclude that $t_2 = \tau_3$, and hence that $h_4 = \chi_5$. This finishes the proof of the lemma.

THEOREM 6.4. *Let $\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$ be an amalgam where A is abelian and $[[B, H], B'] = E$. Then the generalised free GS_2-product of $\mathfrak{A}$ exists.*

PROOF. We form any permutational product P of the amalgam. First we remark that $\varrho(A') = E$, so that a fortiori $[\varrho(A'), \varrho(B')] = E$. Next, P' is generated by $\varrho(B')$ and $[\varrho(A), \varrho(B)]$; but now the cartesian is abelian, and the previous lemma gives that $\varrho(B')$ centralises the cartesian. But this means that the whole of P' centralises the cartesian, and hence that P is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$. But we know that if *any* GS_2-product exists, so does the *free* one ([*1*, Theorem 4.6]), and our theorem is proved.

We cannot in the proof of Theorem 6.4 replace the commutativity of A by the requirement that H be central in A; though it is likely that the result will still be true under this less restrictive assumption. This is about as far as one could hope to go in this direction, as the previous examples indicate. One can show that if $\mathfrak{A}$ satisfies the three conditions

$$[[B, H], B'] = [H, B'] = [A, H] = E,$$

then the generalised free GN_2-product of $\mathfrak{A}$ exists. This is again done with the use of permutational products, the only point to confirm being that in any permutational product, $\varrho(A')$ and $\varrho(B')$ commute elementwise: this is straightforward, and much the same in pattern as the proof of Lemma 6.3.

References

[*1*] WIEGOLD, J.: Nilpotent products of groups with amalgamations. Publ. Math. Debrecen **6**, 131–168 (1959).

[*2*] NEUMANN, B. H.: Permutational products of groups. J. Austral. Math. Soc. (in print).

[*3*] NEUMANN, B. H.: An essay on free products of groups with amalgamations. Phil. Trans. Roy. Soc. London A **246**, 503–554 (1954).

[*4*] WIEGOLD, J.: Nilpotent products of groups with amalgamations. Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1958.

[5] GOLOVIN, O. N.: Nilpotent products of groups. Mat. Sb. **27** (69), 427–454 (1950). – Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II **2**, 89–115 (1956).
[6] MORAN, S.: The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product. J. London Math. Soc. **33**, 237–245 (1958).
[7] NEWMAN, M. F.: On groups all of whose proper homomorphic images are nilpotent. Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1960.
[8] BAER, R.: Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law. Amer. J. Math. **71**, 706–742 (1949).
[9] SCHREIER, O.: Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 161–183 (1927).
[10] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: A contribution to the embedding theory of group amalgams. Proc. London Math. Soc. (3) **3**, 245–256 (1953).
[11] GOLOVIN, O. N.: On the metabelian product of groups. Mat. Sb. **28** (70), 431–444 (1951). – Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II **2**, 117–131 (1956).
[12] MACHENRY, T. S.: The tensor product and the second nilpotent product of groups. Math. Z. **73**, 134–145 (1960).
[13] BIRKHOFF, G.: On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Phil. Soc. **31**, 433–454 (1935).
[14] MORAN, S.: Associative operations on groups. I. Proc. London Math. Soc. (3) **6**, 581–596 (1956).

Department of Mathematics, University College, Keele, Staffs, (England)

(Eingegangen am 13. Mai 1960)

MacRobert, T. M.
Math. Zeitschr. 75, 79—82 (1961)

Fourier Series for *E*-functions

By
THOMAS M. MACROBERT

In a former paper [1] the expansion

$$(1)\qquad \begin{cases} \Gamma(\tfrac{1}{2})\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta) = E\left(\begin{matrix}\tfrac{1}{2},\alpha_1,\ldots,\alpha_p:z\\ 1,\varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}\right) + \\ \qquad + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\,E\left(\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}\right)\cos n\vartheta, \end{cases}$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $|\operatorname{amp} z|<\pi$, was obtained.

It will here be proved that, subject to the same conditions,

$$(2)\qquad \begin{cases} \Gamma(\tfrac{3}{2})\sin\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\vartheta) \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\,E\left(\begin{matrix}\tfrac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}\right)\sin(2n+1)\vartheta. \end{cases}$$

The proof depends on the Fourier series

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(\tfrac{3}{2})\,\Gamma(2-\zeta)}{\Gamma(\tfrac{3}{2}-\zeta)}(\sin\vartheta)^{1-2\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta;n)}{(2-\zeta;n)}\sin(2n+1)\vartheta,$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $R(1-2\zeta)\geqq 0$, and $(\zeta;0)=1$, $(\zeta;n)=\zeta(\zeta+1)\ldots(\zeta+n-1)$, $n=1,2,3,\ldots$.

In proving (3) certain integrals are required, based on the known integral [2, p. 340]

$$(4)\qquad \int_0^{\pi/2}\cos(m-n)\vartheta\,(\cos\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta = \frac{\pi\,\Gamma(m+n-1)}{2^{m+n-1}\Gamma(m)\,\Gamma(n)},$$

where $R(m+n)>1$.

Now let $m-n$ be an integer and $R(m+n)>0$; then

$$\int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta = \int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta - (-1)^{m-n}\int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\varphi\,(\sin\varphi)^{m+n-2}\,d\varphi,$$

where $\varphi=\pi-\vartheta$.

Hence, if $m-n$ is an even integer, $R(m+n)>0$,

$$(5)\qquad \int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta = 0;$$

while, if $m-n$ is an odd integer $R(m+n)>2$,

$$\int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta(\sin\vartheta)^{m+n-2}d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\vartheta(\sin\vartheta)^{m+n-2}d\vartheta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos(m-n-1)\vartheta(\sin\vartheta)^{m+n-3}d\vartheta - \int_0^{\pi/2}\cos(m-n+1)\vartheta(\sin\vartheta)^{m+n-3}d\vartheta$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(m-n-1)\vartheta(\cos\vartheta)^{m+n-3}d\vartheta \\ \displaystyle+\int_0^{\pi/2}\cos(m-n+1)\vartheta(\cos\vartheta)^{m+n-3}d\vartheta\end{array}\right],$$

and from (4) it follows that this is equal to

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\left[\frac{\pi\Gamma(m+n-2)}{2^{m+n-2}\Gamma(m-1)\Gamma(n)}+\frac{\pi\Gamma(m+n-2)}{2^{m+n-2}\Gamma(m)\Gamma(n-1)}\right].$$

Hence, if $m-n$ is an odd integer and if $R(m+n)>0$,

$$\int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta(\sin\vartheta)^{m+n-2}d\vartheta=(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\frac{\pi\Gamma(m+n-1)}{2^{m+n-2}\Gamma(m)\Gamma(n)}. \tag{6}$$

Now, let

$$(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}=\sum_{r=1}^{\infty}a_r\sin r\vartheta,$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $R(1-2\zeta)\geqq 0$.

Then, if r is even,

$$\tfrac{1}{2}\pi a_r=\int_0^{\pi}\sin r\vartheta(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}d\vartheta=0$$

by (5); while, if r is odd, say $r=2n+1$,

$$\frac{1}{2}\pi a_{2n+1}=\int_0^{\pi}\sin(2n+1)\vartheta(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}d\vartheta=(-1)^n\frac{\pi\Gamma(2-2\zeta)}{2^{1-2\zeta}\Gamma(2-\zeta+n)\Gamma(1-\zeta-n)},$$

by (6). Hence

$$a_{2n+1}=\frac{\Gamma(2-2\zeta)(\zeta;n)}{2^{-2\zeta}\Gamma(2-\zeta)\Gamma(1-\zeta)(2-\zeta;n)}$$

$$=\frac{2\Gamma(\tfrac{3}{2}-\zeta)(\zeta;n)}{\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(2-\zeta)(2-\zeta;n)};$$

and from this (3) is obtained.

The Barnes integral [2, p. 374]

$$E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\Pi\Gamma(\alpha_r-\zeta)}{\Pi\Gamma(\varrho_s-\zeta)}z^{\zeta}d\zeta \tag{7}$$

will also be required. Here the integral is taken up the η-axis, with loops, if necessary, to ensure that the origin lies to the left of the contour and the points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ to the right of the contour. Zero and negative integral values of the α's and ϱ's are excluded, and the α's must not differ by integral

values. When $p<q+1$ the contour is bent to the left at each end. The formula holds for $|\operatorname{amp} z|<\pi$, and for $|\operatorname{amp} z|<\frac{1}{2}(p-q+1)\pi$ if $p>q+1$.

Now, from (7), the expression on the right of (2) can be written

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\frac{3}{2}+n-\zeta)\,\Pi\Gamma(\alpha_r+n-\zeta)}{\Gamma(2+2n-\zeta)\,\Pi\Gamma(\varrho_s+n-\zeta)}\,z^{\zeta}\,d\zeta\sin(2n+1)\,\vartheta.$$

Here replace ζ by $\zeta+n$ and then change the order of summation and integration, so getting

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\frac{3}{2}-\zeta)\,\Pi\Gamma(\alpha_r-\zeta)}{\Gamma(2-\zeta)\,\Pi\Gamma(\varrho_s-\zeta)}\,z^{\zeta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta;n)}{(2-\zeta;n)}\sin(2n+1)\,\vartheta\right\}d\zeta;$$

and, on applying (3), the expression on the left of (2) is obtained.

From (1) and (2) the integrals

$$(8)\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos n\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta)\,d\vartheta\\ \qquad=\Gamma(\frac{1}{2})\,z^{-n}\,E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{pmatrix},\end{cases}$$

$$(9)\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(2n+1)\,\vartheta\sin\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\vartheta)\,d\vartheta\\ \qquad=\Gamma(\frac{1}{2})\,z^{-n}\,E\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{pmatrix},\end{cases}$$

where $n=0, 1, 2, \ldots$, can be deduced.

Now the integral in (8) can be written

$$2\int_0^{\pi/2}\cos 2n\varphi\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$

and, since this is equal to the same integral from 0 to π, (8) can be written

$$(10)\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos n\,2n\varphi\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\varphi)\,d\varphi\\ \qquad=\Gamma(\frac{1}{2})\,z^{-n}\,E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Hence, on writing $\sin(2n+1)\,\vartheta\sin\vartheta$ in (9) in the form

$$\tfrac{1}{2}\{\cos 2n\vartheta-\cos(2n+2)\,\vartheta\}$$

and applying (10), the relation

$$(11)\qquad\begin{cases}E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{pmatrix}-z^{-1}E\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n+1,\ldots,\alpha_p+n+1:z\\ 3+2n,\varrho_1+n+1,\ldots,\varrho_q+n+1\end{pmatrix}\\ \qquad=2E\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{pmatrix}\end{cases}$$

is obtained.

This is a special case of the relation

$$\left\{\begin{aligned} &E\left(\begin{matrix}h,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ 2h,\varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}:z\right)-z^{-1}E\left(\begin{matrix}h+1,\alpha_1+1,\ldots,\alpha_p+1\\ 2h+2,\varrho_1+1,\ldots,\varrho_q+1\end{matrix}:z\right)\\ &\qquad=2E\left(\begin{matrix}h+1,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ 2h+1,\varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}:z\right),\end{aligned}\right. \tag{12}$$

which can be verified by comparing coefficients in the case $p=q=0$, and then generalising.

References

[1] MACROBERT, T. M.: Math. Z. **71**, 143–145 (1959).
[2] MACROBERT, T. M.: Functions of a Complex Variable, 4th edit. London 1954.

Dept. of Math., University of Glasgow (Scotland)

(Eingegangen am 30. Mai 1960)

FELSCHER, W.
Math. Zeitschr. 75, 83–114 (1961)

Jordan-Hölder-Sätze und modular geordnete Mengen

Von
WALTER FELSCHER*

Der Jordansche Satz, daß die Hauptreihen einer Gruppe alle gleich lang sind, wurde bereits von DEDEKIND als Spezialfall eines Satzes über modulare Verbände erkannt (DEDEKIND [*1*], § 6, Th. XVI); spätere Autoren haben nicht nur den Jordan-Hölderschen Satz über die Kompositionsreihen einer Gruppe aus verbands- oder ordnungstheoretischen Sätzen abgeleitet, sondern sogar noch Verschärfungen gefunden, welche weit über die klassischen Ergebnisse hinausreichen. Weiterhin war es ebenfalls schon DEDEKIND bekannt (DEDEKIND [*1*], § 6, Th. X), daß ein Verband genau dann modular ist, wenn in jedem seiner Teilverbände eine Aussage gilt — die „Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung" — welche der Behauptung des Jordanschen Satzes über die Hauptreihen einer Gruppe entspricht. Zu diesen Beziehungen zwischen Kettensätzen und Modularität kamen neue, verwickeltere hinzu, als man die Forderung nach Modularität der untersuchten Verbände abschwächen mußte, um den Jordan-Hölderschen Satz über die Kompositionsreihen einer Gruppe aus verbandstheoretischen Überlegungen spezialisieren zu können.

Dies nun ist Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes: Es soll die Gültigkeit der Kettensätze vom Typus des Jordan-Hölderschen für geordnete Mengen (partially ordered sets) untersucht und die zu beweisenden unter diesen Sätzen sollen aus einem Punkte und zusammenhängend entwickelt werden. Umgekehrt findet man Charakterisierungen von Klassen geordneter Mengen je nach den Voraussetzungen, die für verschiedene Kettensätze gemacht werden müssen; die modular geordneten Mengen werden dabei eingeführt als solche, in denen diesen Zwecken ganz besonders günstige Verhältnisse vorliegen, und die Verbände unter ihnen sind genau die modularen Verbände. Die Abstraktion von Verbänden zu geordneten Mengen — zuerst von ORE [*1*] durchgeführt — ist dabei angebracht, um die Beziehungen zwischen Kettensätzen und Modularität (nebst ihren verschiedenen Abschwächungen) in ein helles Licht zu bringen: neben den Gesetzen treten auch ihre Gründe deutlicher hervor, und es zeigt sich die Verwandtschaft der verschiedenen Begriffe. Sie ist überdies notwendig, um schon die *Verbände* zu kennzeichnen, in denen gewisse Kettensätze gelten: Sätze nämlich, die von den Beziehungen handeln, welche zwischen endlichen, nicht mehr zu verfeinernden Ketten bestehen — die Gesamtheit der durch solche Ketten zu verbindenden Verbandselemente, die der natürliche Bereich für die Untersuchung derartiger Sätze ist, bildet im Allgemeinen aber keinen Verband mehr. Und will man die Theorie der

*) Habilitationsschrift Freiburg i. Br. 1960.

Kompositionsreihen in Gruppen aus verbands- oder ordnungstheoretischen Sätzen spezialisieren, so hat man die Menge der nachinvarianten Untergruppen zu betrachten, die gleichfalls nicht ohne Weiteres ein Verband ist.

Im Einzelnen wird zunächst im Teil 0 die verwendete Terminologie beschrieben. Im Teil 1 wird die Theorie der Intervallfunktionen in geordneten Mengen entwickelt — die Gültigkeit gewisser Kettensätze läßt sich dann kennzeichnen durch die Additivität aller Elemente einer solchem Kettensatze zugeordneten Schar von Intervallfunktionen; für den einfachsten solcher Kettensätze, die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung, wurde eine derartige Kennzeichnung schon von KOŘINEK [2], [3] (Abschnitt 5) vorbereitet. Teil 2 bringt, anknüpfend an ORE [1] und BENADO [4], die Reduktionstheorie der Jordan-Hölder-Sätze. Betrachtet man den Hölderschen Beweis seines berühmten Satzes (HÖLDER [1], p. 37), so liegt dort die Hauptarbeit im Nachweis jenes Sachverhaltes, der von der heute meist als erstem Isomorphiesatz bezeichneten Aussage beschrieben wird; ist dieser einmal bewiesen, dann bleibt als Rest des Beweises nur noch das schematische Umformen gewisser Hilfs-Kompositionsreihen, wie es schon im Beweis des Jordanschen Satzes auftritt (JORDAN [1], p. 42). Diese Beobachtung legt es nahe, den Beweis von Kettensätzen in geordneten Mengen auf solche Fälle zu reduzieren, in denen die betrachteten Ketten sich in dafür geeigneter Lage (wie jener mit dem ersten Isomorphiesatz zu behandelnden) befinden, und diese Zurückführung vermöge des Studiums bestimmter schematischer Umformungen von Hilfsketten. Die dem Verfasser erst nach Fertigstellung dieser Arbeit bekannt gewordenen Ergebnisse von KOLIBIAR [1] sind Spezialfälle der hier angegebenen Reduktionsverfahren. Im Teil 3 werden Bedingungen untersucht, deren Erfülltsein in geordneten Mengen dann Kettensätze für Ketten in bestimmter günstiger Lage trivial werden läßt; außerdem erlauben manche jener Bedingungen noch, aus dem Vorhandensein einer endlichen, nicht mehr zu verfeinernden Kette zwischen zwei Elementen zu schließen auf die Endlichkeit aller weiteren, einer gegebenen Klasse (etwa der aller wohlgeordneten Ketten) angehörenden Ketten zwischen diesen Elementen. Dabei handelt es sich um Varianten der Birkhoffschen Semimodularitäts-Bedingungen (BIRKHOFF [1], [2]) und der Oreschen quadrilateral condition (ORE [1]); Untersuchungen von CROISOT [1], SZAS [1] und VILHELM [1], [2] werden weitergeführt. Im Teil 4 werden die Beziehungen von Kettensätzen zu der binären Relation der Perspektivität zwischen Intervallen einer geordneten Menge untersucht; in Verallgemeinerung der Arbeiten von KOŘINEK [2], [3], [4] und VILHELM [2] wird gezeigt, daß mit verschiedenen Begriffen definierte Kettensätze einander bedingen, und es werden die Klassen geordneter Mengen charakterisiert, in denen gewisse Kettensätze gelten. Insbesondere läßt sich eine von KOŘINEK herrührende Kennzeichnung des Gültigkeitsbereiches eines bestimmten Kettensatzes verallgemeinern: bisher mußte von den dabei in Betracht gezogenen geordneten Mengen vorausgesetzt werden, daß alle beschränkten Ketten in ihnen endlich seien — von dieser Voraussetzung kann jetzt ganz abgesehen werden. Denn man kann zeigen, daß das Studium jenes

Kettensatzes sich schon innerhalb einer wohlbestimmten Teilmenge der gegebenen geordneten Menge abspielt (und auch wenn ein Verband vorliegt, wird diese Teilmenge im Allgemeinen kein Verband mehr sein), und für diese können die früher geforderten Voraussetzungen jetzt bewiesen werden. Im Teil 5 werden die modular geordneten Mengen auf zahlreiche Arten beschrieben: durch Additivitäts- oder Invarianzeigenschaften von Intervallfunktionen und durch Eigenschaften der Äquivalenzklassen, die zu der durch die Perspektivität erzeugten Äquivalenzrelation gehören. Die bei modularen Verbänden hier übliche Voraussetzung (KOŘINEK [2], [3]), daß alle beschränkten Ketten endlich seien, läßt sich beweisen aus der schwächeren Forderung, daß zwischen vergleichbaren Elementen wenigstens eine endliche, nicht mehr zu verfeinernde Kette existiere. Im Teil 6 schließlich wird gezeigt, wie Sätze über Kompositionsreihen einer Gruppe g, die bisher aus dem Schreierschen Verfeinerungstheorem gefolgert wurden, aus früher bewiesenen Kettensätzen spezialisiert werden können, wenn diese auf die geordnete Menge der nachinvarianten Untergruppen von g angewendet werden.

0. Allgemeine Bemerkungen über geordnete Mengen. Eine *geordnete Menge* ist ein Paar $(E, \leqq)$, bestehend aus einer Menge E und einer Ordnung $\leqq$ auf E; dabei heißt eine binäre Relation auf E (also eine Teilmenge der Menge $E \times E$ aller Paare aus E) *Ordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist (also für alle a, b, c aus E: $a \leqq a$; $a \leqq b$ und $b \leqq c$ impliziert $a \leqq c$; $a \leqq b$ und $b \leqq a$ impliziert $a = b$); jede Teilmenge M von E bestimmt eine geordnete Menge $(M, \leqq_M)$ mit $\leqq_M$ als der Spur von $\leqq$ auf M (wobei für a, b aus M genau dann $a \leqq_M b$, wenn $a \leqq b$). Zugleich mit der Relation $\leqq$ ist auch die inverse Relation $\geqq$ eine Ordnung auf E (mit $a \geqq b$ genau dann, wenn $b \leqq a$), welche als zu $\leqq$ *duale* Ordnung bezeichnet wird; ist (X^ν) ein Prädikat, das von geordneten Mengen erfüllt werden kann, so sei das Prädikat $(X^\wedge)$ für $(E, \leqq)$ genau dann erfüllt, wenn (X^ν) für $(E, \geqq)$ erfüllt ist; $(X^\wedge)$ heißt dann auch dual zu (X^ν). Sind a, b Elemente von E und gilt weder $a \leqq b$ noch $b \leqq a$, so schreibe man $a \parallel b$ und nenne a, b *unvergleichbar* (HAUSDORFF [1], p. 139); sind a, b, c Elemente von E und gilt $a \leqq c \leqq b$, so heiße c ein Element *zwischen* a, b; $a \leqq b$ vorausgesetzt, werde die Menge aller c zwischen a, b als das *Intervall* $[a, b]$ von $(E, \leqq)$ bezeichnet. Sind a, b Elemente von E und ist a *unterer Nachbar* von b (gleichbedeutend: b oberer Nachbar von a), das heißt, besteht $[a, b]$ aus genau zwei Elementen, so schreibe man $a \lhd b$; das Intervall $[a, b]$ heiße dann ein $\lhd$-*Intervall*. Die Relation $\lhd$ ist in der Ordnung $\leqq$ enthalten; sie erzeugt daher (als Durchschnitt aller sie enthaltenden Ordnungen) eine Ordnung $\lhd\lhd$ auf E, welche der *diskrete Teil* von $\leqq$ heißt; stimmt $\lhd\lhd$ mit $\leqq$ überein, so heiße $\leqq$ *diskret*, $(E, \leqq)$ *diskret geordnet* (für die Beziehungen zwischen $\leqq$, $\lhd$ und $\lhd\lhd$ vergleiche man FELSCHER-SCHMIDT [1]).

Eine nicht leere Teilmenge K von E heiße *Kette* in $(E, \leqq)$, wenn $(K, \leqq_K)$ sogar *total* geordnet ist (also für alle a, b aus K: $a \leqq b$ oder $b \leqq a$); ist K eine Kette in $(E, \leqq)$, liegen a, b in K, und ist a untere, b obere Schranke in $(E, \leqq)$ von K, so heiße K eine Kette *zwischen* a, b; für eine Kette K sei $\lhd_K$ die

Nachbarschaftsrelation von $(K, \leqq_K)$ (nicht die Spur von $\lhd$ auf K!) und K^* die Menge aller Intervalle $[a, b]$ von $(K, \leqq_K)$ mit $a \lhd_K b$. Eine Kette L in $(E, \leqq)$ heiße *Verfeinerung* in $(E, \leqq)$ der Kette K in $(E, \leqq)$, wenn $K \subseteq L$ und jedes Element von L zwischen Elementen von K gelegen ist; eine Kette in $(E, \leqq)$ heiße *Ultrakette* in $(E, \leqq)$, wenn sie ihre einzige Verfeinerung in $(E, \leqq)$ ist. Nennt man *maximale Ketten* in $(E, \leqq)$ die maximalen Elemente der durch die Inklusionsbeziehung geordneten Menge aller Ketten in $(E, \leqq)$, so ist jede maximale Kette in $(E, \leqq)$ auch Ultrakette in $(E, \leqq)$, und eine Kette K ist genau dann Ultrakette in $(E, \leqq)$, wenn sie maximale Kette ist in ihrer (durch die Spur von $\leqq$ geordneten) *konvexen Hülle*: der Teilmenge aller der Elemente von E, welche zwischen Elementen von K liegen. Für a, b aus E gilt $a \lhd\lhd b$ genau dann, wenn es eine endliche Ultrakette in $(E, \leqq)$ zwischen a, b gibt; das Studium der endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$ läuft daher auf das Studium der Relation $\lhd\lhd$ hinaus, ist mithin Studium einer auf bestimmte Weise aus der Ordnung $\leqq$ abgeleiteten Ordnung.

Die geordnete Menge $(E, \leqq)$ heiße [*beschränkt*] *absteigend längenendlich*, wenn jede nicht leere [nach unten beschränkte] Teilmenge von E wenigstens ein minimales Element enthält; gleichwertig dazu ist, daß jede [nach unten beschränkte] Kette in $(E, \leqq)$ wohlgeordnet ist (die Verwendung des Auswahlaxioms an dieser Stelle ist für das Folgende nicht wesentlich). Dual erklärt man, wann $(E, \leqq)$ [beschränkt] aufsteigend längenendlich sei, und ist $(E, \leqq)$ sowohl [beschränkt] aufsteigend wie [beschränkt] absteigend längenendlich, so heiße $(E, \leqq)$ [*beschränkt*] *längenendlich* (KLEIN [*1*] und HERMES [*1*] nennen längenendlich, was hier beschränkt längenendlich heißt) — dies ist genau dann der Fall, wenn alle [zwischen irgend zwei Elementen gelegenen] Ketten in $(E, \leqq)$ endlich sind. Eine geordnete Menge ist genau dann beschränkt längenendlich, wenn jede ihrer Teilmengen (durch die Spur ihrer Ordnung) diskret geordnet ist (FELSCHER-SCHMIDT [*1*], p. 91); eine absteigend längenendliche geordnete Menge besitzt genau dann ein kleinstes Element, wenn sie nach unten gerichtet ist. Ist K eine Kette in $(E, \leqq)$, so betrachte man für a, b aus K die Aussage: wenn $a \lhd_K b$, so $a \lhd b$; sie ist notwendig dafür, daß K Ultrakette in $(E, \leqq)$ sei (so daß, falls K Ultrakette in $(E, \leqq)$, dann K^* die Menge der $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ von $(E, \leqq)$ mit a, b aus K ist); ist K endlich oder ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich, so ist sie dafür auch hinreichend.

Seien a, b Elemente von E, $(E, \leqq)$ geordnet; falls $a \parallel b$ und es überhaupt obere Schranken von $\{a, b\}$ gibt, so besitzt $\{a, b\}$ genau dann kein Supremum, wenn die Menge der oberen Schranken von $\{a, b\}$ verschiedene minimale Elemente enthält oder wenn es in dieser Menge eine absteigende (das heißt, als durch die Spur von $\leqq$ geordnete Menge dual wohlgeordnete) unendliche Kette gibt, die in dieser Menge keine untere Schranke besitzt. Tritt der zweite Fall nicht ein, gilt also für alle a, b aus E, daß es unter jeder oberen Schranke von $\{a, b\}$ eine minimale obere Schranke von $\{a, b\}$ gibt, so heiße $(E, \leqq)$ *Multiverband nach oben*; dual erklärt man den Begriff Multiverband nach unten, und ist $(E, \leqq)$ sowohl nach oben wie nach unten Multiverband,

so heiße $(E, \leqq)$ *Multiverband* schlechthin (BENADO [2], [3], [4], [5]). Eine beschränkt absteigend längenendliche geordnete Menge ist Multiverband nach oben, eine beschränkt längenendliche geordnete Menge ist Multiverband.

1. Intervallfunktionen. 1.0. Sei f eine Funktion, welche gewissen Intervallen $[a, b]$ der geordneten Menge $(E, \leqq)$ je ein Element $f(a, b)$ einer bestimmten Wertmenge G zuordnet; der Definitionsbereich von f bestimmt dann eindeutig eine binäre Relation $\leqq_f$ auf E: $a \leqq_f b$ genau dann, wenn $[a, b]$ ein Intervall von $(E, \leqq)$ aus dem Definitionsbereich von f ist; $\leqq$ ist gröber als $\leqq_f$: aus $a \leqq_f b$ folgt $a \leqq b$ für alle a, b; f heiße dann eine *Intervallfunktion auf* $(E, \leqq)$ *über* $\leqq_f$. Die Intervallfunktion f heiße *additiv*, wenn G ein Modul ist, $\leqq_f$ transitiv ist, und weiterhin gilt

(A_1) *für alle* a, b, c *aus* E: *aus* $a \leqq_f c \leqq_f b$ *folgt* ($a \leqq_f b$ *und*) $f(a, b) = f(a, c) + f(c, b)$.

Die Relation $\leqq_f$ ist, da feiner als $\leqq$, stets antisymmetrisch; deshalb kann man ein additives f natürlich zu einem ebenfalls additiven f^* fortsetzen, für welches $\leqq_{f^*}$ eine Ordnung ist: $f^*(a, b) = f(a, b)$, falls $a \leqq_f b$; $f^*(a, a) = 0$, falls nicht $a \leqq_f a$; 0 die Null von G. Mithin kann man sich auf die Betrachtung additiver Intervallfunktionen f über einer Ordnung $\leqq_f$ beschränken.

1.1. In diesem Abschnitt werden nur solche additiven Intervallfunktionen betrachtet, für die $\leqq_f$ gleich $\leqq$ ist; der allgemeine Fall ergibt sich dann durch Relativierung. — Jede auf E, $(E, \leqq)$ geordnet, definierte (Punkt-) Funktion g mit Werten in einem Modul G bestimmt eine additive Intervallfunktion φg auf $(E, \leqq)$ durch die Vorschrift $\varphi g(a, b) = g(b) - g(a)$ für alle a, b mit $a \leqq b$; gilt $\varphi g_1 = \varphi g_2$, so unterscheiden sich g_1, g_2 auf jeder Zusammenhangsklasse von $(E, \leqq)$ nur um eine Konstante (dabei bezeichnet man als Zusammenhangsklasse von $(E, \leqq)$ eine Äquivalenzklasse der von $\leqq$ erzeugten Äquivalenzrelation; gibt es nur eine Zusammenhangsklasse — etwa, wenn $(E, \leqq)$ nach oben oder nach unten gerichtet ist — so nennt man $(E, \leqq)$ auch zusammenhängend). Ist $(E, \leqq)$ nach oben oder nach unten gerichtet, so bestimmt umgekehrt jede additive Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ zu jedem a aus E eine (Punkt-)Funktion $\psi_a f$ auf E durch folgende Konstruktion (für einen Spezialfall angegeben von KLEIN [1], Th. 6, und KLEIN [3], Th. 7): man setze $f^*(a, b) = f(a, b)$ für alle a, b mit $a \leqq b$; falls aber $a \parallel b$ und etwa $(E, \leqq)$ nach oben gerichtet ist, so wähle man eine obere Schranke c von $\{a, b\}$ und setze $f^*(a, b) = f(a, c) - f(b, c)$ (ist $(E, \leqq)$ weder nach oben noch nach unten Halbverband, so läßt sich zur Konstruktion von f^* das Auswahlaxiom nicht umgehen); schließlich noch $f^*(a, b) = -f^*(b, a)$ für alle a, b. Man erkennt sofort, daß für unvergleichbare a, b der Wert $f^*(a, b)$ nicht von der Wahl des Elementes c abhängt und daß f^* für alle a, b, c aus E der Bedingung $f^*(a, b) = f^*(a, c) + f^*(c, b)$ genügt. Für a aus E erkläre man nun $\psi_a f(x) = f^*(a, x)$; zwei Funktionen $\psi_a f$ und $\psi_b f$ unterscheiden sich dann nur um die Konstante $f^*(a, b)$. Man findet für additive Intervallfunktionen f auf $(E, \leqq)$ und alle a aus E stets $\varphi \psi_a f = f$ und für (Punkt-)Funktionen g auf E auch $\psi_a \varphi g = g - g(a)$.

1.2. Sei h eine Funktion, welche für alle a, b aus E, $(E, \leqq)$ geordnet, jeder endlichen Ultrakette K zwischen a, b ein Element $h(a, b, K)$ eines Moduls G zuordnet, $h(a, a, K) = 0$ für alle a aus E, 0 die Null von G; h heiße eine *Kettenfunktion* auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$. h bestimmt dann eine Schar von Intervallfunktionen ϑh über $\lhd\lhd$, indem man als $\vartheta h(a, b)$ jeweils eines unter den Elementen $h(a, b, K)$ auswählt (bei den folgenden Anwendungen werden sich solche Intervallfunktionen stets ohne Verwendung des Auswahlaxioms konstruieren lassen). Es werde nun noch vorausgesetzt, daß h *additiv* sei:

(A_2) *für alle a, b, c aus E: für alle endlichen Ultraketten K zwischen a, b: wenn c in K, so*

$$h(a, b, K) = h(a, c, K \cap [a, c]) + h(c, b, K \cap [c, b]).$$

Dann ist die Aussage

(A_3) *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b:*

$$h(a, b, K) = h(a, b, L)$$

äquivalent dazu, daß eine der Intervallfunktionen ϑh additiv sei; in diesem Falle sind dann alle Funktionen ϑh identisch. Dabei ist die Notwendigkeit des Additivseins klar. Sei umgekehrt eine Funktion ϑh additiv, seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b mit $h(a, b, K) \neq h(a, b, L)$, also etwa $\vartheta h(a, b) \neq h(a, b, K)$; man wähle x in K minimal für $\vartheta h(a, x) \neq h(a, x, K \cap [a, x])$. Dann ist x von a verschieden, so daß man ein y in K mit $y \lhd x$ findet; da es zwischen y, x nur eine Ultrakette gibt, gilt $\vartheta h(y, x) = h(y, x, K \cap [y, x])$, wegen $\vartheta h(a, y) = h(a, y, K \cap [a, y])$ also $\vartheta h(a, x) = h(a, x, K \cap [a, x])$: Widerspruch.

1.3. Sei β eine Menge von Intervallen der geordneten Menge $(E, \leqq)$; man definiert eine ganzwertige und additive Kettenfunktion h_β auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, indem man für $h_\beta(a, b, K)$ die Elementeanzahl von $K^* \cap \beta$ setzt; man definiert eine wieder mit h_β bezeichnete Intervallfunktion auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, indem man für $h_\beta(a, b)$ die kleinste aller Zahlen $h_\beta(a, b, K)$ setzt; für alle a, b, c folgt aus $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ dann $h_\beta(a, b) \leqq h_\beta(a, c) + h_\beta(c, b)$.

Unter dem auf Intervalle sich beziehenden Jordan-Hölder-Satz für eine binäre, reflexive, symmetrische Relation $\mathfrak{R}$ zwischen Intervallen einer geordneten Menge $(E, \leqq)$ wird man die folgende Aussage verstehen:

($JHI_{\mathfrak{R}}$) *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b: es existiert eine umkehrbare Abbildung von K^* auf L^* so, daß zugeordnete Intervalle in der Relation $\mathfrak{R}$ stehen.*

Sei $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$, $\mathfrak{R}_\lhd$ ihre Spur auf der Menge aller $\lhd$-Intervalle (umgekehrt kann jede auf der Menge aller $\lhd$-Intervalle gegebene Äquivalenzrelation in trivialer Weise auf die Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$ fortgesetzt werden), P sei die zu $\mathfrak{R}$ gehörige Partition der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$ in Restklassen ϱ;

nach der soeben angegebenen Konstruktion bestimmt P eine Schar von Intervallfunktionen h_ϱ auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, ϱ in P. *Dann ist die Gültigkeit von* $(JHI_{\mathscr{R}})$ *äquivalent dazu, daß alle Intervallfunktionen* h_ϱ *additiv seien,* ϱ *in* P.

Eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *$\mathscr{R}$-invariant* [*$\mathscr{R}_\lhd$-invariant*], wenn sie auf den $\mathscr{R}$-Äquivalenzklassen [$\mathscr{R}_\lhd$-Äquivalenzklassen] konstant ist; die Funktionen h_ϱ sind stets $\mathscr{R}_\lhd$-invariant, nicht notwendig aber $\mathscr{R}$-invariant. Gilt $(JHI_{\mathscr{R}})$ in $(E, \leqq)$ und ist f eine additive, $\mathscr{R}_\lhd$-invariante Intervallfunktion auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ mit Werten in einem Modul G, so gilt für alle a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ dann $f(a, b) = \sum_{\varrho \in \mathsf{P}} \lambda_\varrho \cdot h_\varrho(a, b)$, λ_ϱ der Wert von f auf der durch ϱ bestimmten Klasse von $\lhd$-Intervallen (gibt es in ϱ keine $\lhd$-Intervalle, so verschwindet h_ϱ identisch), und jede solche Linearkombination mit beliebigen λ_ϱ aus G bestimmt dann eine additive, $\mathscr{R}_\lhd$-invariante Intervallfunktion über $\lhd\lhd$. Erst recht läßt sich jedes $\mathscr{R}$-invariante, additive f so darstellen; sind außerdem die h_ϱ $\mathscr{R}$-invariant, so auch ihre Linearkombinationen. Gilt $(JHI_{\mathscr{R}})$ in $(E, \leqq)$ und ist G additive Gruppe eines Ringes H [und sind die h_ϱ $\mathscr{R}$-invariant], so bilden die additiven, $\mathscr{R}_\lhd$-invarianten [$\mathscr{R}$-invarianten] Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ mit Werten in G einen Modul über H mit den nicht identisch verschwindenden h_ϱ als freien Erzeugenden.

Ist $\mathscr{T}$ eine gröbere Äquivalenzrelation als $\mathscr{R}$ ($\mathscr{R} \subseteqq \mathscr{T}$), so wird $(JHI_{\mathscr{T}})$, eine Folge von $(JHI_{\mathscr{R}})$; für jede $\mathscr{T}$-Restklasse τ und für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ findet man in diesem Falle $h_\tau(a, b) = \sum_{\varrho \subseteqq \tau} h_\varrho(a, b)$, und mit den h_ϱ werden dann auch die h_τ $\mathscr{R}$-invariant.

1.4. Wählt man für $\mathscr{R}$ die Allrelation $\mathscr{A}$ auf der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$, gibt es also nur eine Restklasse α, so ist $h_\alpha(a, b, K)$ gerade die *Länge* von K: Elementeanzahl von K^*, um Eins verminderte Elementeanzahl von K; die zugehörige Intervallfunktion h_α wird mit d bezeichnet und heißt *Kořinecksche Intervallfunktion*: für a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ ist $d(a, b)$ das Minimum aller Längen von endlichen Ultraketten zwischen a, b (KOŘINEK [2], [3]); für a, b, c aus E mit $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ gilt $d(a, b) \leqq d(a, c) + d(c, b)$, und das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn c Element einer endlichen Ultrakette kürzester Länge zwischen a, b ist. Weiter heißt dann die Aussage $(JHI_{\mathscr{A}})$ *Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung* (DEDEKIND [1], § 6, Th. XVI):

(JD) *für alle* a, b *aus* E: *alle endlichen Ultraketten zwischen* a, b *sind gleich lang*;

für jede Äquivalenzrelation $\mathscr{R}$ ist (JD) eine Folge von $(JHI_{\mathscr{R}})$; in diesem Falle hat man für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ die Darstellung $d(a, b) = \sum_{\varrho \in \mathsf{P}} h_\varrho(a, b)$, und mit den h_ϱ ist dann auch d $\mathscr{R}$-invariant.

Eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *$\lhd$-treu*, wenn sie für alle $\lhd$-Intervalle definiert und $\mathscr{A}_\lhd$-invariant ist, sie also für alle $\lhd$-Intervalle den gleichen Wert $k(f)$, $k(f) = \lambda_\alpha$, annimmt; sie heiße *umkehrbar $\lhd$-treu*, wenn sie $\lhd$-treu ist und der Wert $k(f)$ *nur* für $\lhd$-Intervalle angenommen wird. Für die fortan in 1.4 betrachteten Intervallfunktionen f und (Punkt-)Funktionen g werde vorausgesetzt, daß ihr Wertebereich der Modul der ganzen

Zahlen sei und für $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ stets $f(a, b)$ und $\varphi g(a, b)$ von Null verschieden seien; verzichtet man auf Proportionalitätsaussagen, so genügt es, wenn für $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ stets $f(a, b)$ und $\varphi g(a, b)$ Elemente unendlicher Ordnung eines Moduls G sind.

Für eine additive, $\lhd$-treue Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ ist $\leqq_f$ gröber als $\lhd\lhd$ und, wegen der soeben genannten Voraussetzungen, f über $\lhd\lhd$ auch umkehrbar $\lhd$-treu: Äquivalent zu (JD) ist, daß eine additive, $\lhd$-treue Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ existiere; alle additiven, $\lhd$-treuen Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ sind dann rational-proportional zueinander und ganze Vielfache von d. Denn dann liefert bei gegebenem f ein trivialer Induktionsschluß (nach $d(a, b)$) für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ auch $f(a, b) = k(f) \cdot d(a, b)$; mit f ist daher auch d additiv, und d *ist* umkehrbar $\lhd$-treu; diese Zerlegung von f ist dann wegen (JD) gerade die nach 1.3 vorhandene Darstellung von f durch h_α, $h_\alpha = d$.

Sei F die Vereinigung aller mehr als ein Element enthaltenden Zusammenhangsklassen der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$: a aus E liege in F genau dann, wenn sich ein von a verschiedenes b in E mit $a \lhd\lhd b$ oder $b \lhd\lhd a$ findet; statt für (JD) die Existenz geeigneter Intervallfunktionen zu fordern, kann man auch das Vorhandensein erzeugender (Punkt-)Funktionen auf F verlangen: für (JD) ist hinreichend, daß es eine auf F definierte Funktion g gibt mit

(A_4) *es gibt ein $k(g)$ in G: für alle a, b aus E: aus $a \lhd b$ folgt $g(b) - g(a) = k(g)$*

(BIRKHOFF [2], p. 11). Ist die geordnete Menge $(F, \lhd\lhd)$ nach oben oder nach unten gerichtet, so ist dies für (JD) auch notwendig: die Funktionen $\psi_a d$ erfüllen dann (A_4) mit $k(\psi_a d) = 1$; zwei der Bedingung (A_4) genügende Funktionen g_1, g_2 mit $k(g_1) = k(g_2)$ unterscheiden sich in diesem Falle auf F nur um eine ganze Konstante, falls aber $k(g_1) \neq k(g_2)$, so unterscheidet sich dort g_1 um eine rationale Konstante von einer zu g_2 rational-proportionalen Funktion. Es gibt aber geordnete Mengen $(F, \lhd\lhd)$ mit (JD), welche weder nach oben noch nach unten gerichtet sind und auf denen keine Funktion g mit (A_4) existiert, $k(g)$ von unendlicher Ordnung in G: über $\{a, b, c, x, y\}$ setze man $a \leqq b \leqq c$, $a \leqq y$, $x \leqq y$, $x \leqq c$; (JD) gilt, aber für ein (A_4) erfüllendes g würde $k(g) = g(c) - g(x) = g(c) - (g(y) - k(g)) = g(c) - g(a) = 2k(g)$.

Ist a Element von E und besitzen die Längen der endlichen Ketten in $(E, \leqq)$ mit a als größtem Element ein endliches Maximum, so sei $e(a)$ diese Zahl; $e(a)$ heißt auch *Dimension* von a (BIRKHOFF [2], p. 11). $(E, \leqq)$ heiße *endlich-dimensioniert*, wenn $e(a)$ für jedes a aus E definiert ist; in diesem Falle ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich und absteigend längenendlich, und die Existenz eines kleinsten Elementes ist äquivalent zum Gerichtetsein nach unten; insbesondere besitzt jeder endlich-dimensionierte Verband ein kleinstes Element. Ist $(E, \leqq)$ endlich dimensioniert und nach unten gerichtet, so ist (JD) äquivalent dazu, daß e der Bedingung (A_4) genügt (BIRKHOFF [2], p. 11): mit 0 als kleinstem Element von E folgt aus (JD) $e = \psi_0 d$, $d = \varphi e$.

Ist $(E, \leqq)$ nach unten gerichtet, so ist es genau dann endlich-dimensioniert, wenn es absteigend längenendlich ist und für je zwei a, b aus E die Längen der endlichen Ketten zwischen a, b eine endliche (von a, b abhängige) obere Schranke besitzen; insbesondere sind sicherlich Verbände endlich-dimensioniert, wenn in ihnen (JD) gilt und sie beschränkt längenendlich und absteigend längenendlich sind. Ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich und gilt (JD), so ist für festes a aus E die Menge aller oberen Schranken von a, geordnet durch die Spur von $\leqq$, endlich-dimensioniert mit der Dimensionsfunktion $\psi_a d$. Ist $(E, \leqq)$ endlich-dimensioniert und der Wertevorrat der Funktion e beschränkt, so heiße $(E, \leqq)$ *endlich-dimensional*; $(E, \leqq)$ ist dann aufsteigend längenendlich; ist $(E, \leqq)$ nach oben gerichtet und endlich-dimensioniert, so ist es genau dann endlich-dimensional, wenn es aufsteigend längenendlich ist; speziell sind längenendliche Verbände endlich-dimensional, wenn in ihnen (JD) gilt.

1.5. Als Verschärfung von (JD) betrachte man (Ore [1], Th. 3)

(*ORE*) *für alle a, b aus E: existiert eine endliche Ultrakette zwischen a, b, so sind alle Ultraketten zwischen a, b endlich und gleich lang.*

Äquivalent zu (ORE) ist die Konjunktion von (JD) mit der Konvexitätsforderung

(*KON*) *für alle a, b, c aus E: aus $a \lhd\lhd b$ und $a \leqq c \leqq b$ folgt $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$.*

Dabei ist die Notwendigkeit von (*KON*) für (*ORE*) offenbar (Auswahlaxiom!); umgekehrt folgt (*ORE*) aus (JD) und (*KON*) durch Induktion über d: falls $a \lhd\lhd b$, $1 < d(a, b)$ und K eine Ultrakette zwischen a, b ist, so wähle man ein von a, b verschiedenes c in K; wegen $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ und $d(a, c) \neq 0$, $d(c, b) \neq 0$ folgt aus der Additivität von d dann $d(a, c) < d(a, b)$, $d(c, b) < d(a, b)$, so daß nach Induktionsannahme die Ketten $K \cap [a, c]$, $K \cap [c, b]$ endlich sind, also auch K endlich ist. — Additivität von d vorausgesetzt, liefert das Schema dieses Induktionsschlusses auch einen direkten Beweis dafür, daß für eine additive Kettenfunktion h auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ aus der Additivität einer Funktion ϑh auch die Aussage (A_3) (in der Gestalt $\vartheta h(a, b) = h(a, b, K)$ für alle K) folgt — insbesondere also (JD) selbst.

Eine diskret geordnete Menge mit (JD) ist beschränkt längenendlich. Allgemein ist eine diskret geordnete Menge nicht einmal ein Multiverband.

Sei $(E, \leqq)$ beschränkt absteigend längenendlich, so daß für alle a, b aus E die Ultraketten zwischen a, b wohlgeordnet sind; wenn $a \leqq b$, so sei $j_1(a, b)$ die kleinste Ordinalzahl α so, daß es eine Ultrakette zwischen a, b vom Typ α gibt. Für die Aussage, daß für alle a, b sämtliche Ultraketten zwischen a, b gleichen Typus haben, ist die Gültigkeit von (A_1) für j_1 zwar notwendig, aber nicht mehr hinreichend. Eine hinreichende Bedingung erhält man, wenn man neben (A_1) noch die Stetigkeit von j_1 verlangt: für jede durch $\leqq$ wohlgeordnete Folge (a_λ) aus E, $1 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$, λ_0 Limeszahl, soll $j_1(a_1, a_{\lambda_0})$ Supremum der Zahlen $j_1(a_1, a_\lambda)$ mit $\lambda < \lambda_0$ sein. Denn dann findet man den Typus einer beliebigen Ultrakette zwischen a, b durch Aufsummieren als ebenfalls $j_1(a, b)$. —

Sinngemäß kann man auch bei beliebigem $(E, \leqq)$ eine Funktion j_2 definieren, deren Werte Kardinalzahlen sind; ist einer der in (A_1) zu addierenden Werte unendlich, so gilt diese Formel als Folge des Auswahlaxioms schon immer; die entsprechende Stetigkeitsbedingung lautet: für alle a, b und alle Ultraketten K zwischen a, b: $j_2(a, b)$ ist Supremum der Zahlen $j_2(a, x)$ mit x in K, $x \neq b$.

2. Reduktionstheorie der Jordan-Hölder-Sätze. 2.0. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; unter dem auf Ketten sich beziehenden Jordan-Hölder-Satz für eine binäre, reflexive, symmetrische Relation $\mathscr{R}$ zwischen Ketten in $(E, \leqq)$ wird man die folgende Aussage verstehen:

($JHK_{\mathscr{R}}$) *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b: K, L stehen in der Relation $\mathscr{R}$.*

Jede binäre, reflexive, symmetrische Relation [jede Äquivalenzrelation] $\mathscr{R}$ zwischen Intervallen von $(E, \leqq)$ gibt in natürlicher Weise Anlaß zu einer binären, reflexiven, symmetrischen Relation [Äquivalenzrelation] $\varkappa\mathscr{R}$ zwischen Ketten in $(E, \leqq)$: K, L stehen in der Relation $\varkappa\mathscr{R}$ genau dann, wenn eine umkehrbare Abbildung von K^* auf L^* so existiert, daß zugeordnete Intervalle in der Relation $\mathscr{R}$ stehen; jeder Satz ($JHI_{\mathscr{R}}$) (im Sinne von 1.3) ist dem entsprechenden Satz ($JHK_{\varkappa\mathscr{R}}$) gleichwertig.

Gesucht wird nun ein Reduktionsverfahren für Sätze ($JHK_{\mathscr{R}}$), welches auf die Gültigkeit ihrer Behauptung für alle K, L zu schließen erlaubt, wenn nur die Richtigkeit derselben für in besonders günstiger Lage sich befindende K, L erst gesichert ist. Zugleich mit diesem Verfahren wird sich eine Reduktion für den Schluß ergeben, mit dem aus dem Vorhandensein einer endlichen Ultrakette zwischen a, b die Endlichkeit aller Ultraketten einer gewissen Klasse $\mathfrak{B}$ zwischen a, b gefolgert wird (das Wort Klasse wird in dieser Arbeit als synonym mit Menge verwendet).

2.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, $\mathfrak{F}$ die Menge aller endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$, seien $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ Mengen von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2)$. Sei $\mathscr{X}$ eine binäre Relation zwischen Ultraketten; man definiere $\mathscr{X} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$ durch $K \mathscr{X} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) L$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$, genau wenn $K \mathscr{X} L$, K in $\mathfrak{B}_1$, L in $\mathfrak{B}_2$. Man definiere eine binäre, symmetrische Relation $\mathscr{D}$ zwischen Ultraketten durch $K \mathscr{D} L$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$, genau wenn a, b in E existieren, für die K, L Ultraketten zwischen a, b sind.

Sei $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$ — eben die Relation, in günstiger Lage zu sein — und es gelte $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{D}$; ($JHK_{\mathscr{R}}$) ist gesichert, wenn $\mathscr{R}$ sowohl aus $\mathscr{L}$ wie aus $non\,\mathscr{L}$ folgt: $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{R}$; dabei wird der Nachweis von $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{R}$ als Problem speziell gegebener $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ betrachtet und an dieser Stelle nicht weiter untersucht. Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{B}$; für ($JHK_{\mathscr{R}}$) genügt es gewiß, statt $non\,\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{R}$ nur $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{R} \cup non\,\mathscr{D}$ nachzuweisen, $\mathscr{R} \cup non\,\mathscr{D}$ die Vereinigungsmenge (sog. logische Disjunktion) von $\mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{D}$. Dieser Schluß

wird weiter zerlegt: es wird eine Hilfsrelation $\mathscr{H}$ eingeführt, und es werden nur noch solche Relationen $\mathscr{L}$ betrachtet, für die $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{H} \cup non\,\mathscr{D}$ gilt; hinreichend für $(JHK_{\mathscr{R}})$ ist dann $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{R}$. Im Allgemeinen wird der Nachweis von $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{R}$ immer noch kaum einfacher sein als ein direkter Beweis von $(JHK_{\mathscr{R}})$; im Folgenden wird es jedoch gelingen, für explizite anzugebende Relationen $\mathscr{H}$ und für alle Relationen $\mathscr{R}$ einer leicht überschaubaren Klasse den Schluß $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{R}$ zu beweisen, Gültigkeit von $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{H} \cup non\,\mathscr{D}$ dabei vorausgesetzt.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{B}$; zwei Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ sollen in der Relation $\mathscr{M}_{\mathfrak{B}}$ stehen, wenn a, b, c in $K \cap L$ mit $a \leqq c \leqq b$, $c \neq a$, $c \neq b$ existieren, K, L Ultraketten zwischen a, b sind und $K \cap [a, c] = L \cap [a, c]$, $K \cap [c, b] \in \mathfrak{B}$, $L \cap [c, b] \in \mathfrak{B}$ gilt oder $K \cap [c, b] = L \cap [c, b]$, $K \cap [a, c] \in \mathfrak{B}$, $L \cap [a, c] \in \mathfrak{B}$ gilt; weiter sei $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}$ die von $\mathscr{M}_{\mathfrak{B}}$ erzeugte Äquivalenzrelation. Ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so gilt $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{N}_{\mathfrak{F}}$.

Jede binäre, symmetrische Relation $\mathscr{R}$ zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$ definiert eine binäre, symmetrische Relation $\lambda\mathscr{R}$ zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$: für K, L gelte $K \lambda\mathscr{R} L$, wenn es Ultraketten M, N gibt mit $M \subseteqq K$, $N \subseteqq L$, $K - M = L - N$ und $M \mathscr{R} N$; die Abbildung von $\mathscr{R}$ auf $\lambda\mathscr{R}$ ist ein Hüllenoperator, und $\mathscr{R}$ heiße *λ-invariant*, wenn $\mathscr{R} = \lambda\mathscr{R}$. Insbesondere ist jede aus einer Relation $\mathscr{R}$ zwischen Intervallen von $(E, \leqq)$ entstehende Relation $\varkappa\mathscr{R}$ auch λ-invariant.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{B}$; sei $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation auf $\mathfrak{B}$ mit $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{D}$ und $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathscr{D}$; sei $\mathscr{R}$ eine λ-invariante Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{B}$. *Dann ist*

$(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: für alle Ultraketten K, L zwischen a, b: wenn $a \lhd\lhd b$ und K, L in $\mathfrak{B}$, so K, L in $\mathfrak{F}$, K, L gleich lang, $K \mathscr{R} L$ äquivalent zu*

$(JHK_{\mathscr{L},\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: für alle Ultraketten K, L zwischen a, b: wenn $K \mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) L$, so L in $\mathfrak{F}$, K, L gleich lang, $K \mathscr{R} L$.*

Dabei ist $(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ äquivalent zur Konjunktion von $(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{F}})$ mit

$(FIN_{\mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: wenn $a \lhd\lhd b$, so sind alle in $\mathfrak{B}$ gelegenen Ultraketten zwischen a, b endlich.*

Der Beweis, daß $(JHK_{\mathscr{L},\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ für $(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ hinreichend ist, geschieht durch Induktion über $d(a, b)$. Für $d(a, b) = 1$ ist nichts zu zeigen; weiter kann man wegen der Transitivität von $\mathscr{R}$ und der Transitivität des Endlich- und Gleichlang-Seins annehmen, daß etwa die in $(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ auftretende Kette K eine endliche Ultrakette der Länge $d(a, b)$ sei. Falls $d(a, b) = 2$, gibt es dann (Definition von $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}$!) kein von K verschiedenes L mit $K \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} L$, so daß aus $K \neq L$ wegen $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathscr{D}$ daher $K \mathscr{L} L$, aus $(JHK_{\mathscr{L},\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ das Gewünschte folgt. Sei die Behauptung von $(JHK_{\mathscr{R},\mathfrak{B}})$ mit x, y statt a, b mit alle x, y mit $2 \leqq d(x, y) < n$ bewiesen und sei $d(a, b) = n$; wegen $(JHK_{\mathscr{L},\mathscr{R},\mathfrak{B}})$

ist nur noch der Fall $K\,\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\,L$ zu betrachten, und wegen der Transitivität von $\mathcal{R}$ kann man sich auf $K\,\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}\,L$ beschränken. Dann gibt es c in K mit $c \neq a$, $c \neq b$ und etwa $K \cap [a, c] = L \cap [a, c]$, $L \cap [c, b] \in \mathfrak{B}$. Da K Ultrakette kürzester Länge zwischen a, b ist, gilt $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$, wegen $a \neq c$ also $d(c, b) < n$, so daß $K \cap [c, b]$ und $L \cap [c, b]$ in der Relation $\mathcal{R}$ stehen, endlich und gleich lang sind. Wegen der λ-Invarianz von $\mathcal{R}$ und der Endlichkeit von $K \cap [a, c]$ gilt dann das Gleiche für K, L.

Insbesondere ist die von $\lambda\mathcal{L}$ erzeugte Äquivalenzrelation $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ λ-invariant; *aus* $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ *folgt stets* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$, *aus* $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ *folgt weiter stets* (JD). Wegen der Transitivität von $\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}$ läßt sich in $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ die Voraussetzung und in $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ die Behauptung verschärfen: für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ gelte $K\,\gamma_{\mathfrak{B}}\mathcal{L}\,L$, wenn $K\,\mathcal{L}\,L$ und $K\,non\,\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\,L$, und $\beta\mathcal{L}$ sei eine Relation mit $\gamma_{\mathfrak{B}}\mathcal{L} \leqq \beta\mathcal{L} \leqq \mathcal{L}$; in der Voraussetzung von $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ kann man $K\,\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B})\,L$ durch $K\,\beta\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B})\,L$ ersetzen, und $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ ist äquivalent zu $(JHK_{\mathcal{E}_{\beta\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$. Eine weitere Abschwächung von $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ erhält man schließlich durch Verminderung des Behaupteten:

(A_5) *für alle* a, b *aus* E: *für alle Ultraketten* K, L *zwischen* a, b: *wenn* $K\,\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B})\,L$, *so existieren Ultraketten* M, N *zwischen* a, b *mit* $M\,\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\,K$, $N\,\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\,L$, $M\,\mathcal{R} \cap (\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})\,N$, K, N *gleich lang*.

Für aus Intervall-Äquivalenzrelationen $\mathcal{R}$ gebildete $\varkappa\mathcal{R}$ behauptet $(JHK_{\varkappa\mathcal{R}})$ dasselbe wie $(JHK_{\varkappa\mathcal{R},\mathfrak{F}})$.

Für jede symmetrische Relation $\mathcal{L}$ *mit* $\mathcal{L} \leqq \mathcal{D}$, $non\,\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \leqq \mathcal{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathcal{D}$ *ist* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ *äquivalent zu der Konjunktion von* (JD) *und* $(FIN_{\mathfrak{B}})$, *insbesondere also* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{F}})$ *äquivalent zu* (JD); die strukturell wenig durchsichtige Aussage, daß in einer geordneten Menge $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ gelte, läßt sich derart in eine solche von sehr einfacher Gestalt übersetzen. Aus $(FIN_{\mathfrak{B}})$ folgt dann nämlich $non\,\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \leqq (non\,\mathcal{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})) \cup non\,\mathcal{D} \leqq \mathcal{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathcal{D}$, aus $(FIN_{\mathfrak{B}})$ und (JD) folgt $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$. Ist also $\mathcal{S}$ eine weitere Relation mit $\mathcal{S} \leqq \mathcal{D}$, $non\,\mathcal{S} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \leqq \mathcal{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathcal{D}$, so sind $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ und $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathfrak{B}})$ äquivalent; im Hinblick auf Sätze $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ ist keine der günstigen Lagen $\mathcal{L}$ vor den anderen ausgezeichnet.

2.2. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Ultraketten in $(E, \leqq)$; im Falle $\mathcal{L} \leqq \mathcal{D}$, $non\,\mathcal{L} \leqq \mathcal{N}_{\mathfrak{A}} \cup non\,\mathcal{D}$ gilt $non\,\gamma_{\mathfrak{A}}\mathcal{L} = \mathcal{N}_{\mathfrak{A}} \cup non\,\mathcal{D}$; wenn noch $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}} \leqq non\,\mathcal{L}$ gilt und $\mathcal{L}$ nicht reflexiv ist, so läßt sich dann $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}$ wie folgt konstruieren. Ein Paar (K_1, K_2) von Ketten K_i $(i = 1, 2)$ zwischen a, b aus E heiße *Viereck* (in $(E, \leqq)$), wenn jedes der K_i genau drei Elemente enthält; weiter sei $\mathfrak{N}_i$ die Menge aller Ultraketten in $(E, \leqq)$, welche Verfeinerungen von K_i sind; die Elemente von $\mathfrak{N}_i$ heißen *Seiten* des Viereckes (K_1, K_2). Man setze $\beta_0\mathcal{L} = \mathcal{L}$ und nenne für alle natürlichen n $(n = 1, 2, \ldots)$ ein Viereck (K_1, K_2) ein $\beta_n\mathcal{L}$-Viereck, wenn aus $L_i \in \mathfrak{N}_i$ folgt $L_1\,\beta_{n-1}\mathcal{L}\,L_2$; damit erkläre man die Relationen $\beta_n\mathcal{L}$ zwischen Ultraketten L_1, L_2 in $(E, \leqq)$ durch $L_1\,\beta_n\mathcal{L}\,L_2$, genau wenn jedes Viereck (K_1, K_2) mit $L_i \in \mathfrak{N}_i$ ein $\beta_n\mathcal{L}$-Viereck ist und es mindestens

ein solches Viereck gibt. *Es wird behauptet, daß* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ *gleich dem Durchschnitt (der Konjunktion) der* $\beta_n\mathscr{L}$ *sei* $(n=0, 1, \ldots)$. [1])

In der Tat: per definitionem gilt $\beta_n\mathscr{L}\subseteq\beta_{n-1}\mathscr{L}$ $(n=1, 2, \ldots)$; weiter hat man $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteq\beta_n\mathscr{L}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Denn dies ist für $n=0$ nach Konstruktion der Fall; sei es für $n-1$, $n-1\geqq 0$, bewiesen und seien L_1, L_2 Ultraketten zwischen a, b mit L_1 *non* $\beta_n\mathscr{L}$ L_2; hat eine der beiden Ketten die Länge Eins, so gilt $L_1=L_2$, $L_1\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}L_2$, L_1 *non* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ L_2. Andernfalls gibt es ein Viereck, dessen Seiten L_1, L_2 sind, also auch wenigstens ein solches Viereck (K_1, K_2), das kein $\beta_n\mathscr{L}$-Viereck ist. Folglich gibt es M_i in $\mathfrak{R}_i$ mit M_1 *non* $\beta_{n-1}\mathscr{L}$ M_2, M_1 *non* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ M_2, $M_1\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}M_2$; wenn aber $K_i=\{a, x_i, b\}$, so wegen $x_i\neq a$, $x_i\neq b$ auch $L_i\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}(L_i\cap[a, x_i])\cup(M_i\cap[x_i, b])\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}M_i$, $L_i\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}M_i$, $L_1\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}L_2$, L_1 *non* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ L_2. — Daher gilt für den Durchschnitt $\bigcap\beta_n\mathscr{L}$ der $\beta_n\mathscr{L}$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteq\bigcap\beta_n\mathscr{L}$; bleibt zu zeigen, daß auch *non* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteq$ *non* $\bigcap\beta_n\mathscr{L}$ erfüllt ist. Sind L_1, L_2 Ultraketten mit L_1 *non* $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ L_2, L_1, L_2 Ultraketten zwischen a, b, also $L_1\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}L_2$, so existieren Ultraketten M_i $(i=0, \ldots, k)$ mit $M_0=L_1$, $M_k=L_2$ und, falls $k>0$, $M_j\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}M_{j-1}$ $(j=1, \ldots, k)$; aus $k\leqq 1$ folgt daher L_1 *non* $\mathscr{L}$ L_2, L_1 *non* $\beta_0\mathscr{L}$ L_2, L_1 *non* $\bigcap\beta_n\mathscr{L}$ L_2; sei bereits für alle k mit $0<k<h$ gezeigt, daß aus den gemachten Voraussetzungen L_1 *non* $\beta_{k-1}\mathscr{L}$ L_2 folgt, und seien jetzt die Voraussetzungen für L_1, L_2 mit $k=h$ erfüllt. Wegen $M_{k-1}\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}L_2$ gibt es dann von a, b verschiedene x_1, x_2 mit $x_1\in L_1$, $x_2\in M_{k-1}\cap L_2$, und wegen L_1 *non* $\beta_{k-2}\mathscr{L}M_{k-1}$ ist (K_1, K_2) mit $K_i=\{a, x_i, b\}$ kein $\beta_{k-1}\mathscr{L}$-Viereck, so daß wegen $x_2\in L_2$ auch L_1 *non* $\beta_{k-1}\mathscr{L}$ L_2 gilt.

2.3. Sei $(E, \leqq)$ geordnet, $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation auf $\mathfrak{A}$ mit *non* $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}\cup$ *non* $\mathscr{D}$; sei $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ die von $\lambda\mathscr{L}$ erzeugte Äquivalenzrelation. Sind K, L Ultraketten zwischen a, b aus E mit K *non* $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$, so gibt es x, y mit $a\leqq x\leqq y\leqq b$, $a\neq x$ oder $b\neq y$, und Ultraketten M, N zwischen x, y mit M *non* $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$. Denn da dann erst recht K *non* $\mathscr{L}$ L, also $K\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}L$, gibt es endlich viele Ultraketten K_i $(i=0, \ldots, n, 0<n)$ zwischen a, b mit $K_0=K$, $K_n=L$, $K_{j-1}\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}K_j$ $(j=1, \ldots, n)$; wegen der Transitivität von $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ muß für mindestens ein j gelten K_{j-1} *non* $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}K_j$. Aus $K_{j-1}\mathscr{M}_{\mathfrak{A}}K_j$ folgt aber die Existenz von c in $K_{j-1}\cap K_j$ mit $c\neq a$, $c\neq b$ und etwa $K_{j-1}\cap[a, c]=K_j\cap[a, c]$; wegen der λ-Invarianz von $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ muß also $K_{j-1}\cap[c, b]$ *non* $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ $K_j\cap[c, b]$ gelten, so daß man $x=c$, $y=b$, $M=K_{j-1}\cap[c, b]$, $N=K_j\cap[c, b]$ setzen kann.

Sei $(E, \leqq)$ *beschränkt längenendlich; dann gilt für jedes* $\mathscr{L}$ *mit* *non* $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{N}_{\mathfrak{A}}\cup$ *non* $\mathscr{D}$

$(ML_{\mathscr{L}})$ *für alle* a, b *aus* E: *für alle Ultraketten* K, L *zwischen* a, b: $K\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$.

Denn aus dem Vorhandensein zweier Ultraketten K, L zwischen a, b mit K *non* $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$ ließe sich dann sofort (Auswahlaxiom!) die Existenz einer unendlichen Kette zwischen a, b folgern.

2.4. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; es sollen Beispiele für Relationen $\mathscr{L}$ angegeben werden. — Ein Paar (K_1, K_2) von Ketten K_i zwischen a, b

[1]) Im Falle *non* $\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})\subseteq\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}\cup$ *non* $\mathscr{D}$ gilt *non* $\gamma_{\mathfrak{B}}\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})=(\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}\cup$ *non* $\mathscr{D})\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})$; unter weiteren Voraussetzungen über $\mathfrak{B}$ (die etwa von $\mathfrak{F}$ oder der Klasse aller wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$ erfüllt würden) ließen sich dann die Definitionen der $\beta_n\mathscr{L}$ so abändern, daß $\gamma_{\mathfrak{B}}\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})$ ähnlich konstruiert werden könnte.

aus E heiße *Zelle* (in $(E, \leqq)$, zwischen a, b), wenn jede der Ketten mindestens drei Elemente enthält und wenn für jedes Paar k_1, k_2 dann a eine maximale untere, b eine minimale obere Schranke in $(E, \leqq)$ von $\{k_1, k_2\}$ ist, $k_i \in K_i$, $k_i \neq a$, $k_i \neq b$ $(i = 1, 2)$; die K_i heißen dann Komponenten der Zelle (K_1, K_2), sie haben nur die Elemente a, b gemeinsam; vereinigt man die Komponenten einer Zelle, so ist die entstehende Teilmenge von E, geordnet durch die Spur von $\leqq$, ein Verband, der, falls $(E, \leqq)$ Verband ist, Teilverband von $(E, \leqq)$ ist. Eine Zelle, deren Komponenten Ultraketten in $(E, \leqq)$ sind, heiße *einfach*; ein Viereck, welches einfache Zelle ist, heiße *einfaches Viereck*[2]).

Sei $\mathscr{Z}$ die Relation, Komponente der gleichen einfachen Zelle in $(E, \leqq)$ zu sein; *dann gilt non* $\mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{N}_{\mathfrak{A}} \cup$ *non* $\mathscr{Q}$. Denn sind K, L Ultraketten zwischen a, b mit K *non* $\mathscr{Z} L$, so gibt es x in K, y in L, z in E mit etwa $x \leqq z \leqq b$, $y \leqq z$, $x \neq a$, $y \neq a$, $z \neq b$; verfeinert man (Auswahlaxiom!) $\{x, z, b\}$ und $\{y, z\}$ zu Ultraketten X, Y in $(E, \leqq)$, so gilt $K \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} (K \cap [a, x]) \cup X \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} (L \cap [a, y]) \cup Y \cup (X \cap [z, b]) \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} L$, also $K \mathscr{N}_{\mathfrak{A}} L$.

Man erkläre $\beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z}$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ durch $K \beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z} L$, genau wenn ein $\beta_1 \mathscr{Z}$-Viereck (K_1, K_2) mit $K \in \mathfrak{K}_1$, $L \in \mathfrak{K}_2$ existiert; dann gilt $\gamma_{\mathfrak{A}} \mathscr{Z} = \cap \beta_n \mathscr{Z} \subseteqq \beta_1 \mathscr{Z} \subseteqq \beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{Z}$. *Damit lassen sich die in* 2.1 *bis* 2.3 *bewiesenen Sätze bei Ersetzung von* $\mathfrak{B}$ *durch* $\mathfrak{A}$ *und von* $\mathscr{L}$ *durch* $\mathscr{Z}, \beta_n \mathscr{Z}, \gamma_{\mathfrak{A}} \mathscr{Z}$ *aussprechen* $(n = \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots)$; *zum Beispiel wird wegen* (A_5) *dann* $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ *äquivalent zu* $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ *und zu*

$(A_6(n))$ *für alle* a, b *aus* E: *für alle* $\beta_n \mathscr{Z}$-*Vierecke* (K_1, K_2) *zwischen* a, b: *wenn* K *in* $\mathfrak{K}_1$ *und* K *endlich, so existiert* L *in* $\mathfrak{K}_2$, L *endlich,* K, L *gleich lang*

für jedes n $(n = 1, 2, \ldots)$[3]).

---

[2]) Allgemein kann man für Mengen $\mathfrak{B}$ von Ultraketten in $(E, \leqq)$ eine $\mathfrak{B}$-Zelle definieren als ein Paar (K_1, K_2) von Ketten K_i zwischen a, b aus E $(i = 1, 2)$, deren jede mindestens drei Elemente enthält, wobei für jedes Paar $\{k_1, k_2\}$ mit $k_i \in K_i$, $k_i \neq a$, $k_i \neq b$ gilt: es gibt kein u in E mit $u \neq a$ so, daß Ketten aus $\mathfrak{B}$ zwischen a, u und u, k_i existieren, und es gibt kein v in E mit $v \neq b$ so, daß Ketten aus $\mathfrak{B}$ zwischen v, b und k_i, v existieren. Dann wären die $\mathfrak{A}$-Zellen gerade die oben definierten, unter den $\mathfrak{F}$-Zellen mit endlichen Komponenten fänden sich die Zellen der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$. Für die hier beabsichtigten Anwendungen zeigt es sich, daß man mit den $\mathfrak{A}$-Zellen und den auch durch Relativierung zu erhaltenden $\mathfrak{F}$-Zellen auskommt. – Der Begriff der Zelle wurde von ORE [1] eingeführt; es treten dort nur einfache Zellen auf, die *simple cycles* heißen; der Begriff des $\beta_1 \mathscr{Z}$-Vierecks wurde von BENADO [4] erfunden, und ein $\beta_1 \mathscr{Z}$-Viereck heißt dort *einfaches Viereck*; eine Zelle, die Viereck ist, heißt bei BENADO [3], [4] *irreduzibles Viereck*. Die Relation $\beta_1 \mathscr{Z}$ findet sich bei KOLIBIAR [1]; ein Paar von in der Relation $\beta_1 \mathscr{Z}$ stehenden Ultraketten heißt dort *irreduzibler Zyklus*.

[3]) Die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ und $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ steht bei ORE [1], Th. 3, für den Spezialfall beschränkt längenendlicher $(E, \leqq)$ auch Th. 2; für beschränkt längenendliche $(E, \leqq)$ wurde die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_1 \mathscr{Z}}, \mathfrak{F}})$ und $(JHK_{\beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z}}, \mathfrak{F}})$, diese Aussage in einer $(A_{6(1)})$ ähnlichen Gestalt geschrieben, von BENADO [4] bewiesen; KOLIBIAR [1] zeigte für beliebiges $(E, \leqq)$ die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_1 \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$, $(JHK_{\beta_1 \mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\beta_1 \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ und $(A_{6(1)})$. Der Satz aus 2.3 findet sich für $\mathscr{Z}$ bei MACLANE [1], für $\beta_\frac{1}{2} \mathscr{Z}$ bei BENADO [4], für $\beta_1 \mathscr{Z}$ bei KOLIBIAR [1].

Sei $\mathfrak{V}_n$ die Menge aller $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke in $(E, \leqq)$ $(n=1, 2, \ldots)$; durch einen Auswahlprozeß bestimme man für alle a, b zu jedem $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Viereck zwischen a, b ein Paar von Seiten L_1, L_2 und Elemente x_i in L_i mit $x_i \neq a$, $x_i \neq b$ $(i=1, 2)$; sei $\mathfrak{W}_n$ die Menge derjenigen unter den so entstehenden Vierecken $(\{a, x_1, b\}, \{a, x_2, b\})$, die in $\mathfrak{V}_n$ liegen. Wegen (A_5) ist es dann in $(A_6(n))$ hinreichend, die Gültigkeit dieser Bedingung nur für $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke aus $\mathfrak{W}_n$ zu verlangen. Ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so kann man die x_i numerischen Bedingungen unterwerfen: $1 \leqq d(a, x_i) \leqq m_i$, $1 \leqq d(x_i, b) \leqq l_i$ $(i=1, 2)$; betrachtet man alle $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke $(\{a, x_1, b\}, \{a, x_2, b\})$ mit diesen Eigenschaften, so hat man $\mathfrak{W}_n$ wieder vergrößert (BENADO [4] gibt durch seine Bedingungen $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ zwei solcher Oberklassen von $\mathfrak{W}_1$ an: alle $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke mit $m_1=m_2=1$ und alle $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke mit $l_1=l_2=1$).

Sei $\mathscr{Z}_p$ die Relation, Komponente des gleichen einfachen Viereckes in $(E, \leqq)$ zu sein; es gilt $\mathscr{Z}_p \subseteq \gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z}$. Da für jede Menge $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} \subseteq \gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z}$, folgt aus $\gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$, aus $\gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = \mathscr{Z}_p$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = \mathscr{Z}_p$.

3. Nachbarschaftsbedingungen. 3.0. Der Nachweis von Jordan-Hölder-Sätzen schon für $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}$ scheint auch in den so noch übrig bleibenden Fällen günstiger Lage mühsam genug — bei aller Seltenheit bereits der $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke. Es sollen nun einfache Bedingungen untersucht werden, welche die Gültigkeit solcher Sätze in Fällen günstiger Lage zur Folge haben — diese beschrieben durch $\mathscr{Z}$. In ihnen tritt als wesentlich die Nachbarschaftsrelation auf, ferner sind sie *lokaler* Natur: zu je vier, in gewisser Situation befindlichen Elementen soll ein bestimmtes weiteres Element existieren.

3.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; seien R_i $(i=1, 2, 3, 4)$ binäre Relationen auf E, und sei $\leqq$ *gröber* als jedes R_i: aus xR_iy folge $x \leqq y$ $(i=1, 2, 3, 4)$. Weiter soll R_1 gröber sein als R_3, und es gelte

(A_{R_i}) *für alle* x, y, z *aus* E: *wenn* $x \lhd y$, yR_2z, *so* xR_2z

sowie

$(A_{R_1R_2R_3R_4})$ *für alle* x, y, z, v *aus* E: *wenn* $x \lhd y$, $y \leqq z$, $y \neq z$, zR_1v, yR_2v, xR_4z, *so existiert* r *in* E *mit*
$z \lhd r$ *oder* $r=z$,
yR_4r,
rR_3v *oder* $r=z$;

offenbar ist (A_{R_i}) äquivalent zu derjenigen Aussage, die bei Ersetzung von $x \lhd y$ durch $x \lhd\lhd y$ aus ihr entsteht, und man sieht sofort, daß wegen (A_{R_i}) auch in $(A_{R_1R_2R_3R_4})$ gleichzeitig $x \lhd y$ durch $x \lhd\lhd y$ sowie $z \lhd r$ *oder* $r=z$ durch $z \lhd\lhd r$, $d(z, r) \leqq d(x, y)$ ersetzt werden darf.

Dann ist die Aussage

$(C^{\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \parallel t$, $u \lhd t$, sR_1v, tR_2v, uR_4s, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, tR_4r, rR_3v

äquivalent zu

$(C^{*\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $u \lhd\lhd t$, sR_1v, tR_2v, uR_4s, *so existiert* r *in* E *mit*
$s \lhd\lhd r$,
$d(s, r) \leqq d(u, t)$,
tR_4r *oder* $r = t$,
rR_3v *oder* $r = t$ *oder* $r = s$.

Denn aus $(C^{*\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ folgt $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$, da für s, t, u, v aus $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ auch die Voraussetzung von $(C^{*\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ erfüllt ist und mit einem zugehörigen r dann wegen $s \| t$, $s \leqq r$, $t \leqq r$ gilt $r \neq s$, $r \neq t$, $d(s, r) = 1$. Für die umgekehrte Implikation nehme man noch $d(u, t) = n$ in die Voraussetzung von $(C^{*\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ auf, so daß eine Aussage $X(n)$ entsteht; $X(0)$ erfüllt man durch r gleich s, $X(1)$ folgt für $s \| t$ aus $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$, für $s \leqq t$ ist dann nur $s = u$ oder $s = t$ möglich, so daß man r gleich t setzen kann, und für $t \leqq s$, $t \neq s$ ersetze man s, t, u, v durch z, y, x, v und wende $(A_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ an. Sei $X(k)$ für alle k mit $0 \leqq k < n$, $1 < n$, bewiesen, und sei für s, t, u, v die Voraussetzung von $X(n)$ erfüllt; man wähle t_1 in E mit $u \lhd\lhd t_1$, $t_1 \lhd t$, $d(u, t_1) = n - 1$, und bestimme, da $t_1 R_2 v$ wegen (A_{R_2}), zu s, t_1, u, v vermöge $X(n-1)$ ein r_1 mit $s \lhd\lhd r_1$, $d(s, r_1) \leqq d(u, t_1)$, $t_1 R_4 r_1$ oder $r_1 = t_1$, $t_1 R_3 v$ oder $r_1 = t_1$ oder $r_1 = s$. Falls $r_1 = t_1$, so setze man r gleich t: wegen $s \lhd\lhd r_1 \lhd t$, $d(s, t) \leqq d(s, r_1) + 1 \leqq d(u, t_1) + 1 = d(u, t)$ ist dies möglich. Falls $r_1 \neq t_1$, so $t_1 R_4 r_1$, $r_1 R_1 v$ da sR_1v und R_1 gröber als R_3, weiter noch tR_2v, $t_1 \lhd t$, so daß man zu r_1, t, t_1, v vermöge $X(1)$ ein r bestimmen kann mit $r_1 \lhd\lhd r$, $d(r_1, r) \leqq d(t_1, t)$, tR_4r oder $r = t$, rR_3v oder $r = t$ oder $r = r_1$. Daraus folgt $s \lhd\lhd r_1 \lhd\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(s, r_1) + d(r_1, r) \leqq d(u, t_1) + d(t_1, t) = d(u, t)$; und da $r_1 \neq s$ wegen $r_1 \neq t_1$ zu $r_1 R_3 v$ führt, gilt auch im Falle $r = r_1$, $r \neq s$ noch immer rR_3v.

Insbesondere folgt aus $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 R_4})$ *für reflexives* R_2

$(D_{R_1 R_4})$ *für alle* a, b, c *aus* E: *wenn* $a \lhd\lhd b$, aR_4c, cR_1b, *so* $c \lhd\lhd b$, $d(c, b) \leqq d(a, b)$

(eine Analyse des letzten Beweises lehrt, daß man hier statt der Reflexivität von R_2 nur zu verlangen braucht, daß R_2 gröber sei als $\lhd$); wegen (A_{R_2}) ist R_2 genau dann reflexiv, wenn es gröber ist als $\lhd\lhd$.

Für den Rest von 3.1 sei R_2 reflexiv, R_1 gröber als R_3, und es gelte (A_{R_1}), (A_{R_3}). — Die Relation $\lhd$ besitzt für alle R_1, R_2, R_3 die Eigenschaft $(A_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$: da nicht zugleich $x \lhd y$, $x \lhd z$, $y \leqq z$, $y \neq z$ gelten kann, ist die Voraussetzung stets leer. $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$ *folgt aus*

$(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, sR_1v, tR_2v, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, tR_1r, rR_3v.

Denn gilt $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ und erfüllen s, t, u, v die Voraussetzungen von $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$, so wähle man r gemäß $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$; dann ist für t, s, u, r die Voraussetzung von $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ erfüllt, so daß es r' mit $t \lhd r'$, sR_1r', $r'R_3r$ gibt. Daraus aber folgt

$s \leqq r'$, $r' \leqq r$; wegen $t \leqq r'$, $s \| t$ und $s \lhd r$ also $r' = r$. — *Ist* R_1 *gröber als* $\lhd$, *so sind* $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ *und* $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$ sogar *äquivalent.*

Aus $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ *folgt*

$(D^{*}_{R_1})$ *für alle* a, b, c *aus* E: *wenn* $a \lhd\lhd b$, $a \lhd\lhd c$, $c R_1 b$, *so* $c \lhd\lhd b$, $d(c, b) \leqq d(a, b)$.

Das ist für $d(a, c) = 0$ klar und für $d(a, c) = 1$ gerade $(D_{R_1 \lhd})$; ist es für alle a', b', c' mit $0 \leqq d(a', c') < n$, $1 < n$, bewiesen und erfüllen a, b, c die Voraussetzung mit $d(a, c) = n$, so wähle man c_1 mit $a \lhd\lhd c_1$, $c_1 \lhd c$, $d(a, c_1) = n - 1$. Wegen (A_{R_1}) gilt $c_1 R_1 b$, so daß die Induktionsannahme zu $c_1 \lhd\lhd b$ führt; Anwendung von $(D_{R_1 \lhd})$ auf c_1, b, c gibt $c \lhd\lhd b$, weiter $d(c, b) \leqq d(c_1, b) \leqq d(a, b)$.

Für das Folgende sei noch R_1 gröber als R_2. Für $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ schreibe man dann $(B^{\vee}_{R_1 R_3})$; $(B^{\vee}_{R_1 R_3})$ *ist äquivalent zu*

$(B^{*\vee}_{R_1 R_3})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $u \lhd\lhd t$, $u \lhd\lhd s$, $s R_1 v$, $t R_2 v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd\lhd r$, $t \lhd\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(u, t)$, $d(t, r) \leqq d(u, s)$, $r R_2 v$ *oder* $r = s$.

Denn $(B^{\vee}_{R_1 R_3})$ ist äquivalent zu $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$; definiert man $x R^{(i)}_4 z$ durch $x \lhd\lhd z$, $d(x, z) \leqq i$, $i \geqq 0$ ganz, so liefert $(C^{*\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$ bei Vertauschung von s, t die Aussage $(C^{\vee}_{R_2 R_1 R_2 R^{(i)}_4})$ und bei Ersetzung von s, t, u, v durch y, z, x, v auch $(A_{R_2 R_1 R_2 R^{(i)}_4})$. Daher gilt für jedes i $(C^{*\vee}_{R_2 R_1 R_2 R^{(i)}_4})$, und daraus folgt $(B^{*\vee}_{R_1 R_2})$: man vertausche s, t und wähle r gleich $d(u, t)$. (Wenn sogar $R_1 = R_2$, so läßt sich $(B^{*\vee}_{R_1 R_2})$ ohne Rückgriff auf frühere Sätze beweisen: man bilde aus $(B^{*\vee}_{R_1 R_2})$ eine Aussage $X(i, k)$ durch Aufnahme von $d(u, t) = i$, $d(u, s) = k$ in die Voraussetzung; man erledige zunächst die Fälle $X(0, k)$, $X(1, 1)$. Ist $X(j, h)$ für $j + h < n$, $2 < n$, bewiesen und $i + k = n$, so kann man wegen der Äquivalenz von $X(i, k)$ und $X(k, i)$ dann $1 < k$ annehmen und mit nur *einem* Induktionsschritt von $X(i, k-1)$ auf $X(i, k)$ schließen. — Aus $(B^{*\vee}_{R_1 R_2})$ folgt übrigens sofort $(D^{*}_{R_1})$.)

Ist R_1 noch reflexiv, $R_1 = R$, so kann man für R_2 auch $\lhd\lhd$ wählen; für $(B^{\vee}_{R \lhd\lhd})$ schreibe man dann

$(B^{\vee}_{R})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, $s R v$, $t \lhd\lhd v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t R r$, $r \lhd\lhd v$;

$(B^{\vee}_{R})$ *ist äquivalent zu* $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R})$. Denn für r aus $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R})$ gilt dann $u \lhd\lhd r$, $r R v$, $u \lhd\lhd v$, so daß mit (D^{*}_{R}) auch $r \lhd\lhd v$ folgt. Somit ist $(B^{\vee}_{R})$ auch äquivalent zu $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd \lhd\lhd \lhd})$ $(t \lhd r$ statt $t R r)$ und zu $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R \lhd})$ $(t \lhd r$, $r R v$ statt $t R r$, $r \lhd\lhd v)$.

Für $(B^{\vee}_{\lhd\lhd})$ werde auch $(B^{\vee}_{3})$ geschrieben; $(B^{\vee}_{R})$ *ist äquivalent zur Konjunktion von* (B_3) *und* (D^{*}_{R}), weiter, wenn R_β gröber als R_α, $(B^{\vee}_{R_\beta})$ äquivalent zur Konjunktion von $(B^{\vee}_{R_\alpha})$ und $(D^{*}_{R_\beta})$.

Für $(B_{\leqq\leqq})$ werde

$(B^{\vee}_{2})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, $s \leqq v$, $t \leqq v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t \leqq r$, $r \leqq v$

geschrieben[4]); da aus $(B_2^\vee)$ dann $(D_{\leqq}^*)$ folgt, *hat* $(B_2^\vee)$ *jedes* $(B_K^\vee)$ *und insbesondere* $(B_3^\vee)$ *zur Folge.*

Die Relation $\leqq$ besitzt für alle R_1, R_2, R_3 die Eigenschaft $(A_{R_1,R_2,R_3,\leqq})$; für $(C_{\leqq\leqq\leqq}^\vee)$ werde auch

$(B_1^\vee)$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \leqq s$, $s \leqq v$, $t \leqq v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t \leqq r$, $r \leqq v$

geschrieben[5]); aus $(B_1^\vee)$ folgt $(B_2^\vee)$; es wird in 3.2 gezeigt werden, daß die aus $(B_1^\vee)$ folgende Aussage $(D_{\leqq\leqq})$ sich dann zu (KON) verschärfen läßt. *Ist* E *diskret geordnet, so ist* $(B_1^\vee)$ *zu* $(B_2^\vee)$ *und offenbar auch* $(B_2^\vee)$ *zu* $(B_3^\vee)$ *und zu allen* $(B_K^\vee)$ *äquivalent*[6]: die Voraussetzungen von $(B_1^{*\vee})$, nämlich $(C_{\leqq\leqq\leqq\leqq}^{*\vee})$, sind dann identisch mit denen von $(B_2^{*\vee})$, nämlich $(B_{\leqq\leqq}^{*\vee})$. *Folglich gilt* $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$ *genau dann, wenn eine der Aussagen* $(B_1^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_K^\vee)$, $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \lhd\lhd)$ *gilt.*

3.2. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, $\mathfrak{B}$ eine Klasse von Ultraketten in $(E, \leqq)$, welche die Klasse $\mathfrak{F}$ aller endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$ enthält; man definiere eine Relation R auf E durch aRb genau dann, wenn eine Ultrakette aus $\mathfrak{B}$ zwischen a, b existiert. Weiter sei $\mathfrak{B}$ so beschaffen, daß für die Relation R die Aussagen (A_R) und

$(A_{\mathfrak{B}})$ *für alle* x, z *aus* E: *für alle* K *aus* $\mathfrak{B}$: *wenn* K *Ultrakette zwischen* x, z, *so existiert* y *in* K *mit* $x \lhd y$, yRz

gelten. Jede unendliche Ultrakette aus $\mathfrak{B}$ besitzt dann einen Ordnungstypus $\omega+\xi$ (ξ beliebig), also einen *Anfang*, welcher zu den natürlichen Zahlen ordnungsisomorph ist, und die Menge aller Ultraketten mit dieser Eigenschaft, vereinigt mit $\mathfrak{F}$, liefert ein Beispiel einer Klasse $\mathfrak{B}$. Weitere Beispiele sind $\mathfrak{F}$ selbst ($R = \lhd\lhd$), ferner die Klasse $\mathfrak{B}_w$ aller wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$ sowie für jede transfinite Ordnungszahl λ die Klasse $\mathfrak{B}_\lambda$ aller der wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$, deren Ordnungstypus nicht größer ist als λ — diese $\mathfrak{B}_\lambda$ werden für große λ gleich $\mathfrak{B}_w$.

Gilt $(B_K^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so* $\mathfrak{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}_p$ (eine einfache Zelle ist ein Viereck, wenn eine ihrer Komponenten endlich ist und die andere zu $\mathfrak{B}$ gehört;) *gilt*

---

[4]) Die zu $(B_2^\vee)$ äquivalente Aussage $(C_{\leqq\leqq\leqq\lhd})$ ist gerade die *quadrilateral condition* von ORE [1]. Für beschränkt längenendliche Verbände findet sie sich bei BIRKHOFF [1]; solche ihr genügende Verbände werden bei KLEIN [2] als *Birkhoffsch* bezeichnet, bei BIRKHOFF [2] als *semimodular*. Inzwischen ist der Name semimodular bei nicht beschränkt längenendlichen Verbänden durch CROISOT [1] an eine Klasse von Verbänden vergeben worden, welche enger ist als die der $(B_2^\vee)$ genügenden. Für geordnete Mengen betrachtete KLEIN [4] eine wenig leistende Abschwächung von $(B_2^\vee)$ als *Axiom C*.

[5]) Diese Bedingung findet sich implizite schon bei DEDEKIND [1], § 6, Th. XII, explizite für beschränkt längenendliche Verbände bei BIRKHOFF [1] und KLEIN [2].

[6]) Für beschränkt längenendliches $(E, \leqq)$ zeigte dies BENADO [3], Th. 4.73; für beschränkt längenendliche Verbände bereits BIRKHOFF [1], Th. 9.1, KLEIN [2], Th. 10, KOŘINEK [2], [3], Th. 3.3. Wie sich zeigen wird, ist $(E, \leqq)$ bei Gültigkeit einer dieser Aussagen auch beschränkt längenendlich.

$(B_1^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) = \mathscr{Z}_p$ (eine einfache Zelle ist ein Viereck, wenn eine ihrer Komponenten endlich ist).

Gilt $(B_K^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so auch* $(JHK_{\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$; *gilt* $(B_1^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so auch* $(JHK_{\mathscr{Z}_p, \mathfrak{A}})$; *insbesondere ist* $(JHK_{\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}_w})$ *eine Folge von* $(B_2^\vee)$, denn $(B_2^\vee)$ impliziert jedes $(B_K^\vee)$. Wegen 2.1 genügt es zum Beweis, *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{B} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ und *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ zu zeigen, und dabei ist *non* $\mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ nach 2.4 bereits gesichert. Gelte also $(B_K^\vee)$ in $(E, \leqq)$, seien K, L Ultraketten zwischen a, b mit K *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) L$, $K \neq L$; man wähle x in K, y in L mit $a \lhd x$, $a \lhd y$; wenn $x = y$, so $K \mathscr{M}_\mathfrak{B} L$; wenn $x \neq y$, so liefert Anwendung von $(B_K^\vee)$ auf x, y, a, b ein z mit zRb, sogar $z \lhd\lhd b$; da wegen $x \lhd z$, $y \lhd z$, K *non* $\mathscr{Z}$ L gewiß $z \neq b$, kann man jetzt wie in 2.4 auf $L \mathscr{N}_\mathfrak{B} L$ schließen[7]).

Da bei dem Nachweis von *non* $\mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ in 2.4 das Auswahlaxiom benutzt wurde, sei bemerkt, daß man mit $(B_1^\vee)$ auch ohne jenes auf *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ schließen kann. Dazu genügt es offenbar, (KON) zur Verfügung zu haben — durch Induktion nach $d(a, b)$ zeigt man aber (ORE): seien K, L Ultraketten zwischen a, b, K in $\mathfrak{F}$ und von kürzester Länge, und mögen K, L außer a, b keine Elemente gemeinsam haben; liegt x in K mit $x \lhd b$, so gilt für jedes von a, b verschiedene y aus L wegen $(B_1^{*\vee})$ dann $y \lhd\lhd b$, $d(y, b) \leqq d(a, b) - 1$ (falls $y \leqq x$, muß die Induktionsannahme ausgenutzt werden!). Wenn $d(a, b) = 2$, so gibt es daher genau ein solches y in L; wenn aber $d(a, b) > 2$ und es mehr als $d(a, b) - 1$ von a, b verschiedene y in L gäbe, so wäre für mindestens zwei von ihnen die Zahl $d(y, b)$ die gleiche, und da die beiden y vergleichbar wären, hätte man einen Widerspruch zur Induktionsannahme. — Ist *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{B} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ einmal bewiesen, so kann man wegen der Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathfrak{B}})$ zur Konjunktion von (JD) und $(FIN_\mathfrak{B})$ zum Beweis der letzten Aussagen auch so vorgehen, daß aus $(B_K^\vee)$ direkt (JD) und $(FIN_\mathfrak{B})$ abgeleitet werden (der Schluß von $(B_1^\vee)$ auf (ORE), eben die Konjunktion von (JD) und $(FIN_\mathfrak{A})$, wurde ja soeben durchgeführt); aus $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathfrak{B}})$ folgt wieder $(JHK_{\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$. Gilt $(B_K^\vee)$ in $(E, \leqq)$, so seien K, L Ultraketten zwischen a, b, K in $\mathfrak{F}$ und von kürzester Länge, L in $\mathfrak{B}$; für ein Induktionsverfahren kann man annehmen, daß K, L nur a, b gemeinsam haben. Man wähle x in K mit $x \lhd b$, y in L mit $a \lhd y$; Anwendung von $(B_K^{*\vee})$ auf x, y, a, b ergibt $y \lhd\lhd b$, $d(y, b) \leqq d(a, x)$ (falls $y \leqq x$, muß die Induktionsannahme ausgenutzt werden!); da K von kürzester Länge war,

[7]) Die Idee, daß $(B_2^\vee)$ die einfachen Zellen mit endlichen Komponenten zu Vierecken werden läßt und daher Überlegungen wie die aus 2.4 angewendet werden können, rührt im Wesentlichen von Ore [1] her; dort wird in geordneten Mengen $(JHK_{\mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$ aus $(B_2^\vee)$ gefolgert. Schon Dedekind [1], § 6, Th. XVI, hatte (JD) für modulare beschränkt längenendliche Verbände bewiesen, dabei aber nur $(B_1^\vee)$ und die dazu duale Aussage benutzt. Birkhoff [1], Th. 8.2, Th. 15.2 verschärfte (JD) für beschränkt längenendliche Verbände mit $(B_2^\vee)$ zu einer $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathfrak{F}})$ verwandten Aussage. Der durch $(B_1^\vee)$ ermöglichte Endlichkeitsschluß scheint für Verbände zuerst von Croisot [1] und Szas [1] gefunden worden zu sein, man vergleiche auch Hermes [1], p. 72; daß $(B_2^\vee)$ in Verbänden auf $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathfrak{B}_w})$ zu schließen erlaubt, bemerkte Vilhelm [1], Th. 3.3.

gilt $d(y, b) \leqq d(a, x) < d(a, b)$, so daß nach Induktionsannahme auch $L \cap [y, b]$ endlich ist und die Länge $d(y, b)$, $d(y, b) = d(a, b) - 1$, hat: L ist endlich mit der Länge $d(a, b)$.

Die Aussage $(B_3^\vee)$ ist nichts anderes als eine Aussage über den diskreten Teil $\lhd\lhd$ der Ordnung $\leqq$; die Aussagen $(B_1^\vee)$ und $(B_K^\vee)$ beschreiben hingegen, in welcher Weise die Relation $\lhd\lhd$ in die Relation $\leqq$ *eingelagert* ist. Aus $(B_2^\vee)$ folgt sogar, daß schon diejenigen einfachen Zellen zu Vierecken werden, deren beide Komponenten etwa wohlgeordnet sind $(\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_w \times \mathfrak{B}_w) = \mathscr{Z}_p)$, und wenn $(B_1^\vee)$ gilt, braucht man dazu nur das Wohlgeordnetsein einer der Komponenten zu fordern $(\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_w \times \mathfrak{A}) = \mathscr{Z}_p)$ — jedoch findet man leicht Beispiele von Verbänden, in denen $(B_1^\vee)$ gilt und zwischen zwei Elementen a, b unendliche Ultraketten von Typ ω liegen (die dann keine Komponenten von Zellen sein können). Die aus $(B_1^\vee)$ und $(B_3^\vee)$ gefolgerten Sätze $(JHK_{\delta \mathscr{Z}_p, \mathfrak{A}})$ und $(JHK_{\delta \mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$ gehen bei dem Übergang von $\leqq$ zur inversen Ordnung $\geqq$ in sich über, sie folgen daher auch aus den dualen Bedingungen $(B_1^\wedge)$ und $(B_3^\wedge)$; für die Dualisierung von $(B_K^\vee)$ und $(JHK_{\delta \mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$ muß man von der Klasse $\mathfrak{B}$ zur dual definierten übergehen.

3.3. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; man definiere eine binäre Relation $\mathscr{Z}^\delta$ für endliche Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ durch $K \mathscr{Z}^\delta L$ genau dann, wenn (K, L) eine Zelle in der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$ ist; *stets gilt* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \leqq \mathscr{Z}^\delta$, *aus* $(B_3^\vee)$ *folgt* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$. *Aus* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *folgen* $(JHK_{\delta \mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$ *und* $(JHK_{\delta \mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$. Denn in der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$ erschließt man wie in 2.4 *non* $\mathscr{Z}^\delta \leqq \mathscr{N}_{\mathfrak{F}} \cup non\, \mathscr{D}$, $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ liefert $(JHK_{\mathscr{Z}^\delta, \delta \mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$, so daß das Reduktionstheorem aus 2.1, angewandt auf $(E, \lhd\lhd)$, dort $(JHK_{\delta \mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$ ergibt — das aber besagt in $(E, \leqq)$ dann $(JHK_{\delta \mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$.

Es wird behauptet, daß $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$ *gleichwertig sei zur Konjunktion von* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *mit der Aussage*

(A_7) *es gibt keine* s, t, u, v, x, y, z *in* E *mit folgenden Eigenschaften:* $s \| t$, $s \| z$, $t \| z$, $u \lhd s \lhd x \lhd v$, $u \lhd t \lhd y \lhd v$, $u \lhd z \lhd x$, $z \lhd y$, *für alle* r *mit* $s \lhd\lhd r \lhd\lhd v$, $t \lhd\lhd r$ *gilt* $r = v$ [8]).

Zunächst ist klar, daß diese Bedingungen notwendig für $(B_3^\vee)$ sind; sei nun umgekehrt $(B_3^\vee)$ in $(E, \leqq)$ nicht erfüllt, man kann annehmen, daß $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ gilt, so daß (A_7) zu falsifizieren ist. Über $(JHK_{\delta \mathscr{Z}, \mathfrak{F}})$ folgt aus $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ auch (JD); da $(B_3^\vee)$ nicht gilt, gibt es Quadrupel von Elementen aus E, die den Voraussetzungen von $(B_3^\vee)$ genügen, ohne daß die zugehörige Behauptung

[8]) Für beschränkt längenendliche Verbände bewies dies (mit $(B_2^\vee)$ an Stelle von $(B_3^\vee)$) VILHELM [2], Th. 2.2; aus diesem Grunde wird dort $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$ als *selbstdualer Kern* von $(B_2^\vee)$ bezeichnet. In solchen Verbänden besagt (A_7) die Nicht-Existenz eines gewissen, aus 7 Elementen bestehenden Teilverbandes; allgemein bedeutet (A_7) gerade die Nicht-Existenz von 7 Elementen, die in ihrer konvexen Hülle, geordnet durch die Spur von $\lhd\lhd$, einen solchen Teilverband bilden. Ist insbesondere $(E, \lhd\lhd)$ ein Verband, so folgt das oben Behauptete sogleich aus dem Satz von VILHELM.

erfüllt wäre; unter diesen wähle man s, t, u, v mit für diese Eigenschaft minimalem $d(u, v)$. Wegen dieser Minimalität ist dann v in $(E, \lhd\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{s, t\}$; wegen des Nichterfülltseins von $(B_3^\vee)$ für s, t, u, v gibt es etwa ein x und wegen (JD) dann auch ein y in E mit $s \lhd\lhd x \lhd\lhd v$, $t \lhd\lhd y \lhd\lhd v$, $x \parallel y$, $x \neq s$, $x \neq v$, $y \neq t$, $y \neq v$. Da v dann in $(E, \lhd\lhd)$ minimale obere Schranke auch von $\{x, y\}$ ist, kann man überdies x, y wegen $\mathscr{L}^\delta = \mathscr{L}_p$ so wählen, daß ein z in E mit $u \lhd\lhd z \lhd\lhd x$, $z \lhd\lhd y$, $z \neq u$ existiert, ferner nicht $s \leqq z$, wegen $u \lhd s$ daher $z \parallel s$, ebenso $z \parallel t$. Wegen $d(u, x) < d(u, v)$ und der Minimalität von $d(u, v)$ kann man jetzt $(B_3^{*\vee})$ auf s, z, u, x anwenden (oder: wegen (JD) ist $(E, \lhd\lhd)$ beschränkt längenendlich, so daß dort $(B_3^\vee)$ und $(B_1^\vee)$ übereinstimmen und man auf s, z, u, x $(B_1^\vee)$ anwenden kann) und ein r_1 finden mit $z \lhd r_1$, $s \lhd\lhd r_1 \lhd\lhd x$, ebenso ein r_2 mit $z \lhd r_2$, $t \lhd\lhd r_2 \lhd\lhd y$. Da $d(z, v) < d(u, v)$, kann man $(B_3^\vee)$ auf r_1, r_2, z, v anwenden; da aber wieder v in $(E, \lhd\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{r_1, r_2\}$, muß $r_1 \lhd v$, $r_2 \lhd v$ gelten, also $r_1 = x$, $r_2 = y$. Kann man nun $u \lhd z$ zeigen, so gilt wegen (JD) auch $s \lhd x$, $t \lhd y$, so daß dann s, t, u, v, x, y, z die Aussage (A_7) verletzen. Angenommen, $u \lhd z$ gälte nicht; man wählte z_1 mit $u \lhd\lhd z_1$, $z_1 \lhd z$; Anwendung von $(B_3^{*\vee})$ auf s, z_1, u, x lieferte x_1 mit $z_1 \lhd x_1$, $s \lhd\lhd x_1 \lhd\lhd x$, wegen $z_1 \lhd z \lhd x$ aber $d(z_1, x) = 2$, so daß $x_1 \neq x$; ebenso fände man y_1 mit $z_1 \lhd y_1$, $t \lhd\lhd y_1 \lhd\lhd y$, $y_1 \neq y$. Da v in $(E, \lhd\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{s, t\}$, gilt $x_1 \parallel y_1$; aus dem gleichen Grunde aber v in $(E, \lhd\lhd)$ auch minimale obere Schranke von $\{x_1, y_1\}$ — daher wäre $(B_3^\vee)$ für x_1, y_1, z_1, v verletzt, und das wäre wegen $d(z_1, v) < d(u, v)$ ein Widerspruch zur Minimalität von $d(u, v)$.

4. Perspektivität. 4.0. In den folgenden Abschnitten werden konkrete Relationen $\mathscr{R}$ definiert, für die sich Sätze $(JHK_{\mathscr{R}})$ beweisen lassen. Diese Relationen $\mathscr{R}$ werden mit Hilfe einer binären, zwischen Intervallen erklärten Relation konstruiert: der Perspektivität.

4.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, seien $[x, y]$, $[w, z]$ zwei Intervalle von $(E, \leqq)$; man schreibe $[x, y] \mathscr{P} [w, z]$, wenn x maximale untere und z minimale obere Schranke von $\{y, w\}$ ist — wenn also $[x, y] = [w, z]$ oder $x = y$, $w = z$, $x \leqq w$ oder $\{x, y, z\}$, $\{x, w, z\}$ Ketten und Komponenten einer Zelle in $(E, \leqq)$ sind; die Relation $\mathscr{P}$ heiße *Perspektivität* und $[x, y]$ dann *perspektiv unter* $[w, z]$. Weiter sei $\mathscr{T}$ die von $\mathscr{P}$ erzeugte Äquivalenzrelation; $\mathscr{T}$ heiße *Projektivität* (man vgl. BIRKHOFF [2], p. 73).

Ist $(E, \leqq)$ Multiverband nach oben oder ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so ist $(B_1^\vee)$ äquivalent zu

$(P_1^\vee)$ *für alle s, t, u, r aus E: aus $u \lhd t$, $[u, t] \mathscr{P} [s, r]$ folgt $s \lhd r$*

und zu

$(P_1^{*\vee})$ *für alle s, t, u, r aus E: aus $u \lhd\lhd t$, $[u, t] \mathscr{P} [s, r]$ folgt $s \lhd\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(u, t)$;*

weiter $(B_2^\vee)$ *äquivalent zu Aussagen* $(P_2^\vee)$ *und* $(P_2^{*\vee})$, *die aus* $(P_1^\vee)$ *und* $(P_1^{*\vee})$ *durch Aufnahme von* $u \lhd s$ *oder* $u \lhd\lhd s$ *in die Voraussetzungen entstehen*[9]). Zunächst nämlich ist $(P_i^{*\vee})$ allemal eine Folge von $(B_i^{*\vee})$, $(P_i^\vee)$ eine Folge von $(P_i^{*\vee})$ $(i=1, 2)$. Ist weiter $(E, \leqq)$ diskret geordnet und gilt $(P_2^\vee)$ oder gar $(P_1^\vee)$, so folgt $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) = \mathscr{Z}_p$; wegen der Diskretheit gilt weiter $\mathscr{N}_{\mathfrak{A}} = \mathscr{N}_{\mathfrak{F}}$, so daß man auf $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ schließen kann; insbesondere gilt daher (JD), $(E, \leqq)$ ist also beschränkt längenendlich und damit auch Multiverband. Sei nun $(E, \leqq)$ ein Multiverband nach oben, in dem $(P_i^\vee)$ gilt, und seien für s, t, u, v die Voraussetzungen von $(B_i^\vee)$ erfüllt $(i=1, 2)$. Man wähle r als minimale obere Schranke von $\{s, t\}$ mit $r \leqq v$; s, t, u, r erfüllen dann die Voraussetzungen von $(P_i^\vee)$, also gilt $s \lhd r$, und $(B_i^\vee)$ ist in Kraft $(i=1, 2)$.

4.2. Die aus $\mathscr{T}$ nach 2.0 definierte Relation $\varkappa\mathscr{T}$ ist λ-invariant, *so daß* $(JHI_{\mathscr{T}})$, nämlich $JHK_{\varkappa\mathscr{T}, \mathfrak{F}}$, *äquivalent ist zu* $(JHK_{\mathscr{Z}^\delta, \varkappa\mathscr{T}, \mathfrak{F}})$ (für beschränkt längenendliche Verbände: VILHELM [2], Th. 3.1). Gilt $(B_3^\vee)$ in $(E, \leqq)$, so wird für endliche Ultraketten $\mathscr{Z}$ zu $\mathscr{Z}_p$, und aus $\mathscr{Z}_p$ folgt $\varkappa\mathscr{T}$ trivial — *aus* $(B_3^\vee)$ *folgt daher* $(JHI_{\mathscr{T}})$, entsprechend für die in 3.2 betrachteten Klassen $\mathfrak{B}$ *aus* $(B_K^\vee)$ *dann* $(JHI_{\mathscr{T}})$ *zuzüglich* $(FIN_{\mathfrak{B}})$.

Allgemein hat bereits $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ schon $(JHI_{\mathscr{T}})$ zur Folge, jedoch kann $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}$ von $\varkappa\mathscr{T}$ verschieden sein: man betrachte etwa eine Menge E von Elementen a_i $(i=1, \ldots, 13)$ und definiere eine Ordnung $\leqq$ durch $a_{13} \leqq x \leqq a_1$ für alle x, $a_{10} \leqq a_5 \leqq a_2$, $a_{10} \leqq a_6 \leqq a_2$, $a_{10} \leqq a_7 \leqq a_3$, $a_5 \leqq a_3$, $a_{11} \leqq a_6$, $a_{11} \leqq a_8 \leqq a_4$, $a_{12} \leqq a_9 \leqq a_4$, $a_{12} \leqq a_8$, $a_{12} \leqq a_7$, $a_9 \leqq a_3$; damit ist $(E, \leqq)$ ein Verband, und die Ketten $\{a_{11}, a_6, a_2, a_1\}$, $\{a_{11}, a_8, a_4, a_1\}$ stehen in der Relation $\varkappa\mathscr{T}$, nicht aber in der Relation $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}$. — Es liegt daher nahe, $(JHI_{\mathscr{T}})$ durch Verschärfung von $\mathscr{T}$ zu einer Aussage zu machen, die zu $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ äquivalent ist.

Seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b; zwischen K, L bestehe die Relation $(\varkappa\mathscr{T})_q$, wenn $\varkappa\mathscr{T}$ zwischen ihnen gilt und noch Folgendes erfüllt ist: es gibt $\lhd$-Intervalle $[x_i, y_i]$ $(i=0, \ldots, n)$ von $(E, \leqq)$ mit $[x_0, y_0] \in K^*$, $[x_n, y_n] \in L^*$, $[x_{j-1}, y_{j-1}]$ $(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}^{-1})$ $[x_j, y_j]$ $(j=1, \ldots, n)$, $a \lhd\lhd x_i$, $y_i \lhd\lhd b$, $y_{j-1} \lhd y_j$ und $x_{j-1} \lhd\lhd x_j$ im Falle $[x_{j-1}, y_{j-1}] \mathscr{P} [x_j, y_j]$, $y_j \lhd y_{j-1}$ und $x_j \lhd\lhd x_{j-1}$ im Falle $[x_{j-1}, y_{j-1}] \mathscr{P}^{-1} [x_j, y_j]$. Weiter bestehe $(\varkappa\mathscr{T})_p$ zwischen K, L, wenn $\varkappa\mathscr{T}$ zwischen ihnen gilt und zu jedem $[x_0, y_0]$ aus K^* und dem wegen $K \varkappa\mathscr{T} L$ in L^* vorhandenen $[x_n, y_n]$ mit $[x_0, y_0] \mathscr{T} [x_n, y_n]$ sich eine Folge von $[x_i, y_i]$ mit den eben genannten Eigenschaften finden läßt, wobei überdies $x_{j-1} \lhd x_j$ oder $x_j \lhd x_{j-1}$.

Es wird behauptet, daß $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q, \mathfrak{F}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_p, \mathfrak{F}})$ *untereinander sowie zu* $\gamma_{\mathfrak{F}} \mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *äquivalent seien*. Da trivialerweise aus $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$

[9]) Für beschränkt längenendliche Verbände zeigte KOŘINEK [2], [3], Th. 5.1, die Äquivalenz von $(B_2^\vee)$ und $(P_2^{*\vee})$; (JD) vorausgesetzt, wurde dies bereits von KLEIN [2], Th. 14, bewiesen. Ist $(E, \leqq)$ nicht diskret geordnet, so läßt sich die Äquivalenz analog gebildeter Aussagen zu $(B_K^\vee)$ nicht ohne Weiteres behaupten; zwar hätten solche Aussagen für zu R gehöriges $\mathfrak{B}$ immer noch $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) = \mathscr{Z}_p$ zur Folge, aber *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} \cup$ *non* $\mathscr{D}$ ließe sich nicht mehr beweisen. Und selbst wenn $(E, \leqq)$ als Multiverband nach oben vorausgesetzt würde, brauchte das dann zu s, t, u, v vorhandene r nicht mehr mit s, t, u die Voraussetzungen der entsprechenden Abschwächungen von $(P_2^\vee)$ zu erfüllen.

stets $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_p,\mathfrak{F}})$ und daraus auch $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ folgt, da weiter $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{L}^{\delta}=\mathscr{L}_p$ nach dem in 3.3 und 2.1 Bemerkten sogleich $(JHK_{\delta\mathscr{L}_p,\mathfrak{F}})$ nach sich zieht, bleibt nur nachzuweisen, daß $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ auch $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{L}^{\delta}=\mathscr{L}_p$ zur Folge hat[10]). Seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, $K\neq L$, $d(a,b)\geqq 2$, K *non* $\mathscr{L}_p$ L; da $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ gewiß (JD) impliziert, kann nicht $d(a,b)=2$ gelten. Man betrachte die wegen $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ vorhandenen Intervalle $[x_i, y_i]$ $(i=0,\ldots,n)$; wegen der Transitivität von $\mathscr{N}_{\mathfrak{F}}$ kann man $n=1$ annehmen. Da im Falle $[x_0,y_0]\mathscr{P}[x_1,y_1]$ gilt $x_0\lhd y_0\lhd y_1$, $x_0\lhd\lhd x_1$, $x_1\lhd y_1$, im Falle $[x_0,y_0]\mathscr{P}^{-1}[x_1,y_1]$ aber $x_1\lhd y_1\lhd y_0$, $x_1\lhd\lhd x_0$, $x_0\lhd y_0$, gibt (JD) auch $x_0\lhd x_1$ oder $x_1\lhd x_0$. Wenn $x_0=a$, so tritt der erste Fall ein; wegen $d(a,b)\geqq 3$ dann $y_0\neq b$, wegen $y_0\lhd y_1$ auch $d(a,y_1)=2$, $y_1\neq b$; man setze $K_1=(K\cap[a,y_0])\cup(L\cap[y_1,b])$. Wenn $x_0\neq a$ und der erste Fall eintritt, so wegen $x_0\lhd y_0\lhd y_1$, $y_1\leqq b$ auch $x_0\neq b$, $x_1\neq b$, $x_1\neq a$; man setze $K_1=(K\cap[a,x_0])\cup(L\cap[x_1,b])$. Entsprechend hat man beim Eintreten des zweiten Falles für $y_0=b$ dann $x_1\neq a$, $x_1\neq b$ und setzt $K_1=(L\cap[a,x_1])\cup(K\cap[x_0,b])$, für $y_0\neq b$ auch $y_1\neq a$, $y_1\neq b$ und $K_1=(L\cap[a,y_1])\cup(K\cap[y_0,b])$. Daher gilt stets $K\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}K_1\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}L$, also $K\mathscr{N}_{\mathfrak{F}}L$.

4.3. Sei $(E,\leqq)$ eine geordnete Menge; die $\mathscr{T}$-invarianten Intervallfunktionen auf $(E,\leqq)$ heißen auch *perspektiv-invariant*. Ist $(E,\leqq)$ Verband und g eine Bewertung von $(E,\leqq)$ (allgemeiner: $(E,\leqq)$ Multiverband und g eine Bewertung dritter Art von $(E,\leqq)$ im Sinne von Benado [3], Def. 5.1, [5], Def. 2.3.2), so ist φg eine $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion auf $(E,\leqq)$; ist $(E,\leqq)$ ein nach oben oder unten gerichteter Multiverband und f eine additive, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion auf $(E,\leqq)$, so ist wegen $\varphi\psi_a f=f$ auch $\psi_a f$ für jedes a aus E eine Benadosche Bewertung dritter Art von $(E,\leqq)$. Für diesen Schluß kann die Additivität von f nicht entbehrt werden: es gibt Verbände $(E,\leqq)$, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktionen f auf $(E,\leqq)$ und Elemente a in E so, daß $\chi_a f$ mit $\chi_a f(x)=f(a,a\cup x)-f(x,a\cup x)$ keine Bewertung von $(E,\leqq)$ ist — man definiere über $\{u,a,x,y,v\}$ einen nicht modularen Verband durch $u\leqq a\leqq x\leqq v$, $u\leqq y\leqq v$, setze f für alle nur ein Element enthaltenden Intervalle gleich Null, für alle anderen gleich Eins: $\chi_a f(x)+\chi_a f(y)\neq\chi_a f(x\cup y)+\chi_a f(x\cap y)$ (diese Bemerkung lehrt auch, daß die bei Birkhoff [2], p. 84, Ex. 3, ausgesprochene Behauptung nur dann korrekt ist, wenn von der dort angegebenen Intervallfunktion $w(x,y)$ noch Additivität vorausgesetzt wird).

Die nach 1.3 von der Äquivalenzrelation $\mathscr{T}$ bestimmten Intervallfunktionen über $\lhd\lhd$ werden mit p_ϱ $(\varrho\in\mathsf{P})$ bezeichnet (eingeführt von Birkhoff [2], p. 75, in beschränkt längenendlichen Verbänden und bei Gültigkeit von $(JHI_{\mathscr{T}})$); *ihre Additivität ist dann zu* $(JHI_{\mathscr{T}})$ *äquivalent*. Im Allgemeinen ist keine der Funktionen p_ϱ $\lhd$-treu; das Verhalten der ganzen Schar erlaubt jedoch eine Kennzeichnung gewisser Intervalle: *seien* a, b *aus* E *mit* $a\lhd\lhd b$; *es gilt genau*

[10]) Die Aussage $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{L}^{\delta}=\mathscr{L}_p$ ist äquivalent zu *non* $\mathscr{L}_p\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})\subsetneq\mathscr{N}_{\mathfrak{F}}\cup$ *non* $\mathscr{L}$; für beschränkt längenendliche Verbände ist die Äquivalenz von $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{L}=\mathscr{L}_p$ und $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ Inhalt des Theorems 3.3 in Vilhelm [2]. Betrachtet man $\mathfrak{F}$ umfassende Klassen $\mathfrak{B}$ und Sätze $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{B}})$, also $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ zuzüglich $(FIN_{\mathfrak{B}})$, so kann man die Definition von $(\varkappa\mathscr{T})_q$ mittels Ersetzung von $\lhd\lhd$ durch das zu $\mathfrak{B}$ gehörige R abschwächen.

dann $a=b$, *wenn* $p_\varrho(a,b)=0$ *für alle* ϱ *aus* P; *es gilt genau dann* $a\lhd b$, *wenn es ein* ϱ *in* P *gibt mit* $p_\varrho(a,b)=1$ *und alle für* λ *aus* P *mit* $\lambda\neq\varrho$ *gilt* $p_\lambda(a,b)=0$.

In der Tat sind diese Bedingungen für $a\lhd b$ sicherlich notwendig. Seien umgekehrt K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, $a\neq b$, $x\in K$, $y\in L$, $z\in L$, $a\lhd x$, y minimal in L für $x\leqq y$, weiter $z\lhd y$. Falls $y=x$, so sind $[a,x]$, $[z,y]$ identisch, andernfalls gilt $x\parallel z$, und $[a,x]$, $[z,y]$ sind projektiv. Ist also μ die $\mathscr{T}$-Klasse von $[a,x]$, so gilt $p_\mu(a,b)\geqq 1$ — wenn $a\neq b$, so kann daher nicht $p_\varrho(a,b)=0$ für alle ϱ aus P gelten. Gilt aber $p_\varrho(a,b)=1$ und $p_\lambda(a,b)=0$ für $\lambda\neq\varrho$, so folgt $\mu=\varrho$. Dual muß für w aus K mit $w\lhd b$ auch $[w,b]$ in ϱ liegen — dies aber trifft für jede endliche Ultrakette K zwischen a, b zu, gälte also nicht $a\lhd b$, so folgte $p_\varrho(a,b)\geqq 2$. — Setzt man in $(E,\leqq)$ noch (JD) voraus, so ist für die Intervalle $[a,b]$ mit $a\lhd\lhd b$ eine entsprechende Aussage über die p_ϱ für $d(a,b)=2$ notwendig, für $d(a,b)=3$ (wie auch für $d(a,b)=2$ ohne (JD)) schon nicht mehr. Hinreichend aber ist eine solche Aussage nicht einmal für $d(a,b)=2$: in dem in 4.2 angegebenen Beispiele betrachte man den von a_i $(i=3,5,7,9,10,12,13)$ gebildeten Teilverband, in welchem noch die Beziehung $a_{10}\leqq a_7$ gestrichen wird: es gibt nur drei $\mathscr{T}$-Klassen ϱ, λ, μ, die etwa durch $[a_{13}, a_{10}]$, $[a_{13}, a_{12}]$, $[a_{10}, a_5]$ repräsentiert werden, und es gilt $p_\varrho(a_{13}, a_3)=1$, $p_\lambda(a_{13}, a_3)=1$, $p_\mu(a_{13}, a_3)=0$, $d(a_{13}, a_3)=3$.

Diese Beschreibung der $\lhd$-Intervalle erlaubt es, die Aussagen $(B_1^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_K^\vee)$, $(B_3^\vee)$ mit Hilfe der Funktionen p_ϱ zu formulieren: mit den Bezeichnungen dieser Aussagen gilt nämlich allemal $[u,t]\mathscr{P}[s,r]$. Aus $(B_3^\vee)$ folgt aber bereits $(JHI_{\mathscr{T}})$ und damit die Additivität der p_ϱ. Dieses beachtend, *sieht man* leicht, *daß sich die Aussagen* $(B_1^{*\vee})$, $(B_2^{*\vee})$, $(B_K^{*\vee})$, $(B_3^{*\vee})$ *dadurch verschärfen lassen, daß noch „für alle* ϱ *aus* P: $p_\varrho(s,r)\leqq p_\varrho(u,t)$“, *bei* $(B_2^{*\vee})$, $(B_K^{*\vee})$, $(B_3^{*\vee})$ *auch „für alle* ϱ *aus* P: $p_\varrho(t,r)\leqq p_\varrho(u,s)$“ *mit in die Behauptung aufgenommen werden.* Sei nämlich die Verschärfung etwa von $(B_1^{*\vee})$ schon für alle s', t', u', v' mit $1\leqq d(u',t')<n$ bewiesen und seien die Voraussetzungen von $(B_1^{*\vee})$ für s, t, u, v mit $d(u,t)=n$ erfüllt; dann wähle man t_1 in E mit $u\lhd\lhd t_1$, $t_1\lhd t$, $d(u,t_1)=n-1$, und wende das Bewiesene auf s, t_1, u, v an: man findet r_1 mit $t_1\leqq r_1$, $s\lhd\lhd r_1$, $r_1\leqq v$, $p_\varrho(s,r_1)\leqq p_\varrho(u,t_1)$ für alle ϱ. Wenn $r_1=t_1$, so sei r gleich t, $p_\varrho(r_1,r)=p_\varrho(t_1,t)$, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)+p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(u,t_1)+p_\varrho(t_1,t)=p_\varrho(u,t)$; wenn $t\leqq r_1$, so sei r gleich r_1, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)\leqq p_\varrho(u,t_1)\leqq p_\varrho(u,t)$; wenn weder $r_1=t_1$ noch $t\leqq r_1$, so wegen $t_1\leqq r_1$ dann $t\parallel r_1$, so daß man durch Anwendung von $(B_1^\vee)$ auf r_1, t, t_1, v ein r mit $t\leqq r$, $r_1\lhd r$, $r\leqq v$, $p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(t_1,t)$ für alle ϱ findet, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)+p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(u,t_1)+p_\varrho(t_1,t)=p_\varrho(u,t)$. — Damit erhält man sogleich auch Verschärfungen von $(P_1^{*\vee})$ und $(P_2^{*\vee})$; $(P_1^{*\vee})$ *etwa ist äquivalent zu*

$(P_1^{*\vee},\mathscr{P})$ *für alle* s, t, u, r *aus* E: *für alle* ϱ *aus* P: *aus* $u\lhd\lhd t$, $[u,t]\mathscr{P}[s,r]$ *folgt* $s\lhd\lhd r$, $p_\varrho(s,r)\leqq p_\varrho(u,t)$.

Diese Ergebnisse lassen sich, zunächst für einen Spezialfall, noch weiter verbessern. In $(E,\leqq)$ gelte $(B_3^\vee)$ oder $(B_K^\vee)$ oder $(B_2^\vee)$; seien s, t, u, v Elemente, welche der Voraussetzung von $(B_3^{*\vee})$ oder $(B_K^{*\vee})$ oder $(B_2^{*\vee})$ mit $u\lhd s$ genügen;

dann kann man r in den entsprechenden Behauptungen so wählen, daß es für jede endliche Ultrakette K zwischen u, t eine endliche Ultrakette L zwischen s, r gibt und, für $M = K \cup \{r\}$, $N = L \cup \{u\}$, eine umkehrbare Abbildung τ von M^* auf N^* mit $\tau[x, y] \mathscr{P} [x, y]$ für $\tau[x, y] = [u, s]$, $[x, y] \mathscr{P} \tau[x, y]$ für $[x, y] \neq [u, s]$; wenn $M \neq K$, so $\tau[t, r] = [u, s]$. Denn das ist für $d(u, t) \leqq 1$ trivial; sei es für alle s', t', u', v' mit $1 \leqq d(u', t') < n$ bewiesen, und seien die genannten Voraussetzungen mit $d(u, t) = n$ erfüllt; man wähle t_1 in K mit $t_1 \lhd t$ und bestimme das nach Induktionsannahme vorhandene r_1 mit der Ultrakette L_1 und der Abbildung τ_1 zwischen M_1^* und N_1^*, $M_1 = (K \cap [u, t_1]) \cup \{r_1\}$, $N_1 = L_1 \cup \{u\}$. Wenn $r_1 = t_1$, so sei r gleich t, L gleich $L_1 \cup \{r\}$, und man setze τ_1 durch $\tau[t_1, t] = [t_1, t]$ zu τ fort; wenn $r_1 = t$, so sei r gleich t, L gleich L_1, τ gleich τ_1; wenn $r_1 \neq t_1$, $r_1 \neq t$, so wegen $d(t_1, r_1) \leqq d(u, s)$ doch $t_1 \lhd r_1$, so daß man durch Anwendung von $(B_3^\vee)$ oder $(B_K^\vee)$ oder $(B_2^\vee)$ auf r_1, t, t_1, v ein r mit $t \lhd r$, $r_1 \lhd r$ finden, L gleich $L_1 \cup \{r\}$ setzen und τ_1 durch $\tau[t_1, t] = [r_1, r]$, $\tau[t, r] = \tau_1[t_1, r_1] = [u, s]$ zu τ fortsetzen kann. — Was aus diesem Sachverhalt wird, wenn statt $u \lhd s$ nur noch $u \lhd\lhd s$ gilt, wird im nächsten Abschnitt bemerkt werden.

4.4. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; aus $(B_3^\vee)$ folgt $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) = \mathscr{Z}_p$, $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$, $\gamma_{\mathfrak{F}} \mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$; man sieht leicht, daß jede dieser Aussagen eine echte Abschwächung der vorangehenden ist. Es soll nun die letzte von ihnen, also $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$, so verschärft werden, daß eine zu $(B_3^\vee)$ äquivalente Aussage entsteht.

Sei $\mathscr{S}$ die *transitive Hülle* von $\mathscr{P}$, also die kleinste $\mathscr{P}$ enthaltende transitive Relation; seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b aus E; zwischen K, L gelte $(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p$, wenn es eine umkehrbare Abbildung σ von K^* auf L^* so gibt, daß aus $[x, y] \in K^*$, $[w, z] \in L^*$, $\sigma[x, y] = [w, z]$ die Existenz eines Intervalles $[m, n]$ folgt mit $[x, y] \mathscr{S} [m, n]$, $[w, z] \mathscr{S} [m, n]$, $m \lhd\lhd n$, $x \lhd\lhd m$, $w \lhd\lhd m$, $n \lhd\lhd b$. *Dann ist $(B_3^\vee)$ äquivalent zu $(JKH_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$* [11].

Zunächst ist $(B_3^\vee)$ eine Folge von $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$. Denn sind s, t, u, v Elemente von E mit $s \parallel t$, $u \lhd s$, $u \lhd t$, $s \lhd\lhd v$, $t \lhd\lhd v$, so ist $d(s, v)$ eine natürliche Zahl, und man wähle r in E mit $s \lhd\lhd r$, $t \lhd\lhd r$, $r \lhd\lhd v$ und minimalem $d(s, r)$. Da jedenfalls (JD) aus $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$ folgt, sind $s \lhd r$ und $t \lhd r$ äquivalent. Wären diese Beziehungen aber nicht erfüllt, so gäbe es endliche Ultraketten K, L zwischen u, r mit $s \in K$, $t \in L$; Anwendung von $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$ lieferte Intervalle $[x, y]$, $[w, z]$ aus K^*, L^* mit $s \lhd\lhd x$, $t \lhd\lhd w$ und $\sigma[x, y] = [w, z]$. Für das zugehörige Intervall $[m, n]$ würde $s \lhd\lhd x \lhd\lhd m$, $t \lhd\lhd w \lhd\lhd m$ $m \lhd\lhd n \lhd\lhd r$; da aus $x \neq y$ und $[x, y] \mathscr{S} [m, n]$ aber $m \neq n$ folgt, gälte wegen (JD) dann $d(s, m) < d(s, n) \leqq d(s, r)$: Widerspruch zur Minimalität von $d(s, r)$

[11]) Für beschränkt längenendliche geordnete Mengen bewies dies Benado [3], Th. 4.7, für beschränkt längenendliche Verbände Kořínek [2], [3], [4], Th. 4.4; Kořínek's Lemma 3.2 ist ein Spezialfall der am Ende von 4.3 angegebenen Verschärfung von $(B_2^{*\vee})$. Kořínek konnte unter seinen Voraussetzungen überdies zeigen, daß die Abbildung σ dann eindeutig bestimmt ist. — In Verbänden gilt $\mathscr{S} = \mathscr{P}$; in beschränkt längenendlich geordneten Mengen wurden diese Relationen von Benado l.c., in beschränkt längenendlichen Verbänden von Kořínek l.c. eingeführt. Da $(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p$ keine Äquivalenzrelation ist, lassen sich die Reduktionsverfahren aus 2.1 hier nicht anwenden.

(oder: wegen (JD) ist $(E, \lhd\lhd)$ beschränkt längenendlich, also Multiverband, so daß man r als minimale obere Schranke in $(E, \lhd\lhd)$ von $\{s, t\}$ unter v wählen kann ...).

Sei umgekehrt $(B_3^\vee)$ erfüllt; dann gilt in $(E, \lhd\lhd)$ auch $(B_2^\vee)$, und da aus $(B_3^\vee)$ stets (JD) folgt, ist $(E, \lhd\lhd)$ beschränkt längenendlich, also Multiverband. Der Satz von BENADO (man vgl.[11]) liefert dann die Gültigkeit von $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{B}})$ in $(E, \lhd\lhd)$, erst recht also in $(E, \leqq)$. Es sei erlaubt, den Beweis noch einmal explizite, ohne Rückgriff auf das Benadosche Ergebnis, darzustellen. Es ist also für alle a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ und alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b dann $K(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p L$ nachzuweisen. Dies ist im Falle $d(a, b) \leqq 1$ trivial; sei es für alle a', b' mit $1 \leqq d(a', b') < n$ bewiesen und sei $d(a, b) = n$, seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, und L habe die Länge n. Man wähle s in L mit $a \lhd s$ und t in K mit $t \lhd b$; wendet man die am Ende von 4.3 angegebene Verschärfung von $(B_3^{*\vee})$ auf s, t, a, b und K' mit $K' = K \cap [a, t]$ an, so findet man, wie dort beschrieben, r in E, eine endliche Ultrakette L' zwischen s, r und eine Abbildung τ von $(K' \cup \{r\})^*$ auf $(L' \cup \{a\})^*$, wegen $t \lhd b$ kann nur $r = t$ oder $r = b$ gelten. Wegen $s \in L$ gilt $d(s, b) = n - 1$, so daß man $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{B}})$ auf die Ketten $L' \cup \{b\}$ und $L \cap [s, b]$ anwenden kann und eine zugehörige Abbildung σ_1 findet. Falls $r = t$, so setze man $\sigma[t, b] = \sigma_1[t, b]$, $\sigma[x, y] = \tau[x, y]$ für $\tau[x, y] = [a, s]$ und $[x, y] \in K'^*$, $\sigma[x, y] = \sigma_1\tau[x, y]$ für alle übrigen $[x, y]$ aus K'^*; falls $r = b$, so setze man $\sigma[t, b] = \tau[t, b] = [a, s]$, $\sigma[x, y] = \sigma_1\tau[x, y]$ für alle $[x, y]$ aus K'^*; diese Abbildung leistet das Gewünschte. — Es ist klar, daß man zu $(B_K^\vee)$ äquivalente Aussagen erhält, wenn man $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{B}})$ durch $(FIN_{\mathfrak{B}})$ für die K definierenden Klassen $\mathfrak{B}$ verschärft. Weiter ist nun die am Schluß von 4.3 aufgeworfene Frage zu beantworten, was sich statt der dort angegebenen Verschärfungen von $(B_3^{*\vee})$, $(B_K^{*\vee})$, $(B_2^{*\vee})$ noch im Falle $u \lhd\lhd s$ behaupten lasse: genügen s, t, u, v den Voraussetzungen einer dieser Aussagen und gilt das zugehörige $(B_3^\vee)$, $(B_K^\vee)$, $(B_2^\vee)$, so kann man r in den entsprechenden Behauptungen so wählen, daß es für jede endliche Ultrakette K zwischen u, t eine endliche Ultrakette L zwischen s, r so gibt, daß für $M = K \cup \{r\}$, $N = L \cup \{u\}$ die Abbildung σ von $(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p$ dann M^* umkehrbar auf N^* abbildet.

5. Modular geordnete Mengen. 5.0. Ein Verband ist bekanntlich genau dann ein modularer Verband, wenn er keinen nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Teilverband enthält; ein solcher Teilverband eines Verbandes $(E, \leqq)$ läßt sich darstellen als von den Komponenten einer Zelle gebildet, welche kein Viereck ist — vereinigt man umgekehrt die Komponenten einer Zelle in $(E, \leqq)$, welche kein Viereck ist, so enthält der entstehende Teilverband von $(E, \leqq)$ auch einen nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Teilverband von $(E, \leqq)$.

5.1. Eine geordnete Menge $(E, \leqq)$ heiße *modular geordnet*, wenn jede Zelle in $(E, \leqq)$ ein Viereck ist — also genau dann, wenn es keine fünf Elemente in E gibt, die in ihrer konvexen Hülle, geordnet durch die Spur von $\leqq$, einen

nicht modularen Teilverband bilden. Dann sind die Verbände unter den modular geordneten Mengen genau die modularen Verbände; ebenfalls stimmen die Multiverbände unter den modular geordneten Mengen mit den im Benadoschen Sinne modularen Multiverbänden überein (BENADO [3], Cor. 4.41; definiert wird Modularität von Multiverbänden dort durch die Möglichkeit, perspektive Intervalle auf bestimmte Art ineinander abzubilden. — In dem nach Fertigstellung dieser Arbeit erschienenen Aufsatz BENADO [5] wird übrigens Modularität von Multiverbänden gerade durch die Aussage des erwähnten Cor. 4.41 erklärt, also dem Sinne nach in der gleichen Art wie hier: Def. 2.2). Insbesondere gilt in modular geordneten Mengen $\mathscr{I} = \mathscr{I}_p$, so daß $(JHK_{\delta\mathscr{I}_p,\mathfrak{A}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{I})_p,\mathfrak{A}})$ in Kraft sind, erst recht also $(FIN_{\mathfrak{A}})$ und (JD), wobei allerdings wegen 2.4 das Auswahlaxiom herangezogen werden muß. Für Verbände erhält man daraus noch die Dedekindsche Kennzeichnung der Modularität: ein Verband ist genau dann modular, wenn in jedem seiner Teilverbände (JD) gilt (DEDEKIND [1], § 6, Th. X) — einerseits ist nämlich im nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Verband (JD) nicht erfüllt, andererseits ist jede Zelle in einem Teilverband von $(E, \leqq)$ auch Zelle in $(E, \leqq)$ selbst, so daß mit einem Verbande $(E, \leqq)$ auch jeder Teilverband modular ist.

Ist $(E, \leqq)$ modular geordnet, so gilt $(B_3^\vee)$ und jedes $(B_K^\vee)$; ist $(E, \leqq)$ außerdem Multiverband nach oben, so gilt auch $(B_1^\vee)$ und $(B_2^\vee)$. Erfüllen nämlich s, t, u, v die Voraussetzungen einer dieser Aussagen, so verschafft man sich ein minimales Element r, $r \leqq v$, unter den oberen Schranken von $\{s, t\}$: im Falle $(B_1^\vee)$ oder $(B_2^\vee)$ wird dies durch die Voraussetzung des Multiverbandes nach oben gesichert; in den anderen Fällen gilt $u \lhd\lhd v$, wegen der Modularität aber $(FIN_{\mathfrak{A}})$, so daß auch alle Ultraketten zwischen s, v und zwischen t, v endlich sind und man außerdem $t \lhd\lhd r$, $r \lhd\lhd v$ hat. Es bleibt $s \lhd r$ nachzuweisen. Liegt aber r_1 zwischen s, r, $r_1 \neq s$, so ist r auch minimales Element unter den oberen Schranken von $\{r_1, t\}$; wegen $u \lhd t$ kann u nur dann nicht auch maximales Element unter den unteren Schranken von $\{r_1, t\}$ sein, wenn r_1, t vergleichbar sind, also $r_1 = r$. Aus $r_1 \neq r$ folgte daher, daß die Ketten $\{u, t, r\}, \{u, s, r_1, r\}$ Komponenten einer Zelle wären, die kein Viereck sein könnte (auf $(B_3^\vee)$ und $(B_K^\vee)$ kann man auch so schließen: wegen $\mathscr{I} = \mathscr{I}_p$ gilt erst recht $\mathscr{I}^\delta = \mathscr{I}_p$; würden s, t, u, v, x, y, z die Aussage (A_7) falsifizieren, so wäre $(\{u, s, x, v\}, \{u, t, v\})$ eine Zelle — daher gilt $(B_3^\vee)$, und wegen $(FIN_{\mathfrak{A}})$ dann auch (B_K)). — Da die Modularität definierende Eigenschaft bei dem Übergang zur inversen Ordnung ungeändert bleibt, gilt in modular geordneten Mengen auch $(B_3^\wedge)$ und $(B_K^\wedge)$, in modularen Multiverbänden nach unten auch $(B_1^\wedge)$ und $(B_2^\wedge)$.

5.2. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *streng monoton*, wenn für alle Intervalle $[x, y]$, $[w, z]$ von $(E, \leqq)$ aus $[x, y] \leqq [w, z]$, $[x, y] \neq [w, z]$ folgt $f(x, y) \neq f(w, z)$; ist $(E, \leqq)$ Multiverband, f streng monoton, $\mathscr{I}$-invariant, und sind die Werte von f nicht-negative Elemente eines total geordneten Moduls G, so ist $\psi_a f$ für jedes a aus E eine

positive Bewertung von $(E, \leqq)$ (im Sinne von BENADO [3], Def. 5.12, [5], Def. 2.3.3).

Sei $(E, \leqq)$ diskret geordnet; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(M_0) *$(E, \leqq)$ ist modular geordnet*

(M_1) *es gilt $(B_1^\vee)$ und $(B_1^\wedge)$*

(M_2) *die Kořinecksche Intervallfunktion d ist $\mathcal{T}$-invariant*

(M_3) *jede der Intervallfunktionen p_ϱ ist $\mathcal{T}$-invariant*

(M_4) *es existiert auf $(E, \leqq)$ eine streng monotone, $\mathcal{T}$-invariante Intervallfunktion f*

(M_5) *es existiert auf $(E, \leqq)$ eine umkehrbar $\lhd$-treue, $\mathcal{T}$-invariante Intervallfunktion f*

(M_6) *ist von zwei in der gleichen $\mathcal{T}$-Äquivalenzklasse gelegenen Intervallen von $(E, \leqq)$ eines in dem anderen enthalten, so sind sie gleich*

(M_7) *eine $\mathcal{T}$-Äquivalenzklasse, welche ein $\lhd$-Intervall enthält, enthält nur $\lhd$-Intervalle*

(M_8) *es gibt keine Kette $\{u, a, b, v\}$ in $(E, \leqq)$ mit $u \lhd a$, die Komponente einer Zelle ist.*

In jedem dieser Fälle ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich; ist $(E, \leqq)$ sogar ein diskreter Verband, so ist (M_8) äquivalent zu

(M_9) *für alle a, b, c aus E: wenn $a \cap c \lhd a$, $a \leqq b$, $a \cap c = b \cap c$, $a \cup c = b \cup c$, so $a = b$;*

ist $(E, \leqq)$ sogar ein endlich-dimensionierter Verband, so ist (M_2) äquivalent zu

(M_{10}) *es gilt (JD) und für alle x, y aus E: $e(x) + e(y) = e(x \cup y) + e(x \cap y)$.*[12]

Aus (M_0) folgt nämlich (JD), so daß $(E, \leqq)$ Multiverband ist und (M_0) zu (M_1) führt; aus (M_1) folgt $(P_1^{*\vee})$, $(P_1^{*\wedge})$ und daher (M_2); aus der Äquivalenz von $(B_1^\vee)$, $(P_1^{*\vee})$, $(P_1^{*\vee}, \mathcal{P})$ folgt die Äquivalenz von (M_2) und (M_3); aus (M_2) folgt über $(P_1^{*\vee})$, $(B_1^\vee)$ auch (JD), also (M_4) mit f gleich d; aus (M_4) folgt (M_6); die Äquivalenz von (M_2) und (M_{10}) unter den genannten Voraussetzungen ist klar. Aus (M_6) folgt (M_0), denn wäre $\{u, a, b, v\}$ Komponente einer Zelle, so gälte $[a, v]\mathcal{T}[b, v]$. Aus (M_2) folgt weiter (M_5) und daraus (M_7); aus (M_7) folgt (M_8); die Äquivalenz von (M_8) und (M_9) unter den genannten Voraussetzungen ist klar. Aus (M_8) folgt $(P_2^\vee)$, denn erfüllen s, t, u, r die Voraussetzungen von $(P_2^\vee)$ und gälte nicht $s \lhd r$, so wählte man r_1 mit $s \leqq r_1 \leqq r$,

[12]) Für beschränkt längenendlich geordnete Mengen findet sich die Äquivalenz von (M_0), (M_1) bei BENADO [3], Th. 4.74; für beschränkt längenendliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1), (M_2) bei KOŘINEK [2], [3], Th. 5.2; für beschränkt längenendliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1) bei KLEIN [2], Th. 27; für endliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1), (M_{10}) bereits bei BIRKHOFF [1], Th. 10.2. In BIRKHOFFs Th. 10.1 läßt die Beweisanordnung den ohne Endlichkeitsvoraussetzungen gültigen Schluß von (M_4) auf (M_0) erkennen — allerdings wird meist in (M_4) noch Additivität von f vorausgesetzt und die Aussage dann für Bewertungen formuliert: BENADO [3], Th. 5.5, Th. 5.51.

$r_1 \neq s$, $r_1 \neq r$, wegen $u \lhd t$ wäre u maximale untere Schranke von $\{t, r_1\}$, so daß $\{u, s, r_1, r\}$ Komponente einer Zelle wäre; aus (M_8) folgt auch $(P_2^\wedge)$, denn erfüllen s, t, u, r die Voraussetzungen von $(P_2^\wedge)$ und gälte nicht $r \lhd s$, so wählte man r_1 mit $r \lhd r_1$, $r_1 \leqq s$, $r_1 \neq s$, wegen $t \lhd u$ wäre u minimale obere Schranke von $\{t, r_1\}$, so daß $\{r, r_1, s, u\}$ Komponente einer Zelle wäre; wegen der Äquivalenz von $(P_2^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_1^\vee)$ folgt daher aus (M_8) auch (M_1).

Der Schluß von (M_4) auf (M_6) und (M_0) gilt in beliebigen geordneten Mengen; allgemein kann man jedoch nur die Modularität von $(E, \lhd\lhd)$ in entsprechender Weise beschreiben. Da (M_0) bei dem Übergang zur inversen Ordnung ungeändert bleibt, ist (M_0) auch äquivalent zu derjenigen Aussage, die aus (M_8) bei Ersetzung von $u \lhd a$ durch $b \lhd v$ entsteht. Wegen (M_3) liefern genau in modularen, diskret geordneten Mengen die Funktionen p_c ein Erzeugendensystem des Moduls der additiven, $\mathcal{T}$-invarinaten Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ mit Werten in einem Oberring der ganzen Zahlen.

Daß (M_0) aus (M_8) folgt, läßt sich auch ohne Verwendung früherer Sätze zeigen; allerdings muß $(E, \leqq)$ dazu als diskreter Multiverband nach oben vorausgesetzt werden — ist dann nämlich $(E, \leqq)$ nicht modular geordnet, so gilt auch (M_8) nicht. Denn allgemein findet man: ist $\{t, y, z, w\}$ Komponente einer Zelle, $d(t, y) \geqq 2$, so existiert eine Kette $\{u, a, b, v\}$, die Komponente einer Zelle ist, mit $d(u, a) < d(t, y)$. Zum Beweis sei x aus einer Ultrakette kürzester Länge zwischen t, y und $t \leqq x$, $x \lhd y$, und sei K eine Kette so, daß $(\{t, y, z, w\}, K)$ eine Zelle ist; ist dann $(\{t, x, y, w\}, K)$ eine Zelle, so wähle man t, x, y, w für u, a, b, v. Andernfalls ist t noch immer maximale untere Schranke von $\{x, s\}$ für alle s aus K mit $s \neq w$; es gibt also s, r mit s in K, $s \neq t$, $s \neq w$, r in E, $r \leqq w$, $r \neq w$, r minimale obere Schranke von $\{x, s\}$. Ist dann $(\{x, y, z, w\}, \{x, r, w\})$ eine Zelle, so wähle man x, y, z, w für u, a, b, v; andernfalls ist wegen $s \leqq w$ immer noch w minimale obere Schranke von $\{r, y\}$ wie von $\{r, z\}$, wegen $x \lhd y$ auch x maximale untere Schranke von $\{r, y\}$; es gibt also q in E mit $x \leqq q$, $x \neq q$, q untere Schranke von $\{r, z\}$. Da r minimale obere Schranke von $\{x, s\}$, so auch r minimale obere Schranke von $\{q, s\}$; da $q \leqq z$, so auch t maximale untere Schranke von $\{q, s\}$. Daher ist $(\{t, x, q, r\}, \{t, s, r\})$ eine Zelle, und man kann t, x, q, r für u, a, b, v wählen.

6. Anwendungen in der Gruppentheorie. Sei g eine Gruppe, $\leqq$ die Inklusion zwischen Untergruppen von g; sind a, b Untergruppen von g, so heißt a *nachinvariant* in b: $a \leqq b$, wenn Untergruppen n_i von g $(i = 0, \ldots, k)$ so existieren, daß $n_0 = a$, $n_k = b$, n_{j-1} Normalteiler in n_j $(j = 1, \ldots, k)$ ist (der Name nachinvariant nach WIELANDT [1]; dort wird jedoch mit $\lhd$ das Normalteiler-Sein und daher die Nachinvarianz, dessen transitive Hülle, mit $\lhd\lhd$ beschrieben). Die Menge E aller a mit $a \leqq g$ wird durch $\leqq$ geordnet, und durch Induktion sieht man, daß für a in E und eine Untergruppe b von g stets $a \cap b \leqq b$ gilt: $(E, \leqq)$ ist Halbverband nach unten, Infimum von $\{a, b\}$ gleich dem Mengendurchschnitt $a \cap b$, und auf E fallen $\subseteq$ und $\leqq$ zusammen. Mit $\lhd$ als Nachbarschaftsrelation von $\leqq$ gilt $a \lhd b$ genau dann, wenn a maximaler Normalteiler in b ist. Sind a, c, d Untergruppen von b, a normal in b, c normal

in d, so ist ac normal in ad; Induktion zeigt, daß man bei Ersetzung von c normal in d durch $c \leqq d$ auch $ac \leqq ad$ behaupten kann. Liegen s, t, u, v in E, $s \parallel t$, $v \leqq s$, $v \leqq t$, $s \leqq u$, $t \lhd u$, so folgt $ts \leqq tu$, $tu = u$, $t \leqq ts \leqq u$, wegen $t \lhd u$ und $s \parallel t$ aber $ts = u$, $t \lhd ts$; da nach dem ersten Isomorphiesatz ts/t isomorph $s/s \cap t$, gilt $s \cap t \lhd s$ (WIELANDT [1], Hilfssatz (5)); da noch $v \leqq s \cap t$, gilt $(B_1^\wedge)$ in $(E, \leqq)$.

Bezeichnet e die nur aus dem Einslement bestehende Untergruppe von g, so liegt e in E; unter den endlichen Ketten zwischen e, g in $(E, \leqq)$ befinden sich jedenfalls die Normalreihen von g, und die endlichen Ultraketten zwischen e, g in $(E, \leqq)$ sind genau die Kompositionsreihen von g. $(B_1^\wedge)$ hat nun $(JHK_{\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}_p}, \mathfrak{N}})$ zur Folge, also $(JHI_{\mathfrak{F}})$, $(FIN_{\mathfrak{N}})$ und (KON). Aus $(JHI_{\mathfrak{F}})$ folgt unmittelbar der Jordan-Höldersche Satz über die Kompositionsreihen von g. Aus (KON) folgen sofort

(G_1) *besitzt g eine Kompositionsreihe, so auch jede nachinvariante Untergruppe von g*

(G_2) *besitzt g eine Kompositionsreihe, so läßt sich jede Normalreihe von g zu einer Kompositionsreihe verfeinern.*

Aus $(FIN_{\mathfrak{N}})$ folgt weiter, daß $(E, \leqq)$ genau dann beschränkt längenendlich ist, wenn g eine Kompositionsreihe besitzt; wegen des Vorhandenseins von größtem und kleinstem Element in $(E, \leqq)$ läßt sich dies auch durch die Konjunktion der sog. aufsteigenden und absteigenden Kettenbedingungen in $(E, \leqq)$ ausdrücken. Einerseits stimmen auf E die Relationen $\leqq$ und $\subseteqq$ überein, so daß

(G_3) *g besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn jede aufsteigende und jede absteigende $\subseteqq$-Kette nachinvarianter Untergruppen von g abbricht,*

andererseits ist jede Kette in $(E, \leqq)$ enthalten in einer Normalkette, nämlich einer $\subseteqq$-Kette nachinvarianter Untergruppen, bei der benachbarte Elemente normal ineinander liegen, weshalb

(G_4) *g besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn jede von e aufsteigende und jede von g absteigende Normalkette abbricht.*

In einem gewissen, an diesem Orte nicht näher zu präzisierenden Sinne (man vgl. etwa BOURBAKI [1], p. 24 unten) kann man nun sagen, daß damit (G_1) bis (G_4) aus Sätzen der Ordnungstheorie spezialisiert seien. Früher pflegte man sie als Folgerungen des Schreierschen Verfeinerungstheorems abzuleiten; von diesem aber ist bekannt, daß es nicht in solchem Sinne aus Sätzen der Verbandstheorie, angewandt auf den Verband aller Untergruppen von g, spezialisiert werden kann[13]). Es ist ferner auch bekannt, daß die Menge E

[13]) KUROSCH [1], p. 308; für (G_1) bis (G_4) vergleiche man KUROSCH [1], 113–115, ZASSENHAUS [1], 59–60. Die abstrakten Theorien, aus deren Sätzen sich das Verfeinerungstheorem spezialisieren läßt, verteilen sich auf drei Typen: *a*) in einem Verbande wird axiomatisch noch eine Normalitätsrelation eingeführt: UZKOV [1] (ähnlich ZASSENHAUS [1], p. 76), daran anknüpfend zahlreiche Untersuchungen, u.a. von KOŘINEK [1], BENADO [1], PETRESCO [1]; *b*) es wird eine Menge mit einer nicht-transitiven Relation zu Grunde gelegt: GEORGE [1]; *c*) es wird neben den Verbandsoperationen noch eine nicht-kommutative Multiplikation vorausgesetzt: LORENZEN [1]; dieses dritte Verfahren läßt sich auf Kategorien übertragen.

der nachinvarianten Untergruppen von g im Allgemeinen nicht das Erzeugnis zweier ihrer Elemente enthält[14]), und da sowohl bei dem induktiven Schreierschen wie bei dem konstruktiven Zassenhausschen Beweis des Verfeinerungstheorems die Erzeugnisse gewisser Paare von Untergruppen betrachtet werden, kann man das Verfeinerungstheorem mit seien bisher bekannten Beweisen auch nicht aus Sätzen von Theorien spezialisieren, die auf die geordnete Menge $(E, \leqq)$ der nachinvarianten Untergruppen von g angewandt werden. Sollen daher Sätze wie (G_1) bis (G_4) nicht über das Schreiersche Verfeinerungstheorem begründet werden, so läßt sich die Abstraktion von Verbänden zu geordneten Mengen nicht umgehen. Das unterstreicht noch einmal die Bedeutung, welche dieser Abstraktion auch hier zukommt.

Literatur

Benado, M.: [1] Teoria abstractă a relaţiilor de normalitate. Studii şi cercetări matemat. **4**, 69–120 (1953).

— [2] Asupra unei generalizări a noţiunii de structură. Acad. R.P.R. Bulet. Ştiinţ. Sect. Mat. Fiz. **5**, No. 1, 41–48 (1953).

— [3] Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. II. Théorie des multistructures. Čehoslov. Mat. Žur. **5**, 308–344 (1955).

— [4] Bemerkungen zu einer Arbeit von Oystein Ore. Rev. Math. Pur. Appl. **1**, No. 2, 5–12 (1956).

— [5] Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände. Math. Nachr. **20**, 1–20 (1959).

Birkhoff, G.: [1] On the combination of subalgebras. Proc. Camb. Phil. Soc. **29**, 441–464 (1933).

— [2] Lattice theory, rev. ed. New York 1948.

Bourbaki, N.: [1] Théorie des ensembles, chap. I/II. Paris 1954.

Croisot, R.: [1] Contribution à l'étude des treillis semimodulaires de longueur infinie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **68**, 203–265 (1951).

Dedekind, R.: [1] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. **53**, 371–403 (1900).

Felscher, W., u. J. Schmidt: [1] Natürliche Zahlen, Ordnung, Nachfolge. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. **4**, 81–94 (1959).

George, E.: [1] Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier. J. reine angew. Math. **180**, 110–120 (1939).

Hausdorff, F.: [1] Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

Hermes, H.: [1] Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.

Hölder, O.: [1] Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Math. Ann. **34**, 26–56 (1889).

Jordan, C.: [1] Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870.

Klein, F.: [1] Über ausgeglichene Verbände. Math. Ann. **112**, 411–418 (1936).

— [2] Birkhoffsche und harmonische Verbände. Math. Z. **42**, 58–81 (1936).

— [3] Theorie der Gewebe. Math. Z. **45**, 107–126 (1939).

— [4] Zur Axiomatik der ausgeglichenen Gewebe. Math. Z. **53**, 70–75 (1950).

[14]) Zassenhaus [1], p. 236. Wielandt [1], Satz (7), hat gezeigt, daß E dann das Erzeugnis zweier seiner Elemente enthält, wenn g eine Kompositionsreihe besitzt oder wenn $(E, \leqq)$ aufsteigend längenendlich ist. Während man im ersten Falle beim Beweis mit der Wielandtschen Funktion j operiert, dabei (G_2) verwendet und so wieder vom Verfeinerungstheorem abhängig ist, benutzt man im zweiten Falle — man vergleiche etwa Zassenhaus [1], p. 194 —, bei dem die Wielandtsche Funktion m auftritt, keinen der Sätze (G_1) bis (G_4).

KOLIBIAR, M.: [1] Bemerkung über Ketten in teilweise geordneten Mengen. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae Math. **3**, no. 1, 17–22 (1958).

KOŘINEK, V.: [1] Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden. Věstnik Kral. Českе Spol. Nauk, Třida mat.-přirod. **1941**, No. 14, 29 pp.

— [2] Svazy, v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova. Třídy České Akad., Rozpravy II **59**, No. 23, 32 pp. (1950).

— [3] Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Acad. Tcheque Sci. Bull. Internat. Cl. Sci. Math. **50**, 307–324 (1949).

— [4] Le théorème de Jordan-Hölder dans les treillis. Colloques Internat. C.N.R.S. No. 24, 155–158, Paris 1950.

KUROSCH, A.: [1] Gruppentheorie. Berlin 1953.

LORENZEN, P.: [1] Über die Korrespondenzen einer Struktur. Math. Z. **60**, 61–64 (1954).

MACLANE, S.: [1] A conjecture of Ore on chains in partially ordered sets. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 567–568 (1943).

ORE, O.: [1] On chains in partially ordered sets. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 558–566 (1943).

PETRESCO, J.: [1] Théorie relative des chaines. Publ. Sci. Univ. Alger, Sér. A **2**, 61–135 (1955).

SZAS, G.: [1] On the structure of semi-modular lattices of infinite length. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 239–245 (1951/52).

UZKOV, A. I.: [1] Über den Satz von Jordan-Hölder [Russ.]. Mat. Sbornik, N.S. **4**, 31–43 (1938).

VILHELM, V.: [1] Theorem of Jordan-Hölder in lattices without finite chain condition [Russ.]. Čehoslov. Mat. Žur. **4**, (79) 29–50 (1954).

— [2] The selfdual kernel of Birkhoff's condition in lattices [Russ.]. Čehoslov. Mat. Žur. **5**, (80), 439–449 (1955).

WIELANDT, H.: [1] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).

ZASSENHAUS, H.: [1] The Theory of Groups, 2nd ed. New York 1958.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 1. März 1960)

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 75, 115—126 (1961)

Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler

Herrn HELMUT WIELANDT zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von

OLAF TAMASCHKE

Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *subnormal* in $\mathfrak{G}$ oder *Subnormalteiler* von $\mathfrak{G}$, wenn eine endliche Normalkette $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_0 \trianglerighteq \mathfrak{A}_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{A}_r=\mathfrak{A}$ existiert. Eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{B}$ nennen wir *zugänglich*, wenn es eine endliche Kompositionskette $\mathfrak{G}=\mathfrak{B}_0 \cdot \triangleright \mathfrak{B}_1 \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{B}_s=\mathfrak{B}$ gibt. $\mathfrak{A} \cdot \triangleright \mathfrak{B}$ bedeutet: $\mathfrak{B}$ ist maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Die Menge $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ aller zugänglichen Subnormalteiler einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein Teilverband des Verbandes $\mathrm{u}\mathfrak{G}$ aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$ (WIELANDT [6]). Hingegen bildet die Menge $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ nur unter zusätzlichen Voraussetzungen einen Teilverband von $\mathrm{u}\mathfrak{G}$, z.B. dann, wenn in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist (WIELANDT [6]). Genau dann ist $\mathrm{zs}\mathfrak{G}=\mathrm{s}\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt.

Im ersten Abschnitt stellen wir verbandstheoretische Hilfsmittel bereit. Wir beweisen sodann, daß $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ ein submodularer längenendlicher Verband ist (2.4). Daher bestimmen die Mengen von Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen umkehrbar eindeutig die Kongruenzrelationen in $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$, das sind die mit den Verknüpfungen $\cap$ (Durchschnitt) und $\cup$ (Erzeugnis) von $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ verträglichen Äquivalenzrelationen (2.5).

Unter der Voraussetzung $\mathrm{zs}\mathfrak{G}=\mathrm{s}\mathfrak{G}$ geben wir einen Überblick darüber, wie die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ eingelagert sind [3. Abschnitt, vor allem (3.4) und (3.5)] und wie sich die größten und die kleinsten Subnormalteiler in den Kongruenzklassen von $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ bei Automorphismen von $\mathfrak{G}$ verhalten (4.2). Die erste dieser beiden Fragen hängt zum Teil mit Untersuchungen von O.-H. KELLER [2] über die Vertauschbarkeit von Kompositionsfaktorgruppen zusammen, die letztere umfaßt die Frage nach den Invarianzeigenschaften des unteren und des oberen Kerns einer Kongruenzrelation in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ [(4.4) und (4.5)].

Ich danke Herrn Professor WIELANDT für die Anregung zu dieser Arbeit.

1. Der Satz von Jordan-Hölder in halbmodularen Verbänden

Wir betrachten längenendliche Verbände L, d.h. jede Kette zwischen irgend zwei Elementen $a \geqq b$ von L habe endliche Länge. Unter einem Primquotienten a/b von L verstehen wir ein Paar benachbarter Elemente $a \cdot > b$ (a ist

oberer Nachbar von b). In der Menge K_L aller Primquotienten von L führen wir Relationen ein:

Zwei Primquotienten a/b und c/d heißen *transponiert* (in Zeichen: $a/b\,\tau\,c/d$), wenn ($a=b\cup c$ *und* $d=b\cap c$) oder ($c=a\cup d$ *und* $b=a\cap d$) gilt; sie heißen *projektiv* (in Zeichen: $a/b\,\pi\,c/d$), wenn es eine Kette transponierter Primquotienten gibt, die a/b mit c/d verbindet. π ist eine Äquivalenzrelation in K_L.

Zwei Primquotienten a/b und c/d stehen genau dann in der Relation $a/b\,\varrho\,c/d$, wenn die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad b\cup(c\cap a)=a, \qquad b\cup(d\cap a)=b,$$

$$\text{(II)} \qquad d\cup(a\cap c)=c, \qquad d\cup(b\cap c)=d$$

erfüllt sind.

[Wie Herr VL. KOŘÍNEK mir mitteilte, wurde die Relation ϱ von L. JÁNOŠ in einer russisch veröffentlichten Arbeit "Properties of the ZASSENHAUS' refinement", Czechoslovak mathematical Journal **3**, 159–180 (1953), eingehend untersucht.]

(1.1) *Aus $a/b\,\tau\,c/d$ folgt $a/b\,\varrho\,c/d$ und aus $a/b\,\varrho\,c/d$ folgt $a/b\,\pi\,c/d$.*

BEWEIS. Die erste Behauptung ist leicht nachzurechnen. Wir setzen $a/b\,\varrho\,c/d$ voraus. An den jeweils ersten Gleichungen von (I) und (II) lesen wir $a\cap c\lneqq b$ und $a\cap c\lneqq d$ ab. Die zweiten Gleichungen von (I) und (II) liefern $a\cap d\leqq b$ und $b\cap c\leqq d$, also $a\cap d=b\cap d=b\cap c$. Wir wählen ein $x\in L$ so, daß $b\cap d\prec\cdot\, x\leqq a\cap c$ gilt. Dann ist $a=b\cup x$ und $b\cap d=b\cap x$, also $a/b\,\tau\,x/b\cap d$. Genau so findet man $c/d\,\tau\,x/b\cap d$, zusammen also $a/b\,\pi\,c/d$.

Ein längenendlicher Verband ist genau dann nach unten halbmodular (lower semi-modular [*1*, S. 66 (ξ'')]), wenn seine Elemente die folgende Bedingung erfüllen:

($\underline{H}$) *Aus $x\cup y\cdot>y$ folgt $x\cdot>x\cap y$.*

Der folgende Satz ist von KOŘÍNEK [*3*, Main Theorem 4.4] mit einer Relation $\underset{i}{\sim}$ an Stelle von ϱ formuliert worden, wobei aus $a/b\,\varrho\,c/d$ stets $a/b\underset{i}{\sim}c/d$ folgt.

(1.2) SATZ. *Ein längenendlicher Verband L ist genau dann nach unten halbmodular, wenn die Primquotienten zweier beliebiger maximaler Ketten $a=a_0\cdot> a_1\cdot>\cdots\cdot>a_m=b$ und $a=b_0\cdot>b_1\cdot>\cdots\cdot>b_n=b$ zwischen irgend zwei Elementen $a\geqq b$ von L durch die Relation ϱ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden (woraus insbesondere $m=n$ folgt).*

BEWEIS. 1. Es sei L halbmodular nach unten. Zu jedem $i=1,\ldots,m$ gibt es genau ein $k=1,\ldots,n$ derart, daß $a_{i-1}\cap b_{k-1}\lneqq a_i$ und $a_{i-1}\cap b_k\leqq a_i$ gilt. Daraus folgen die Gln. (I) in der Form

$$a_i\cup(b_{k-1}\cap a_{i-1})=a_{i-1}, \qquad a_i\cup(b_k\cap a_{i-1})=a_i$$

und außerdem ist $a_{i-1}\cap b_k=a_i\cap b_k$. Dann ist auch $a_{i-1}\cap b_{k-1}\lneqq b_k$, weil andernfalls $a_{i-1}\cap b_{k-1}=a_{i-1}\cap b_k=a_i\cap b_k\leqq a_i$ folgt, im Widerspruch zur Wahl von k. Daher gilt die erste Gl. (II): $b_k\cup(a_{i-1}\cap b_{k-1})=b_{k-1}$. Mit ($\underline{H}$) schließen wir aus $a_{i-1}=a_i\cup(b_{k-1}\cap a_{i-1})\cdot>a_i$ und $b_{k-1}=b_k\cup(a_{i-1}\cap b_{k-1})\cdot>b_k$ auf $a_{i-1}\cap b_{k-1}$

$\cdot > a_i \cap b_{k-1} \geqq a_i \cap b_k$ und $a_{i-1} \cap b_{k-1} \cdot > a_{i-1} \cap b_k = a_i \cap b_k$. Mithin ist $a_i \cap b_{k-1} = a_i \cap b_k \leqq b_k$ und es gilt die zweite Gl. (II): $b_k \cup (a_i \cap b_{k-1}) = b_k$. Daraus folgt $a_{i-1}/a_i \varrho\, b_{k-1}/b_k$. Außerdem ist wegen $a_{i-1} \cap b_{k-1} \leqq b_k$, $a_i \cap b_{k-1} \leqq b_k$ die Zahl i durch k in der gleichen Weise eindeutig bestimmt, wie k durch i. Die Zuordnung der Primquotienten ist umkehrbar eindeutig und wird durch die Relation ϱ geliefert.

2. Um die Umkehrung zu beweisen, setzen wir $x \cup y \cdot > y$ voraus. Wir betrachten zwei maximale Ketten $x \cup y \cdot > y \cdot > \cdots \cdot > x \cap y$ und $x \cup y \cdot > \cdots \cdot > x \cdot > \cdots \cdot > a \cdot > b \cdot > \cdots \cdot > x \cap y$. Nach Voraussetzung gibt es in der ersten Kette einen Primquotienten $c/d \varrho\, a/b$. Im Falle $c \leqq y$ folgt aus der ersten Gl. (I) $a = b \cup (c \cap a) \leqq b \cup (y \cap a) = b$ im Widerspruch zu $a \cdot > b$. Also kommt c/d nicht in der Kette von y nach $x \cap y$ vor, d.h. $c/d = x \cup y/y$. Daher gilt $x \cup y/y \varrho\, a/b$ für jeden Primquotienten a/b zwischen x und $x \cap y$. Nach Voraussetzung ist die Zuordnung der Primquotienten in den beiden Ketten umkehrbar eindeutig. Mithin tritt in der Kette $x \cdot > \cdots \cdot > x \cap y$ nur ein Primquotient auf. Es ist $x \cdot > x \cap y$. In L gilt ($\underline{H}$) und daher ist L halbmodular nach unten.

2. Der Hauptsatz über die Kongruenzrelationen in zs$\mathfrak{G}$

Die Primquotienten im Verband zs$\mathfrak{G}$ sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}$ ist die Menge der zugänglichen Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Wir beachten, daß projektive Kompositionsfaktorgruppen isomorph sind.

(2.1) *Im Verband* zs$\mathfrak{G}$ *gilt* ($\underline{H}$). zs$\mathfrak{G}$ *ist ein nach unten halbmodularer längenendlicher Verband.*

Beweis. Aus $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \rhd \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, weil $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gilt.

zs$\mathfrak{G}$ ist halbmodular nach oben genau dann, wenn zs$\mathfrak{G}$ modular ist [*1*, S. 68 Theor. 3]. An Stelle der Halbmodularität nach oben gelten im allgemeinen Falle schwächere Aussagen in zs$\mathfrak{G}$.

(2.2) *Es seien* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *zugängliche Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *nichtabelsch, so folgt* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \rhd \mathfrak{B}$, *also* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/\mathfrak{B}\ \tau\ \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Es sei M die Menge der $\mathfrak{S} \in \mathrm{zs}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{S} < \mathfrak{H}$, mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{S}$ ist. M enthält $\mathfrak{A}$, ist also nicht leer. In zs$\mathfrak{G}$ gilt die Maximalbedingung. Wir wählen eine in M maximale Untergruppe $\mathfrak{M}$ aus. $\mathfrak{N}$ sei eine zugängliche subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \lhd \cdot\, \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{B}$. Es ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ eine nichtabelsche einfache Gruppe. Außerdem ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ besitzt eine endliche Kompositionsreihe. Folglich sind $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar [*6*, (19)] und es ist $\mathfrak{M}\mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$. Also ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Wegen der Maximalitätseigenschaft von $\mathfrak{M}$ muß $\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \lhd \cdot\, \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

(2.3) *Es seien* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *zugängliche Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *abelsch, so ist jede Kompositionsfaktorgruppe zwischen* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B}$ *projektiv zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_0 \cdot \rhd \mathfrak{H}_1 \cdot \rhd \cdots \cdot \rhd \mathfrak{H}_r = \mathfrak{B}$ eine beliebige Kompositionskette von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{B}$. Jede Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ([6, (9)] gilt auch in zs$\mathfrak{G}$, oder man benütze [10, S. 195 Theor. 21]). In einer Kompositionskette $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \rhd \cdots \cdot \rhd \mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gibt es zu jedem $i = 1, \ldots, r$ eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \varrho \mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$ [(2.1) und (1.2)]. Ist $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{A}$ und also $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, so folgt $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Andernfalls ist $\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{L}_i$, der $\mathfrak{A}$ nicht enthält. Folglich gilt $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1)$ und daher $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1 \tau \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Es ist $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p), $p = |\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}|$. Sie enthält eine von $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ verschiedene Untergruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ der Ordnung p. Es folgt $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i \tau \mathfrak{N}/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1 \tau \mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1$. Daher gilt $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

(2.4) SATZ. zs$\mathfrak{G}$ *ist ein submodularer längenendlicher Verband* [5].

Die Menge aller Klassen $\mathfrak{p}$ projektiver Kompositionsfaktorgruppen aus $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}$ bezeichnen wir mit $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$. Dann folgt aus [5, Satz 1]:

(2.5) HAUPTSATZ. *Der Verband aller Kongruenzrelationen in* zs$\mathfrak{G}$ *ist isomorph zum Verband* $\mathfrak{P}(K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi)$ *aller Teilmengen von* $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$: *Zu jeder Teilmenge* $\mathsf{B} \subseteq K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$ *gibt es genau eine Kongruenzrelation* $\varkappa_{\mathsf{B}}$ *in* zs$\mathfrak{G}$, *die alle Klassen* $\mathfrak{p} \in \mathsf{B}$ *und nur diese „annulliert"* (*d.h. aus* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \in \mathfrak{p}$ *folgt* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$), *auf diese Weise erhält man alle Kongruenzrelationen in* zs$\mathfrak{G}$ *und es gilt* $\varkappa_{\mathsf{B} \cap \Gamma} = \varkappa_{\mathsf{B}} \cap \varkappa_{\Gamma}$, $\varkappa_{\mathsf{B} \cup \Gamma} = \varkappa_{\mathsf{B}} \cup \varkappa_{\Gamma}$ *für alle* $\mathsf{B}, \Gamma \subseteq K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$.

3. Die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen

Um zu abgerundeten Ergebnissen zu gelangen, setzen wir von nun an stets zs$\mathfrak{G}$ = s$\mathfrak{G}$ voraus, d.h. $\mathfrak{G}$ besitze eine endliche Kompositionsreihe. Einige der folgenden Aussagen, zu deren Beweis die Minimalbedingung nicht benützt wird, gelten allgemein in zs$\mathfrak{G}$ bei beliebigem $\mathfrak{G}$. Wir untersuchen, wie unter der genannten Voraussetzung die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ in s$\mathfrak{G}$ eingelagert sind.

(3.1) *Die Relation* π *ist mit allen Automorphismen* σ *von* $\mathfrak{G}$ *verträglich*: *Es gilt* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \pi \mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{H}^\sigma/\mathfrak{K}^\sigma$ *zutrifft.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von π. Ein Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ heißt $\cap$-*reduzibel* in s$\mathfrak{G}$, wenn es Subnormalteiler $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Andernfalls nennen wir $\mathfrak{A}$ $\cap$-*irreduzibel* in s$\mathfrak{G}$ [1 S. 93]; dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ oder es gibt nur eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ in der $\mathfrak{A}$ maximaler Normalteiler ist.

Ein Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ heißt $\cup$-*reduzibel* in s$\mathfrak{G}$, wenn es Subnormalteiler $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$. Sonst nennen wir $\mathfrak{A}$ $\cup$-*irreduzibel* in s$\mathfrak{G}$ [1, S. 20], es ist dann $\mathfrak{A} = 1$ oder $\mathfrak{A}$ besitzt genau einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$.

(3.2) *Zu jeder Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es eine $\frown$-irreduzible Untergruppe $\mathfrak{C}\in s\mathfrak{G}$ und eine $\smile$-irreduzible Untergruppe $\mathfrak{D}\in s\mathfrak{G}$, die die Bedingungen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}}/\mathfrak{C}\ \pi\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \pi\ \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}}\geqq\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}\geqq\mathfrak{B}\geqq\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ erfüllen.*

Beweis. Unter den $\mathfrak{H}\in s\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ gibt es eine maximale Untergruppe $\mathfrak{C}$. Sie ist $\frown$-irreduzibel; denn ist $\mathfrak{C}\lhd\cdot\,\mathfrak{K}\in s\mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{B}<\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}=\mathfrak{A}\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C}=\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}}$ ist eindeutig bestimmt. Außerdem gilt $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}$ und damit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}}/\mathfrak{C}\ \tau\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Andererseits existiert unter den $\mathfrak{N}\in s\mathfrak{G}$, die nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, eine minimale Untergruppe $\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{A}$. Sie ist $\smile$-irreduzibel; denn aus $\mathfrak{M}\lhd\cdot\,\mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{B}$ und daher $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{B}\cap\mathfrak{D}<\mathfrak{D}$. Mithin ist $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{D}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ eindeutig bestimmt und es folgt $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\cup\mathfrak{D}$. Daher gilt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \tau\ \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$.

Der Aufbau der Äquivalenzklassen $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})\in K_{s\mathfrak{G}}/\pi$ hängt entscheidend davon ab, ob $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ abelsch oder nichtabelsch ist. Zunächst zu den abelschen Kompositionsfaktorgruppen. Es gilt der bemerkenswerte

(3.3) Satz von Suzuki [*4*, S. 70]. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Genau dann zerfällt $K_{s\mathfrak{G}}$ in mehr als eine Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen (Genau dann besitzt $s\mathfrak{G}$ nichttriviale Kongruenzrelationen), wenn $\mathfrak{G}$ zyklisch von der Ordnung $|\mathfrak{G}|>p$ oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist.*

Beweis. (Fast den gleichen Beweis gibt D. W. Barnes in seiner Thesis "Lattice embeddings of prime power groups". Oxford 1959, S. 17.)

(a) Sei $\mathfrak{G}$ zyklisch von der Ordnung $|\mathfrak{G}|>p$ oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. $\mathfrak{G}$ enthält genau eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung p. Daher bildet $\mathfrak{P}/1$ für sich eine Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen. Also zerfällt $K_{s\mathfrak{G}}$ in mindestens zwei verschiedene Klassen bezüglich π.

(b) Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{G}$ weder zyklisch von der Ordnung $|\mathfrak{G}|>p$ noch eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. Wir zeigen, daß $K_{s\mathfrak{G}}=\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ nur aus einer Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen besteht. Es genügt nachzuweisen, daß je zwei Kompositionsfaktorgruppen einer Kompositionsreihe $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_0\cdot\rhd\,\mathfrak{A}_1\cdot\rhd\cdots\cdot\rhd\,\mathfrak{A}_n=1$ projektiv sind. Denn ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\in K_{s\mathfrak{G}}$, so gibt es genau ein $k=1,\ldots,n$ derart, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \varrho\ \mathfrak{A}_{k-1}/\mathfrak{A}_k$ gilt [(1.2) und (2.1)]. Für $|\mathfrak{G}|=p$ ist die Behauptung trivial.

Wir nehmen den Fall vorweg, daß $\mathfrak{G}$ eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p,p) ist. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ seien drei verschiedene Untergruppen der Ordnung p. Es gilt $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1\ \tau\ \mathfrak{P}_2/1\ \tau\ \mathfrak{G}/\mathfrak{P}_3\ \tau\ \mathfrak{P}_1/1$, mithin $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1\ \pi\ \mathfrak{P}_1/1$.

Wir führen vollständige Induktion nach der Gruppenordnung durch und setzen $|\mathfrak{G}|>p^2$ voraus. Es gibt eine Untergruppe der Ordnung p im Zentrum von $\mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{G}$ mehr als eine Untergruppe der Ordnung p enthält, verfügt $\mathfrak{G}$ auch über eine elementarabelsche Untergruppe $\mathfrak{Q}$ vom Typ (p,p). Es sei $\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{Q}$ umfaßt. Nach Induktionsvoraussetzung sind alle Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{M}$ zueinander projektiv. Aus unserer Voraussetzung über $\mathfrak{G}$ folgt die Existenz einer von $\mathfrak{M}$ verschiedenen maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}$ [*10*, S. 149]. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$ ist eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p,p). In einer Kompositionsreihe

$\mathfrak{G} \cdot \triangleright \mathfrak{M} \cdot \triangleright \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright 1$ sind daher alle Kompositionsfaktorgruppen zueinander projektiv. Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Die in Klammern gesetzte Aussage folgt unmittelbar aus (2.5).

Einen Einblick in die Lagerung projektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlicher Kompositionsreihe erhalten wir durch

(3.4) *Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe, σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.*

BEWEIS. (a) Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \triangleright \mathfrak{N}_1 \triangleright \cdots \triangleright \mathfrak{N}_m = 1$ eine charakteristische Reihe von $\mathfrak{G}$. Verfeinert man sie zu einer Kompositionsreihe $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_0 \cdot \triangleright \mathfrak{C}_1 \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{C}_n = 1$, dann gibt es genau einen Index $k = 1, \ldots, n$ so, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \varrho\, \mathfrak{C}_{k-1}/\mathfrak{C}_k$ gilt [(1.2) und (2.1)]. Es gibt ferner ein $i = 1, \ldots, m$ derart, daß $\mathfrak{N}_{i-1} \geqq \mathfrak{C}_{k-1} \cdot \triangleright \mathfrak{C}_k \geqq \mathfrak{N}_i$. Daraus folgt $\mathfrak{N}_{i-1} \geqq \mathfrak{C}_{k-1}^\sigma \cdot \triangleright \mathfrak{C}_k^\sigma \geqq \mathfrak{N}_i$ und aus (3.1) $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi\, \mathfrak{C}_{k-1}^\sigma/\mathfrak{C}_k^\sigma$.

(b) Setzen wir $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ als abelsch voraus, dann ist $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ eine elementarabelsche Gruppe. Nach (3.3) trifft $\mathfrak{C}_{k-1}^\sigma/\mathfrak{C}_k^\sigma \pi\, \mathfrak{C}_{k-1}/\mathfrak{C}_k$ zu und daher gilt $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi\, \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

(3.4) gilt im allgemeinen nicht, wenn $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nichtabelsch ist. Als einfachstes Gegenbeispiel betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G} = \langle \sigma \rangle \mathfrak{H}$, $\sigma^2 = 1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5$ ($\mathfrak{A}_5$ die alternierende Permutationsgruppe auf 5 Ziffern), $(A, B)^\sigma = \sigma^{-1}(A, B)\sigma = (B, A)$ für alle $(A, B) \in \mathfrak{H}$. Wir setzen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}_5 \times 1$, $\mathfrak{M}_2 = 1 \times \mathfrak{A}_5$. Dann sind $\mathfrak{p}_1 = \{\mathfrak{M}_1/1, \mathfrak{H}/\mathfrak{M}_2\}$, $\mathfrak{p}_2 = \{\mathfrak{M}_2/1, \mathfrak{H}/\mathfrak{M}_1\}$ und $\mathfrak{p}_3 = \{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\}$ alle Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{M}_1^\sigma/1^\sigma = \mathfrak{M}_2/1$ nicht projektiv zu $\mathfrak{M}_1/1$, sogar bei einem inneren Automorphismus σ von $\mathfrak{G}$.

Die Klassen projektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen sind durch ihre Invarianz bei beliebigen Automorphismen ausgezeichnet, die Klassen projektiver nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen hingegen durch eine recht übersichtliche Einbettung in $s\mathfrak{G}$.

(3.5) (a) *Zu jeder nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es genau eine in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzible subnormale Untergruppe $\mathfrak{C}$ und genau eine in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduzible subnormale Untergruppe $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C} \pi\, \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \pi\, \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ ist normal in $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}$ und es gilt $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, $\mathfrak{N}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} \geqq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Aus $\mathfrak{R}/\mathfrak{S} \pi\, \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{N}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$. Definieren wir umgekehrt für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{N}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$ und für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.*

(b) *Die Anzahl der Klassen projektiver nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen ist gleich der Anzahl nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen in einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, gleich der Anzahl der in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduziblen Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ mit nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$, gleich der Anzahl der in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduziblen perfekten Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. (a) Die Existenz von Untergruppen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ wurde in (3.2) nachgewiesen. $\mathfrak{D}$ ist perfekt, einköpfig (d.h. $\cup$-irreduzibel) und nicht in $\mathfrak{C}$ enthalten. Also ist $\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{D} = \mathfrak{N}_\mathfrak{C}$ [6, (20)] und daher auch $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}$: $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$.

Es gelte zunächst $\mathfrak{R}/\mathfrak{S} \tau \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{R} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{R}$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D} \not\leqq \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{D} \trianglelefteq \mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$ [6, (20)], $\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{R}$ und daher $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{C}$ und folglich $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{K}_\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$; denn andernfalls gilt $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{C} \cup \mathfrak{S}$, weil $\mathfrak{C}$ $\frown$-irreduzibel ist in $s\mathfrak{G}$. Aber $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und daher auch $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ sind elementweise vertauschbar mit $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Dann liegt $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ im Zentrum von $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ nichtabelsch ist.

Im zweiten Fall ist $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} \geqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{S}$. Angenommen, es ist $\mathfrak{D} \not\leqq \mathfrak{R}$. Dann folgt $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, weil $\mathfrak{D}$ $\smile$-irreduzibel ist in $s\mathfrak{G}$. $\mathfrak{D}$ ist normal in $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ [6, (20)] und daher auch $\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}\mathfrak{R}$. Jeder maximale Normalteiler $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ schneidet $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, enthält also $\mathfrak{R}\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Daher haben die Gruppen $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{M}_\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ nur das Einheitselement gemeinsam, sind also nach [6, (19)] elementweise vertauschbar. Mithin liegt $\mathfrak{R}\mathfrak{M}_\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ im Zentralisator $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Weil $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{C}$, folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{C}$. Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$.

Zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ gehören also derselbe in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und derselbe in $s\mathfrak{G}$ $\smile$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ mit den in (3.2) beschriebenen Eigenschaften. Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir von der Relation τ zu der Relation π übergehen. Es kann daher keine zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_1}/\mathfrak{C}_1 \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \pi \mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_2}/\mathfrak{C}_2$ und auch keine zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\smile$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ mit $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_1} \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \pi \mathfrak{D}_2/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_2}$ geben.

Setzen wir schließlich für jedes $\mathfrak{R} \in s\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$ fest, dann ist $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cup \mathfrak{R}$ und es gilt $\mathfrak{R}/\mathfrak{S} \tau \mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$. Erklären wir entsprechend für jedes $\mathfrak{S} \in s\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$, so gilt wegen $\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{R}/\mathfrak{S} \tau \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. In beiden Fällen ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Damit ist (a) bewiesen.

(b) ergibt sich unmittelbar aus (a).

Als Folgerung aus (3.5) erhalten wir

(3.6) *Es seien $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppe, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die ihr durch* (3.5 a) *zugeordneten Subnormalteiler und σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{C}^\sigma = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}^\sigma = \mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{C}^\sigma = \mathfrak{C}$ genau dann, wenn $\mathfrak{D}^\sigma = \mathfrak{D}$.*

Wir kennzeichnen die Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe, in denen alle Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen die in (3.4) beschriebene Eigenschaft besitzen. Etwas allgemeiner gilt:

(3.7) *Es sei Ω eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für jede Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und jeden Automorphismus $\sigma \in \Omega$, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe in einer Ω-Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ einfach ist.*

Beweis. (a) Es sei jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$ in einer Ω-Kompositionsreihe $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_m = 1$ einfach. Wie im Beweis (a) von (3.4) schließen wir, daß $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ auch für alle nichtabelschen

Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ und alle Automorphismen aus Ω gilt, weil in diesem Falle $\mathfrak{N}_{i-1}=\mathfrak{C}_{k-1}$ und $\mathfrak{N}_i=\mathfrak{C}_k$ ist.

(b) Es gelte $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für alle $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\in K_{s\mathfrak{G}}$ und alle $\sigma\in\Omega$. Angenommen, $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}\times\cdots\times\mathfrak{N}_r/\mathfrak{M}$ ist eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$ mit $r>1$ isomorphen einfachen Untergruppen $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{M}$. Dann gibt es ein $\sigma\in\Omega$ so, daß $\mathfrak{N}_1^\sigma=\mathfrak{N}_2\neq\mathfrak{N}_1$ gilt. Der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}$ seien durch (3.5a) der in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und der in $s\mathfrak{G}$ $\smile$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ zugeordnet. Aus der Voraussetzung folgt $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1^\sigma/\mathfrak{M}^\sigma \pi \mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}$. Mit (3.5a) schließen wir daraus auf $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{D}\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_2$. Dieser Widerspruch widerlegt unsere Annahme $r>1$. Daher ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ einfach.

Als Gegenstück zu (3.7) kennzeichnen wir alle Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe, in denen allen Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen die in (3.5a) beschriebene Eigenschaft zukommt.

(3.8) *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig*:

(a) $s\mathfrak{G}$ *ist distributiv.*

(b) *Zu jeder Kompositionsfaktorgruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gibt es genau einen in* $s\mathfrak{G}$ $\frown$*-irreduziblen Subnormalteiler* $\mathfrak{C}$ *und genau einen in* $s\mathfrak{G}$ $\smile$*-irreduziblen Subnormalteiler* $\mathfrak{D}$ *derart, daß* $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ *projektiv sind zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

(c) *Kein Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *besitzt eine elementarabelsche Faktorgruppe vom Typ* (p, p).

BEWEIS. (a) ist nach [5, Satz 5] gleichwertig mit

(a′) *Es gibt keine Kompositionsfaktorgruppen* $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ *mit* $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$.

I. Aus (a′) folgt (b). Denn gibt es zu einer (abelschen) Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ so, daß $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_i}/\mathfrak{C}_i$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, dann ist entweder $\mathfrak{C}_i\geqq\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}$ oder $\mathfrak{C}_i$ ist nicht in $\mathfrak{C}_j$ $(i\neq j, i=1, 2)$ enthalten. Der erste Fall widerspricht (a′). Im zweiten Falle betrachten wir einen Subnormalteiler $\mathfrak{L}_i\cdot\rhd\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\frown\mathfrak{C}_2$, der in $\mathfrak{C}_i$ liegt. $\mathfrak{L}_i\smile\mathfrak{C}_j$ $(i\neq j)$ enthält $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}$ und daher ist $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{C}$ projektiv zu $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}/\mathfrak{C}_j$ (2.3). Folglich ist $\mathfrak{L}_1\smile\mathfrak{L}_2/\mathfrak{C}$ eine p-Gruppe [5, Satz 2] mit zwei verschiedenen Untergruppen der Ordnung p. Mithin gibt es Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$ (3.3).

Zu der gleichen Aussage gelangen wir, wenn zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\smile$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ existieren derart, daß $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_i}$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Denn $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_i}\geqq\mathfrak{D}_j$ trifft nicht zu. Daher schneidet jeder maximale Normalteiler $\mathfrak{N}_i\geqq\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\smile\mathfrak{D}_2$ den Subnormalteiler $\mathfrak{D}_j$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$, so daß $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}_i$ transponiert ist zu $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$ $(i\neq j)$. $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}_1\frown\mathfrak{N}_2$ ist eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p) und wir erhalten mit (3.3) wieder die Existenz übereinanderliegender projektiver Kompositionsfaktorgruppen.

II. Aus (b) folgt (a′). Gibt es Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$, dann weist man mit (3.2) leicht die Existenz von Subnormalteilern $\mathfrak{C}_1\neq\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{D}_1\neq\mathfrak{D}_2$ nach, die in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzibel bzw. $\smile$-irreduzibel sind und deren Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_i}/\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$ zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ bzw. zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ transponiert sind. Gilt nämlich $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_1}\geqq\mathfrak{L}\geqq\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_1\geqq\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_1}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_2}\geqq\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{D}_2$,

$\mathfrak{C}_2 \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_1}$, dann würde aus $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \geqq \mathfrak{M} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}_2$ oder aus $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 \leqq \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{C}_1$ ein Widerspruch gegen $\mathfrak{R}_{\mathfrak{C}_i} = \mathfrak{C}_i \cup \mathfrak{D}_i$ folgen. Wie wir unter I. gezeigt haben, gibt es dann auch einen Subnormalteiler mit elementarabelscher Faktorgruppe vom Typ (p, p). Damit erhalten wir:

III. Aus (c) folgt (a'). Schließlich folgt mit (3.3) aus (a') auch (c). Damit ist (3.8) bewiesen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit Bemerkungen zur Arbeit [2] von O.-H. KELLER. [2] beschäftigt sich nur mit Gruppen, die eine endliche Kompositionsreihe besitzen. In [2] wird eine Gruppe „pseudoeinfach" genannt, wenn sie einfach oder eine p-Gruppe ist. Jede Normalreihe kürzester Länge mit pseudoeinfachen Faktorgruppen heißt „Pseudokompositionsreihe". Um die Ergebnisse von [2] mit unseren Untersuchungen in Einklang zu bringen, nennen wir zwei Kompositionsfaktorgruppen *pseudoprojektiv*, wenn sie in pseudoeinfachen Faktorgruppen zweier Normalreihen auftreten, die durch eine Kette von „Vertauschungen", „Verschmelzungen" und „Aufspaltungen" [2, S. 181/182] auseinander hervorgehen. Projektive Kompositionsfaktorgruppen sind pseudoprojektiv. Die Pseudoprojektivität ist eine Äquivalenzrelation in $K_{s\mathfrak{G}}$, die auf den nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppen mit der Projektivität übereinstimmt. Eine Klasse pseudoprojektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen kann jedoch auf Grund des Satzes (3.3) aus mehreren Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen bestehen. Ändert man aber die Definition und nennt nur solche p-Gruppen pseudoeinfach, die entweder einfach sind oder mehr als eine Untergruppe der Ordnung p besitzen, dann sind pseudoprojektive Kompositionsfaktorgruppen auch projektiv.

In „lockeren" Gruppen [2, § 4] hat keine subnormale Untergruppe eine elementarabelsche Faktorgruppe vom Typ (p, p). Andererseits wird bei der Konstruktion des Streckenkomplexes einer lockeren Gruppe außer der endlichen Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ nur gebraucht, daß zu jeder Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ genau ein in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzibler Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ gehört, so daß $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}/\mathfrak{C}$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Man kann also allen Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe und distributivem Subnormalteilerverband einen Streckenkomplex im Sinne von KELLER zuordnen.

4. Die Kongruenzklassen in $s\mathfrak{G}$

Wir setzen auch in diesem Abschnitt voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt. $\varkappa$ sei eine Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. Mit $\varkappa(\mathfrak{A})$ bezeichnen wir die Menge der Subnormalteiler $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$, also die Kongruenzklasse von $s\mathfrak{G}$ nach $\varkappa$, die $\mathfrak{A}$ enthält. $\varkappa(\mathfrak{A})$ besitzt ein eindeutig bestimmtes maximales Element $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ und ein eindeutig bestimmtes minimales Element $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Es sei B die Menge der von $\varkappa$ annullierten Klassen $\mathfrak{p} \in K_{s\mathfrak{G}}/\pi$. $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ ist die maximale subnormale Obergruppe von $\mathfrak{A}$ derart, daß eine Kompositionskette von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ bis $\mathfrak{A}$ nur Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S}) \in \mathsf{B}$ besitzt. Entsprechend ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ die minimale subnormale Untergruppe von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}(\mathfrak{L}/\mathfrak{M})$ in B liegt für alle Kompositionsfaktorgruppen

$\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{A}$ bis $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Es sei λ eine zweite Kongruenzrelation, die die Menge $\Gamma \subseteq K_{s\mathfrak{G}}/\pi$ annulliert.

(4.1) *Für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gilt*

(a) $\quad \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) = \overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}), \qquad \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A}),$

(b) $\quad \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A}), \qquad \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) = \underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}).$

BEWEIS. (a) Aus $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cap \lambda}$ folgt $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$ und $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\lambda}$. Also gilt $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A})$. Andererseits ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})$ in $\mathsf{B} \cap \Gamma$ enthalten, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ in einer Kompositionskette von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A})$ bis $\mathfrak{A}$ auftritt. Mithin ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A})$. Es gilt die in (4.1 a) behauptete Gleichung.

Ferner ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$ und $\overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, also auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, was $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A})$ bedeutet.

(b) Ebenso ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$ und $\underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, folglich $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, d.h. es ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A})$.

Es gilt $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$ und $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\lambda}$, also $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$. Zum anderen ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})$ in $\mathsf{B} \cap \Gamma$ enthalten, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ in einer Kompositionskette von $\mathfrak{A}$ bis $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$ auftritt. Daher gilt $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$ und daraus folgt die Gleichung in (4.1 b).

Daß in den Ungleichungen von (4.1) auch $<$ bzw. $>$ stehen kann, lehrt das Beispiel $\mathfrak{G} = \langle \sigma \rangle (\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5)$ aus Abschnitt 3. Wir setzen dort $\mathsf{B} = \{\mathfrak{p}_1\}$, $\Gamma = \{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3\}$ und bezeichnen mit $\varkappa, \lambda$ die zugehörigen Kongruenzrelationen in $s\mathfrak{G}$. Dann ist $\overline{\varkappa}(1) = \mathfrak{M}_1$, $\overline{\lambda}(1) = \mathfrak{M}_2$, aber $\overline{\varkappa}(1) \cup \overline{\lambda}(1) = \mathfrak{H} < \mathfrak{G} = \overline{\varkappa \cup \lambda}(1)$. Außerdem ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, $\underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1$, aber $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1 > 1 = \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{G})$. Damit haben wir zugleich ein Beispiel dafür gefunden, daß der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ und der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ einer Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$ nicht notwendig Normalteiler zu sein brauchen, im Gegensatz zu den Verhältnissen in Untergruppenverbänden [4, S. 58]; denn $\overline{\varkappa}(1) = \mathfrak{M}_1$ und $\underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1$ sind nicht normal in $\mathfrak{G}$. Als wichtigstes Ergebnis dieses Abschnittes zeigen wir

(4.2) SATZ. *Es sei Ω eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ein Ω-invarianter Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$.*

(a) *Genau dann ist für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ Ω-invariant, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{N}$ einfach ist.*

(b) *Genau dann ist für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ Ω-invariant, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{N}$ bis 1 einfach ist.*

BEWEIS. (a) Sei jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{N}$ einfach und $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für jeden Automorphismus $\sigma \in \Omega$. Für abelsche Kompositionsfaktorgruppen folgt dies aus (3.4). Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nichtabelsch, dann gibt es in einer Ω-Kompositionskette $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 \rhd \mathfrak{H}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{H}_r = \mathfrak{N}$ eine einfache Faktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \varrho\, \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ [(2.1)

und (1.2)], für die dann auch $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ gilt (3.2), weil $\mathfrak{H}_{i-1}$, $\mathfrak{H}_i$ Ω-invariant sind. Also sind $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ projektiv. Annulliert die Kongruenzrelation $\varkappa$ genau die Klassen aus $\mathsf{B} \subseteq K_{s\mathfrak{G}}/\pi$, dann liegen auch die Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma) = \mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ aller Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$-zwischen $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$ und $\mathfrak{N}^\sigma = \mathfrak{N}$ in B. Es folgt $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma \subseteq \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und, weil die Kompositionsketten von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$ bis $\mathfrak{N}$ und von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ bis $\mathfrak{N}$ die gleiche Länge haben, $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$.

Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir an, daß $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1/\mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{L}_t/\mathfrak{M}$ mit $t > 1$ isomorphen einfachen Gruppen $\mathfrak{L}_j/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}$ besitzt. Dann gibt es ein $\sigma \in \Omega$ mit $\mathfrak{L}_1^\sigma = \mathfrak{L}_2 \neq \mathfrak{L}_1$. Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ der in $s\mathfrak{G}$ $\frown$-irreduzible bzw. $\smile$-irreduzible Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$ durch (3.5a) zugeordnet sind. Angenommen, es ist $\mathfrak{C}^\sigma = \mathfrak{C}$. (3.6) zufolge ist dann $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1^\sigma/\mathfrak{M}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$. Daraus folgt aber mit (3.5a) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$, also ein Widerspruch. Es ist $\mathfrak{C}^\sigma \neq \mathfrak{C}$. Nun sei B die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, die eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{C}$ bis 1 enthalten, und $\varkappa$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. $\mathfrak{C}$ ist Untergruppe von $\overline{\varkappa}(1)$ und es ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \overline{\varkappa}(1)$, weil $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{C}$. Jede echte subnormale Obergruppe von $\mathfrak{C}$ enthält $\mathfrak{N}_\mathfrak{C}$. Hingegen ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{N}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C})$ nicht in B enthalten. Folglich ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$.

(b) Ist jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe in einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{N}$ bis 1 einfach, dann folgt analog zum Beweis von (a) $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ für alle $\sigma \in \Omega$ und jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$.

Zum Beweis der Umkehrung setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1/\mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{L}_t/\mathfrak{M}$ mit $t > 1$ isomorphen einfachen Gruppen $\mathfrak{L}_j/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{L}$ besitzt. Es gibt dann ein $\sigma \in \Omega$ mit $\mathfrak{L}_1^\sigma = \mathfrak{L}_2 \neq \mathfrak{L}_1$. Der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$ seien die Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ gemäß (3.5a) zugeordnet. Wie im Teil (a) zeigt man $\mathfrak{D}^\sigma \neq \mathfrak{D}$. Mit B bezeichnen wir jetzt die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, die eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{D}$ enthalten, und $\varkappa$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. Es gilt $\mathfrak{D} \supseteq \underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$, weil $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{D}$. Jede echte subnormale Untergruppe von $\mathfrak{D}$ ist in $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ enthalten. $\mathfrak{p}(\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D})$ liegt aber nicht in B. Daher ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$, womit (b) bewiesen ist.

Wir erwähnen einige Folgerungen aus (4.2).

(4.3) *Genau dann sind für jeden Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ und jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ normal in $\mathfrak{G}$, wenn in einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ jede nichtabelsche Hauptfaktorgruppe einfach ist.*

(4.4) *Genau dann ist der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ (der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$) jeder Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ normal in $\mathfrak{G}$, wenn in einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ jede nichtabelsche Hauptfaktorgruppe einfach ist.*

(4.5) *Es sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ ein Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$. Gilt $\mathfrak{A}^\sigma = \mathfrak{A}$, dann folgt für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Insbesondere sind der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ und der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ stets charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{G}$.*

Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Revised Edition 1948.
[2] KELLER, O.-H.: Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Strekkenkomplexe. Math. Ann. **128**, 177–199 (1954).
[3] KOŘÍNEK, VL.: Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Bull. intern. Acad. tchèque Sci. **50**, No. 23 (1949).
[4] SUZUKI, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Ergebn. d. Math. ,N. F. **10** (1956).
[5] TAMASCHKE, O.: Submodulare Verbände. Math. Z. **74**, 186–190 (1960).
[6] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).
[7] WIELANDT, H.: Vertauschbare nachinvariante Untergruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg **21**, 55–62 (1957).
[8] WIELANDT, H.: Sylowgruppen und Kompositions-Struktur. Abh. Math. Sem. Hamburg **22**, 215–228 (1958).
[9] WIELANDT, H.: Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. **69**, 463–465 (1958).
[10] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 2. Aufl. 1958.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. März 1960)

Itô, N.
Math. Zeitchr. 75, 127—135 (1961)

Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. II

Herrn Helmut Wielandt zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von
Noboru Itô

Es sei Ω die Menge der Ziffern $1, \ldots, p$, wobei p eine Primzahl $\geqq 5$ bezeichnet. $\mathfrak{G}$ sei eine nicht auflösbare transitive Permutationsgruppe auf Ω, in der der Normalisator $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ die Ordnung qp besitzt. Es ist unsere Absicht, zu fest vorgegebenem q und beliebig variierendem p die Struktur von $\mathfrak{G}$ zu bestimmen (vgl. [7]). In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

Satz. *Sei $2<q<p-1$. $\mathfrak{G}$ sei $2(q-1)$-fach transitiv. Dann ist $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{A}_p$ mit $p=2q+1$ isomorph. Dabei bezeichnet $\mathfrak{A}_p$ die alternierende Gruppe vom Grad p.*

Wir schicken einige Resultate von Frobenius und R. Brauer voraus, die im folgenden benutzt werden.

I. Aus der Theorie von Frobenius über die symmetrische Gruppe und ihre mehrfach transitiven Untergruppen.

Sei $n=a_1+\cdots+a_k$ mit $a_1\geqq\cdots\geqq a_k>0$ eine Zerlegung einer natürlichen Zahl n in irgendwelche natürliche Zahlen a_i $(1\leqq i\leqq k)$. Wir ordnen dieser Zerlegung ein sog. Young-Diagramm Δ zu:

$$\Delta: \begin{array}{ll} \text{o} \ldots \ldots \text{o} & a_1 \text{ Nullen} \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \text{o} \ldots \text{o} & a_k \text{ Nullen.} \end{array}$$

Die Zahl $n-a_1$ heißt die Dimension $d(\Delta)$ des Young-Diagramms Δ.

$\mathfrak{S}_n$ bezeichne die symmetrische Gruppe vom Grad n. Bekanntlich gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Young-Diagrammen Δ und den irreduziblen Charakteren χ_Δ von $\mathfrak{S}_n$.

(I.1) (Siehe [5]). $\mathfrak{G}$ sei eine r-fach transitive Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$. Dann bleibt jeder irreduzible Charakter χ_Δ von $\mathfrak{S}_n$ mit $d(\Delta)\leqq r/2$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}$. Weiter sind zwei verschiedene irreduzible Charaktere χ_Δ und $\chi_{\Delta'}$ von $\mathfrak{S}_n$ zueinander orthogonal auf $\mathfrak{G}$, wenn $d(\Delta)+d(\Delta')\leqq r$ ist.

(I.2) (Siehe [4]). Δ_k bezeichne das Young-Diagramm

$$\begin{matrix} o & . & . & . & o \\ o \\ . \\ . \\ o \end{matrix} \Bigg\} k$$

$(0 \leqq k \leqq n-1)$. Setze $\chi_{\Delta_k} = \chi_k$. Für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_n$ bezeichne $\alpha_i(G)$ die Anzahl der Zyklen der Länge i in der Zyklendarstellung von G $(1 \leqq i \leqq n)$. Dann gilt für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_n$ die Formeln:

$$\chi_0(G) = 1,$$

$$\chi_1(G) = \alpha_1(G) - 1,$$

$$\chi_2(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{2} - \alpha_2(G),$$

$$\chi_3(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{3} - (\alpha_1(G) - 1)\,\alpha_2(G) + \alpha_3(G) \quad \text{und}$$

$$\chi_k(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{k} + \cdots + (-1)^{k-1} \left\{ \binom{\alpha_1(G) - 1}{2} - \alpha_2(G) \right\} \alpha_{k-2}(G) +$$
$$+ (-1)^k (\alpha_1(G) - 1)\,\alpha_{k-1}(G) + (-1)^{k+1} \alpha_k(G) \qquad (4 \leqq k \leqq n-1).$$

Insbesondere ist der Grad von χ_k gleich $\binom{n-1}{k}$.

II. AUS DER p-BLOCKTHEORIE VON R. BRAUER [2].

Es sei $\mathfrak{G}$ eine transitive Permutationsgruppe vom Grad p, in der der Normalisator $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ die Ordnung qp besitzt. $\mathfrak{G}$ stimme mit seiner Kommutatoruntergruppe überein.

Der erste p-Block $\mathsf{B}_1(p)$ von Charakteren von $\mathfrak{G}$ besteht aus α irreduziblen Charakteren, die mit A_ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq \alpha)$ bezeichnet werden und deren Grade modulo p gleich 1 sind, aus $\beta = q - \alpha$ irreduziblen Charakteren, die mit B_σ $(1 \leqq \sigma \leqq \beta)$ bezeichnet werden und deren Grade modulo p gleich -1 sind, und aus einer Familie von $\frac{p-1}{q}$ p-konjugierten irreduziblen Charakteren $C^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, p-1/q)$. A_ϱ und B_σ bilden je für sich eine Familie p-konjugierter Charaktere. Alle anderen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ gehören zu p-Blöcken mit Defekt 0, verschwinden also für jedes p-singuläre Element von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{P} = \langle P \rangle$. Dann haben wir $A_\varrho(P^i) = 1$ und $B_\sigma(P^i) = -1$ für $i = 1, \ldots, p-1$ $(1 \leqq \varrho \leqq \alpha,\ 1 \leqq \sigma \leqq \beta)$. Es gilt auch für jedes p-reguläre Element G von $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$(B) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\alpha} A_\varrho(G) + \delta C^{(\nu)}(G) = \sum_{\sigma=1}^{\beta} B_\sigma(G) \quad \text{mit} \quad \delta = \pm 1.$$

Beweis des Satzes.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler $>E$ von $\mathfrak{G}$. Als eigentlicher Normalteiler einer primitiven Gruppe ist $\mathfrak{N}$ transitiv. Daher gilt $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{P}$. Da alle p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ bereits in $\mathfrak{N}$ zueinander konjugiert sind, folgt $\mathfrak{G} = N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}/N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$ ist zyklisch. Weil $\mathfrak{G}$ nicht auflösbar ist, so ist $\mathfrak{N}$ nicht auflösbar. Als minimaler Normalteiler stimmt $\mathfrak{N}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. Also können wir auf $\mathfrak{N}$ die Ergebnisse der p-Blocktheorie von R. Brauer aus II anwenden.

Wenn $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{N}$ ist, folgt $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \neq N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$. Die Ordnung von $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$ sei gleich $q'p$. Dann gilt $q' \leqq q/2$. Nach einem Satz von C. Jordan [6] ist $\mathfrak{N}$ $(2q-3)$-fach transitiv. Also bleiben nach Frobenius (I.1) und (I.2) die Charaktere $\chi_0, \ldots, \chi_{q-2}$ irreduzibel auf $\mathfrak{N}$ und sind verschieden voneinander. Weiterhin sind ihre Grade prim zu p und sie sind rationale Charaktere. Sie stimmen demnach mit gewissen der A_ϱ, B_σ von $\mathfrak{N}$ überein. Also haben wir nach (B) die Ungleichung $q-1 \leqq q'$. Zusammen mit der Ungleichung $q' \leqq q/2$ folgt $q \leqq 2$. Das widerspricht der Voraussetzung des Satzes. Also ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}$ ist einfach. Insbesondere stimmt $\mathfrak{G}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. Somit können wir auf $\mathfrak{G}$ die p-Blocktheorie von R. Brauer anwenden.

Nach Frobenius (I.1) und (I.2) bleiben $\chi_0, \ldots, \chi_{q-1}$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}$ und sie sind verschieden voneinander. Wegen $\binom{p-1}{k} \equiv \pm 1$ modulo p stimmen sie mit den A_ϱ und B_σ überein. Und zwar ist jedes χ_k mit geradem k ein A_ϱ und jedes χ_k mit ungeradem k ein B_σ. Also haben wir $\alpha = \beta = q/2$, wenn q gerade ist, und $\alpha = (q-1)/2$, $\beta = (q+1)/2$, wenn q ungerade ist. Wegen $\binom{p-1}{0} - \binom{p-1}{1} + \cdots + (-1)^k \binom{p-1}{k} > 0$ für gerades $k < \frac{p-1}{2}$ und <0 für ungerades $k < \frac{p-1}{2}$ gilt die Gleichung (B) mit $\delta = 1$ für gerades q und $\delta = -1$ für ungerades q.

Da $\binom{p-2}{q-1} = \binom{p-1}{1} + \cdots + \binom{p-1}{q-1} - \binom{p-1}{0} - \cdots - \binom{p-1}{q-2}$ für gerades q und $= \binom{p-1}{0} + \cdots + \binom{p-1}{q-1} - \binom{p-1}{1} - \cdots - \binom{p-1}{q-2}$ für ungerades q ist, folgt aus der Gleichung (B), daß der Grad von $C^{(\nu)}$ gleich $\binom{p-2}{q-1}$ ist.

Nun betrachten wir den irreduziblen Charakter χ_q von $\mathfrak{S}_p$ in $\mathfrak{G}$. Nach Frobenius (I.1) ist χ_q in $\mathfrak{G}$ orthogonal zu jedem χ_k $(0 \leqq k \leqq q-2)$. Wir nehmen an, daß χ_q in $\mathfrak{G}$ kein $C^{(\nu)}$ umfaßt. Dann enthält χ_q in $\mathfrak{G}$ von den Charakteren aus $\mathsf{B}_1(p)$ höchstens χ_{q-1}. Daher besitzt die Zerlegung von χ_q in die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ folgende Gestalt:

$$\chi_q(G) = m_{q-1}\chi_{q-1}(G) + X(G) \quad (G \in \mathfrak{G}),$$

wobei X eine lineare Kombination der Charaktere von $\mathfrak{G}$ mit Defekt 0 bezeichnet. Setzen wir $G=P$, dann haben wir nach BRAUER II die Gleichung $(-1)^q = m_{q-1}(-1)^{q-1}$. Da m_{q-1} nicht negativ ist, ist das ein Widerspruch. Also umfaßt χ_q in $\mathfrak{G}$ mindestens ein $C^{(\nu)}$. Dann umfaßt χ_q in $\mathfrak{G}$ alle $C^{(\nu)}$, weil χ_q rational und alle $C^{(\nu)}$ zueinander algebraisch konjugiert sind. Indem wir die Grade der beiden Charaktere χ_q und $\sum_{\nu=1}^{(p-1)/q} C^{(\nu)}$ vergleichen, erhalten wir in $\mathfrak{G}$ die Gleichung $\chi_q = \sum_{\nu=1}^{(p-1)/q} C^{(\nu)}$. Daher bekommen wir aus (B) die folgende Gleichung für p-reguläre Elemente

$$(*)\quad \chi_q = (-1)^q \frac{p-1}{q}\{(\chi_1 + \cdots + \chi_{q-\frac{1}{2}+(-1)^q\frac{1}{2}}) - (\chi_0 + \cdots + \chi_{q-\frac{1}{2}-(-1)^q\frac{1}{2}})\}.$$

Sei $G \neq E$ ein Element aus $\mathfrak{G}$ mit $\alpha_1(G) > q$ und $\alpha_2(G) = \cdots = \alpha_{q-1}(G) = 0$. Dann ist nach FROBENIUS (I.2) und der Gleichung $(*)$

$$\alpha_q(G) = (-1)^{q+1}\left\{\frac{p-1}{q}\binom{\alpha_1(G)-2}{q-1} - \binom{\alpha_1(G)-1}{q}\right\}.$$

(Hier haben wir die gleiche Schlußweise wie bei der Berechnung des Grades von $C^{(\nu)}$ benutzt.) Daraus folgt

$$\alpha_q(G) = (-1)^{q+1}\left\{\left(\frac{p-\alpha_1(G)}{q}\binom{\alpha_1(G)-2}{q-1}\right)\right\}.$$

Für gerades q ist dies ein Widerspruch. Sei q ungerade. Wegen

$$\alpha_1(G) + q\,\alpha_q(G) + \cdots = p$$

bekommen wir aus der letzten Gleichung $\alpha_1(G) = q+1$.

Es bezeichne $\mathfrak{G}_{1,\ldots,k}$ die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die die Ziffern $1, \ldots, k$ einzeln fest läßt $(1 \leqq k \leqq p)$. Sei q gerade. Die Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$ besitze einen Primteiler l größer als $q-1$. Sei G ein Element aus $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$ der Ordnung l. Dann erfüllt dieses Element G die Bedingung $\alpha_1(G) > q$ und $\alpha_2(G) = \cdots = \alpha_{q-1}(G) = 0$. Das ist ein Widerspruch. Also ist jeder Primteiler der Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q-1}$ kleiner als q. Sei q ungerade. Dann kann man gleicherweise schließen, daß jeder Primteiler der Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+2}$ kleiner ist als q.

$\mathfrak{G}$ umfasse $\mathfrak{A}_p$. Da $\mathfrak{G}$ einfach ist, haben wir dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_p$. Da der Normalisator einer p-Sylowgruppe von $\mathfrak{A}_p$ die Ordnung $p(p-1)/2$ besitzt, haben wir $q = (p-1)/2$ und wir sind fertig. Also sei $\mathfrak{A}_p$ nicht enthalten in $\mathfrak{G}$. Dann bewegt nach einem Satz von BOCHERT [1] jedes Element von $\mathfrak{G}$ mindestens $p/2 - 1$ Ziffern, da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist. Da andererseits $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element $\neq E$, das höchstens $p-2q+3$ Ziffern versetzt. Also haben wir $\frac{p}{2} - 1 \leqq p - 2q + 3$. Daraus folgt $2q - 5 \leqq p - 2q + 3$, und wegen $q > 2$ folgt $q - 3 < p - 2q + 3$.

Sei q gerade. Da $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gilt $|\mathfrak{G}_{1,\dots,q+1}:\mathfrak{G}_{1,\dots,2q-2}| = (p-q-1)\dots(p-2q+3)$. Da $p-2q+3>q-3$ ist, gibt es, nach einem Satz von SYLVESTER-SCHUR [3], einen Primteiler l von $(p-q-1)\dots(p-2q+3)$, der größer als $q-3$ ist. Andererseits ist jeder Primteiler von $(p-q-1)\dots(p-2q+3)$ kleiner als q. Also muß $l=q-1$ sein. Sei L ein Element der Ordnung l aus $\mathfrak{G}_{1,\dots,q+1}$. Dann gilt $\alpha_1(L)\geqq q+1$, $\alpha_{q-1}(L)>0$, und $\alpha_k(L)=0$ $(k\neq 1,\ q-1)$. Aus der Gleichung (*) folgern wir

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{q}+(\alpha_1(L)-1)\,\alpha_{q-1}(L)=\frac{p-1}{q}\left\{\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\alpha_{q-1}(L)\right\}.$$

Wegen $\alpha_1(L)+(q-1)\alpha_{q-1}(L)=p$ und $\alpha_{q-1}(L)>0$ folgt daraus

$$(**)\qquad \alpha_1(L)-1=\frac{q-1}{q}\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\frac{p-1}{q}.$$

Wenn $\alpha_1(L)>q+3$ ist, haben wir wegen $q>2$

$$\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}\geqq(q-1)\,(\alpha_1(L)-2)\geqq 2(\alpha_1(L)-2).^{1})$$

Also folgt daraus

$$\alpha_1(L)-1\geqq\frac{2(q-1)}{q}\,(\alpha_1(L)-2)+\frac{p-1}{q}.$$

Das ist ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L)\leqq q+3$ sein. Sei $\alpha_1(L)=q+3$. Dann folgt aus der Gleichung (**)

$$q+2=\frac{q-1}{q}\binom{q+1}{q-1}+\frac{p-1}{q}.$$

Daher haben wir

$$q+2=\frac{(q-1)(q+1)}{2}+\frac{p-1}{q}\geqq q+1+\frac{p-1}{q}.$$

Daraus folgt $q\geqq p-1$. Das ist ein Widerspruch. Sei $\alpha_1(L)=q+1$. Die Gleichung (**) ergibt dann

$$q=\frac{q-1}{q}+\frac{p-1}{q}.$$

Da $(p-1)/q$ ganz ist, ist das ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L)=q+2$ sein. Aus der Gleichung (**) folgt nun

$$q+1=(q-1)+\frac{p-1}{q}.$$

Daher haben wir $p=2q+1$. Ein Satz von BOCHERT [1] liefert $\mathfrak{A}_p\leqq\mathfrak{G}$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p\not\leqq\mathfrak{G}$ widerspricht.

[1]) Man kann leicht durch Induktion beweisen: Seien x und y ganze Zahlen, die größer als 2 sind. Dann gilt $\binom{x+y}{y}\geqq xy$.

Sei $q>3$ ungerade. Da $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gilt $|\mathfrak{G}_{1,\dots,q+2}:\mathfrak{G}_{1,\dots,2q-2}|=(p-q-2)\dots(p-2q+3)$. Also gibt es nach einem Satz von SYLVESTER-SCHUR [3] einen Primteiler l von $(p-q-2)\dots(p-2q+3)$, der größer als $q-4$ ist. Da andererseits jeder Primteiler von $(p-q-2)\dots(p-2q+3)$ kleiner als q ist, haben wir $l=q-2$. Sei L ein Element der Ordnung l aus $\mathfrak{G}_{1,\dots,q+2}$. Dann gilt $\alpha_1(L)\geqq q+2$, $\alpha_{q-2}(L)>0$ und $\alpha_k(L)=0$ $(k\neq 1, q-2)$. Aus der Gleichung (*) erhalten wir

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{q}+\binom{\alpha_1(L)-1}{2}\alpha_{q-2}(L)$$

$$=\frac{p-1}{q}\left\{\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+(\alpha_1(L)-1)\,\alpha_{q-2}(L)-\alpha_{q-2}(L)\right\}.$$

Daraus folgt

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{2}\alpha_{q-2}(L)=\frac{p-\alpha_1(L)}{q}\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\frac{p-1}{q}(\alpha_1(L)-2)\,\alpha_{q-2}(L).$$

Da $\alpha_1(L)+(q-2)\alpha_{q-2}(L)=p$ und $\alpha_1(L)\geqq q+2>2$ ist, haben wir

$$(L)\qquad \frac{\alpha_1(L)-1}{2}=\frac{q-2}{q(q-1)}\binom{\alpha_1(L)-3}{q-2}+\frac{p-1}{q}.$$

Wir setzen $\alpha_1(L)>q+3$ voraus. Wegen $q\geqq 5$ gilt dann

$$\binom{\alpha_1(L)-3}{q-2}\geqq(q-2)\,(\alpha_1(L)-3).\ ^{2})$$

Also haben wir

$$(***)\qquad \frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{(q-2)^2}{q(q-1)}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{q}.$$

Daraus folgt für $q\geqq 9$

$$\alpha_1(L)<\frac{6(q^2-4q+4)}{q^2-7q+8}=3+\frac{3q-3}{q^2-7q+8}\,q.$$

Wegen $3q-3<q^2-7q+8$ für $q\geqq 9$ folgt daraus $\alpha_1(L)<q+3$. Das ist ein Widerspruch. Sei $q=7$. Dann geht (***) über in

$$\frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{25}{42}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{7}.$$

Daraus folgt

$$10\geqq\tfrac{2}{3}\alpha_1(L)+p.$$

Da $p\equiv 1$ modulo 7 und daher $p\geqq 29$ ist, ist das ein Widerspruch. Sei $q=5$. Dann liefert (***)

$$\frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{9}{20}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{5}.$$

---

[2]) Vgl. Fußnote 1, S.

Daraus folgt

$$\tfrac{21}{4} + \tfrac{1}{4}\alpha_1(L) \geqq p .$$

Wegen $\alpha_1(L) + 3\alpha_3(L) = p$ haben wir

$$7 \geqq p + \alpha_3(L) .$$

Da $p \equiv 1$ modulo 5 und daher $p \geqq 11$ ist, ist das ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L) \leqq q+3$ sein.

Sei $\alpha_1(L) = q+2$. Dann erhalten wir aus der Gleichung (L)

$$\frac{q+1}{2} = \frac{q-2}{q} + \frac{p-1}{q} .$$

Da q ungerade ist, ist $\frac{q+1}{2}$ ganz. Da auch $\frac{p-1}{q}$ ganz ist, folgt daß $\frac{q-2}{q}$ ganz ist. Das ist ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L) = q+3$ sein. Gleichung (L) geht dann über in

$$\frac{q+2}{2} = \frac{q-2}{2} + \frac{p-1}{q} .$$

Daraus folgt $p = 2q+1$. Dann ergibt sich aus dem Satz von Bochert [1] $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{A}_p$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht.

Sei schließlich $q = 3$. Zunächst untersuchen wir die Gleichung $(*)$ für p-reguläre Elemente eingehender.

$$\binom{\alpha_1(G) - 1}{3} - \big(\alpha_1(G) - 1\big)\alpha_2(G) + \alpha_3(G)$$

$$= \frac{p-1}{3}\left\{1 + \binom{\alpha_1(G) - 1}{2} - \alpha_2(G) - \big(\alpha_1(G) - 1\big)\right\} .$$

Wir nehmen an, daß es ein p-reguläres Element G mit $\alpha_1(G) = 0$ gibt. Dann gilt

$$-1 + \alpha_2(G) + \alpha_3(G) = \frac{p-1}{3}\big(1 + 1 - \alpha_2(G) + 1\big) .$$

Daraus folgt

$$\frac{p+2}{3}\alpha_2(G) + \alpha_3(G) = p .$$

Da $p \equiv 1$ modulo 3 und $2\ \alpha_2(G) + 3\alpha_3(G) + \cdots = p$ ist, haben wir $\alpha_2(G) = 2$, $\alpha_3(G) = \frac{p-4}{3}$ und $\alpha_k(G) = 0$ $(k \neq 2, 3)$. Also besitzt das Element G^3 die Zyklendarstellung der Gestalt $(ab)\,(cd)$. Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist, enthält $\mathfrak{G}$ auch ein Element $(cd)\,(eb)$ und daher auch (aeb). $\mathfrak{G}$ umfaßt dann die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_p$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht. Also gibt es kein p-reguläres Element G mit $\alpha_1(G) = 0$. Es sei G ein Element mit $\alpha_1(G) = 2$. Dann haben wir

$$-\alpha_2(G) + \alpha_3(G) = \frac{p-1}{3}\big(-\alpha_2(G)\big) .$$

Daraus folgt $\alpha_2(G)=\alpha_3(G)=0$. Nun sei G ein Element mit $\alpha_1(G)=3$. Dann gilt

$$-2\alpha_2(G)+\alpha_3(G)=\frac{p-1}{3}\left(-\alpha_2(G)\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{p-7}{3}\alpha_2(G)+\alpha_3(G)=0.$$

Wenn $p=7$ ist, ist es leicht zu zeigen $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_7$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_7 \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht. Also ist $p>7$ und es folgt $\alpha_2(G)=\alpha_3(G)=0$.

Nun bezeichne g_i die Anzahl der Elemente G von $\mathfrak{G}$ mit $\alpha_1(G)=i$ $(0\leqq i\leqq p)$. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, haben wir bekanntlich (vgl. R. D. CARMICHAEL. Introduction to the Theory of Groups of Finite Order, Boston, 1937, p. 164)

$$\sum r g_r = g \quad (= \text{Ordnung von } G),$$
$$\sum r^2 g_r = 2g,$$
$$\sum r^3 g_r = 5g.$$

Daraus folgt

$$g_2=\sum_{r=4}^{p}\frac{r(r-1)(r-3)}{2}g_r.$$

Nun betrachten wir den irreduziblen Charakter X von $\mathfrak{S}_p$, der dem Young-Diagramm $\begin{matrix}\circ & \circ & \dots & \circ & \circ\\ \circ & \circ\end{matrix}$ entspricht. Für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_p$ gilt dann

$$X(G)=\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\alpha_2(G).$$

Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist und X die Dimension zwei hat, bleibt X, nach FROBENIUS (I.1), irreduzibel auch auf $\mathfrak{G}$. Da der Grad von X gleich $\frac{p(p-3)}{2}$ ist, gehört X zu einem p-Block mit Defekt 0. Also nach den Orthogonalitätsrelationen der Gruppencharaktere haben wir

$$\sum_{G\in\mathfrak{G}} X(G)\,\chi_1(G)=0.$$

Da $X(G)$ für p-singuläre Elemente verschwindet, folgt daraus

$$\sum_{G\ p\text{-regulär}} X(G)\,\chi_1(G)=0.$$

Da $\chi_1(G)=\alpha_1(G)-1$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)=1$ verschwindet, folgt daraus

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 2}\left\{\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\alpha_2(G)\right\}\left(\alpha_1(G)-1\right)=0.$$

Weil $\alpha_2(G)=0$ ist für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)=2$ oder $=3$, so gilt

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)=2} 1=\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 4}\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-1)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 4}\alpha_2(G)\left(\alpha_1(G)-1\right).$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich g_2 ist, und da das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung gleich $\sum_{r\geq 4}^{p} \frac{r(r-1)(r-3)}{2} g_r$ ist, haben wir schließlich

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geq 4} \alpha_2(G)\left(\alpha_1(G)-1\right)=0.$$

Daraus folgt $\alpha_2(G)=0$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)\geqq 4$. Also ergibt es sich $\alpha_2(G)=0$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)\geqq 2$. Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist, ist das ein Widerspruch.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Literatur

[1] Bochert, A.: Über die Classe der transitiven Substitutionengruppen. Math. Ann. **40**, 176—193 (1892).

[2] Brauer, R.: On permutation groups of prime degree and related classes of groups. Ann. of Math. **44**, 57—79 (1943).

[3] Erdös, P.: A theorem of Sylvester and Schur. J. London M. S. **9**, 282—288 (1934).

[4] Frobenius, G.: Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Sitzb. d. preuß. Akad. d. Wiss. 516—534 (1900).

[5] Frobenius, G.: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzb. d. preuß. Akad. d. Wiss. 528—571 (1904).

[6] Huppert, B., u. H. Wielandt: Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen. Arch. Math. **9**, 18—26 (1958).

[7] Itô, N.: Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. Math. Z. **74**, 299—301 (1960).

Department of Mathematics. Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, Japan

(Eingegangen am 20. Juli 1960)

CARTER, R. W.
Math. Zeitschr. 75, 136–139 (1961)

Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups

To HELMUT WIELANDT on his 50th birthday, 19th December 1960

By

ROGER W. CARTER *)

1. The purpose of the present note is to prove the following theorem: *Every finite soluble group possesses nilpotent subgroups which are their own normalizers, and all such subgroups are conjugate.* We shall also describe the simplest properties of the nilpotent self-normalizing subgroups.

I would like to thank Professor WIELANDT and Professor P. HALL for their help in the formulation of the main theorem in its present general form and in the construction of the proof.

The notation used will be as follows. $\{A, B\}$ is the subgroup generated by A, B. $\mathbf{N}(A)$ is the normalizer of A. $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ is the commutator of a, b and $[A, B]$ is the subgroup generated by all commutators $[a, b]$ with $a \in A$ and $b \in B$. A Hall subgroup of G is one whose order and index in G are coprime. All groups discussed will be finite.

2. DEFINITION. H is an *abnormal* subgroup of G if $g \in \{H, g^{-1}Hg\}$ for every element $g \in G$.

LEMMA. *H is abnormal in G if and only if it satisfies the following two conditions:*

(i) *Every subgroup of G containing H is its own normalizer.*

(ii) *H is not contained in two different conjugate subgroups of G.*

Suppose H is abnormal in G and let $K \geqq H$. Let g be in the normalizer of K. Then

$$g \in \{H, g^{-1}Hg\} \leqq \{K, g^{-1}Kg\} = K.$$

Therefore K is its own normalizer.

Let $H \leqq K \cap gKg^{-1}$. Then $g \in \{H, g^{-1}Hg\} \leqq K$. Therefore $gKg^{-1} = K$ and H is not contained in two different conjugate subgroups.

Conversely suppose H satisfies the conditions (i), (ii). Let $K = \{H, g^{-1}Hg\}$. Then $H \leqq K \cap gKg^{-1}$. Therefore $gKg^{-1} = K$, by (ii). Hence $g \in K$, by (i), and $g \in \{H, g^{-1}Hg\}$ for all $g \in G$. Thus H is abnormal in G.

LEMMA. *Let G be soluble and M be the normalizer of a Hall subgroup S of G. Then M is abnormal in G.*

*) The author is indebted to the Alexander von Humboldt Stiftung for a research scholarship while the present work was carried out in Tübingen.

Let $K=\{M, g^{-1}Mg\}$. $S, g^{-1}Sg$ are Hall subgroups of K of the same order and are therefore conjugate in K. $g^{-1}Sg=k^{-1}Sk$ for some $k\in K$. Thus $gk^{-1}\in M\leqq K$ and $g\in K$.

3. We first prove the existence of nilpotent self-normalizing subgroups in a soluble group G by induction on the order of G.

Let N be a minimal normal subgroup of G; thus N has order p^α for some prime p. By inductive hypothesis G/N has a nilpotent self-normalizing subgroup K/N. K has a unique Sylow p-subgroup K_p. For every Sylow p-subgroup of K contains N, but K/N is nilpotent and so has a unique Sylow p-subgroup. Let K^p be a Sylow p-complement of K and H its normalizer in K. We show that H is a nilpotent self-normalizing subgroup of G.

Let $H_p=H\cap K_p$. H_p is the unique Sylow p-subgroup of H. For H_p is a normal subgroup of H and is a p-group; on the other hand

$$|H:H_p|=|HK_p:K_p|=|K:K_p|,$$

which is prime to p.

H has also a normal Sylow p-complement K^p, thus $H=H_p\times K^p$. K^p is isomorphic to K/K_p, which is a factor group of the nilpotent group K/N. Therefore K^p is nilpotent and H also.

Now H is abnormal in K, as the normalizer of a Hall subgroup of K. In particular NH is its own normalizer in K and NH/N is its own normalizer in K/N. But K/N is nilpotent, therefore $NH=K$.

Let g be in the normalizer of H in G. g normalizes N also; thus g normalizes $NH=K$. But K is its own normalizer in G, for K/N is its own normalizer in G/N. Therefore $g\in K$. But H is its own normalizer in K, thus $g\in H$. Therefore H is its own normalizer in G.

4. We now prove the conjugacy of any two nilpotent self-normalizing subgroups, also by induction on the order of G.

Let H be a nilpotent self-normalizing subgroup of G and let $g\in G$. Let $K=\{H, g^{-1}Hg\}$. We show that $g\in K$. This is trivial if $K=G$; we may therefore assume that K is a proper subgroup of G. $H, g^{-1}Hg$ are nilpotent self-normalizing subgroups of K and are therefore conjugate in K by inductive hypothesis: $g^{-1}Hg=k^{-1}Hk$ for some $k\in K$. Hence $gk^{-1}\in \mathfrak{N}(H)=H\leqq K$, and $g\in K$. Therefore $g\in\{H, g^{-1}Hg\}$ and H is abnormal in G.

Let N be a normal subgroup of G. Then NH is its own normalizer in G, so that NH/N is its own normalizer in G/N. NH/N is clearly nilpotent, being isomorphic to the factor group $H/N\cap H$ of the nilpotent group H. Thus we have shown, using the inductive hypothesis, that NH/N is a nilpotent self-normalizing subgroup of G/N.

Let H_1, H_2 be nilpotent self-normalizing subgroups of G and let N be a minimal normal subgroup of G. Then NH_1/N, NH_2/N are nilpotent self-normalizing subgroups of G/N and are therefore conjugate in G/N by inductive

hypothesis. Thus NH_1, NH_2 are conjugate in G. We can therefore find an element which transforms H_2 into a subgroup H_2^* of G such that $NH_1=NH_2^*$, and it is sufficient to show that H_1, H_2^* are conjugate. Thus we may assume that $NH_1=NH_2$. We may also assume that $NH_1=NH_2=G$. For if $NH_1=NH_2<G$, H_1 and H_2 are nilpotent self-normalizing subgroups of NH_1 and are conjugate in NH_1 by inductive hypothesis.

Now $N\cap H_1$ is normal in H_1 and also in N, so is normal in $NH_1=G$. Thus $N\cap H_1=N$ or $N\cap H_1=1$. If $N\cap H_1=N$, we have $H_1=NH_1=G$ and the theorem is trivial. Thus we may assume that $N\cap H_1=N\cap H_2=1$, so that H_1, H_2 are complements of N in G.

Let $|N|=p^\alpha$. Then $|G:H_1|=|G:H_2|=p^\alpha$. H_1, H_2 are maximal subgroups of G; for if M were a subgroup between H_1 and G, $M\cap N$ would be a normal subgroup of G between N and 1, which is impossible.

Let H_1^p, H_2^p be the Sylow p-complements of H_1, H_2 respectively. Then H_1^p, H_2^p are Sylow p-complements of G and are therefore conjugate in G: $H_1^p=g^{-1}H_2^pg$ for some $g\in G$.

Suppose $H_1\neq g^{-1}H_2g$. H_1^p is the Sylow p-complement of the nilpotent groups H_1, $g^{-1}H_2g$ and is therefore normal in these groups. Hence H_1^p is normal in their join, which is G since H_1 is maximal in G. G/H_1^p is a p-group and contains a proper subgroup H_1/H_1^p which is its own normalizer. This is a contradiction; therefore $H_1=g^{-1}H_2g$ and H_1, H_2 are conjugate in G.

5. The following properties of nilpotent self-normalizing subgroups are consequences of the proof of the main theorem:

(a) *Every nilpotent self-normalizing subgroup of a soluble group is abnormal.*

(b) *If H is a nilpotent self-normalizing subgroup of G and N is normal in G, then NH/N is nilpotent and self-normalizing in G/N.*

Thus the conjugacy class of nilpotent self-normalizing subgroups is preserved under a homomorphism.

(c) *Every nilpotent self-normalizing subgroup of a soluble group G contains a system normalizer of G.*

This follows from the theorem of P. HALL [1] that every subgroup which can be joined to G by a chain of subgroups, each maximal but not normal in the next, contains a system normalizer. Every abnormal subgroup clearly has this chain property.

The soluble groups whose system normalizers are self-normalizing have been investigated by the author in his paper [2].

6. The nilpotent self-normalizing subgroups satisfy a covering and avoidance theorem similar to that proved for the system normalizers by P. HALL [1]. HALL showed that a system normalizer of a soluble group covers all central chief factors of the group and avoids all eccentric chief factors.

We recall the definitions of covering and avoidance. Let K/L be a *factor* of G; i.e. K, L are subgroups of G and L is a normal subgroup of K. Let X be any subgroup of G. Then $L(K\cap X)$ is a subgroup of G between K and L. X *covers* K/L if $L(K\cap X)=K$ and X *avoids* K/L if $L(K\cap X)=L$.

Let H be a nilpotent self-normalizing subgroup of the soluble group G, and let K/L be a factor of G. K/L is called an *H-factor* if $H \leqq \mathbf{N}(K) \cap \mathbf{N}(L)$. K/L is called an *irreducible H-factor* if, in addition, there is no subgroup M such that $K > M > L$ and $H \leqq \mathbf{N}(M)$. An irreducible H-factor K/L may be considered as a group with operators, the operators being transformations by elements of H. K/L then has the property that no proper subgroup is compatible with the operators. An irreducible H-factor K/L is clearly elementary abelian, since any characteristic subgroup of K/L would be compatible with the operators.

An H-factor K/L is called *central* if $[K, H] \leqq L$; this means that all the operators act trivially on K/L. Otherwise K/L is called *eccentric*.

The nilpotent self-normalizing subgroups H satisfy the following covering and avoidance theorem:

H covers all central irreducible H-factors and avoids all eccentric irreducible H-factors.

Let K/L be any irreducible H-factor. $L(K \cap H)$ is a subgroup of G between K and L, and H is in the normalizer of this subgroup. Therefore $L(K \cap H) = K$ or $L(K \cap H) = L$, since K/L is irreducible. Thus H either covers or avoids K/L.

Suppose H covers K/L. Then $|K \cap H : L \cap H| = |K : L|$. $K \cap H/L \cap H$ is a chief factor of H. For $K \cap H$, $L \cap H$ are normal subgroups of H; but if there were a normal subgroup M of H between $K \cap H$ and $L \cap H$, LM would be a subgroup between K and L which is normalized by H, contradicting the irreducibility of K/L.

Now H is nilpotent, therefore every chief factor of H is central. Hence $[K \cap H, H] \leqq L \cap H$. Let $k \in K$, $h \in H$. Then $k = ml$, where $m \in K \cap H$, $l \in L$. We have

$$[k, h] = [ml, h] = l^{-1} \cdot [m, h] \cdot h^{-1} l h .$$

Now $[m, h] \in L$ and $h^{-1} l h \in L$. Thus $[k, h] \in L$. Hence $[K, H] \leqq L$ and K/L is a central H-factor.

Conversely, suppose H avoids K/L. Then KH, LH are subgroups of G and $|KH : LH| = |K : L|$. Suppose K/L were a central H-factor. Then $[K, H] \leqq L$. Let $l \in L$, $h \in H$, $k \in K$. Then

$$k^{-1} \cdot l h \cdot k = k^{-1} l k \cdot h \cdot [h, k] .$$

Now $k^{-1} l k \in L$ and $[h, k] \in L$. Hence $k^{-1} \cdot l h \cdot k \in LH$. K is in the normalizer of LH. Thus LH is normal in KH. But H is abnormal in G, so we have a contradiction. Therefore K/L is an eccentric H-factor.

References

[1] Hall, P.: On the system normalizers of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 507–528 (1937).

[2] Carter, R. W.: On a class of finite soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) **9**, 623–640 (1959).

Dept. of Math., King's College, Newcastle upon Tyne (England)

(Eingegangen am 20. September 1960)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. 75, 140–153 (1961)

Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe

Herrn HELMUT WIELANDT zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von

BERTRAM HUPPERT*

In einer vorhergehenden Arbeit (HUPPERT [5]) war die Normalstruktur einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit abelscher p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ untersucht worden. Die Ergebnisse wurden zum großen Teil als Aussagen über den Verband $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ der Durchschnitte der subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit der festen p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ ausgedrückt. In der vorliegenden Note werden diese Resultate ausgedehnt auf Gruppen $\mathfrak{G}$ mit einer modularen p-Sylow-Gruppe ($p>2$). Ein Teil der Überlegungen aus [5] läßt sich übertragen, die meisten Beweise erfordern jedoch genauere Betrachtungen als der in [5] vorwiegend behandelte Fall einer abelschen p-Sylow-Gruppe.

In §1 beweisen wir einige Hilfssätze über Automorphismen von regulären p-Gruppen, welche vielleicht unabhängig von den vorliegenden Anwendungen Interesse finden dürften. Der §2 bringt die später benötigten Aussagen über modulare p-Gruppen. In §3 verallgemeinern wir den Hauptsatz von TAUNT [7] über Gruppen mit lauter abelschen Sylow-Gruppen auf Gruppen mit modularen Sylow-Gruppen. Die Verallgemeinerung lautet: Sind die p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ modular für $p>2$ und ist die 2-Sylow-Gruppe abelsch, ist ferner $K_\infty(\mathfrak{G})$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit nilpotenter Faktorgruppe, so gilt $Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$. Ferner zeigen wir in §3: Ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar mit regulärer p-Sylow-Gruppe, so ist die p-Länge von $\mathfrak{G}$ höchstens 2; die p-Länge ist 1, wenn p keine Fermatsche Primzahl ist. In §4 folgt sodann die Übertragung der Hauptergebnisse aus [5]. Wir erwähnen hier nur: $\mathfrak{G}$ habe modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ und es sei $p>2$. Sei $\mathfrak{T}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe. Dann enthält $\mathfrak{T}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Ferner zerfällt $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$ und es gilt $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_s$, wobei die $\mathfrak{P}_i$ isomorph zu p-Sylow-Gruppen von Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ sind. Für metazyklisches, nichtabelsches $\mathfrak{P}$ lassen sich die Ergebnisse noch verschärfen zu einer abschließenden Übersicht über die möglichen Verbände $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.

Wir verwenden durchweg die gleichen Bezeichnungen wie in [5]. Ist $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe, so bezeichnen wir (nach P. HALL [1]) mit $\Omega_i(\mathfrak{P})$ die Untergruppe der Elemente $X\in\mathfrak{P}$ mit $X^{p^i}=E$ und mit $\mathfrak{V}_i(\mathfrak{P})$ die Untergruppe der p^i-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{P}$ (bekanntlich bilden in einer regulären p-Gruppe die Lösungen von $X^{p^i}=E$ und die p^i-ten Potenzen Untergruppen;

*) Ein großer Teil dieser Untersuchung wurde durchgeführt, während der Autor 1958/59 als British Council Scholar in Manchester weilte.

s. P. HALL [1]). Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die von allen Kommutatoren (A, B) mit $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

§ 1. Automorphismen von regulären p-Gruppen

1.1 DEFINITION. *Sei $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ ein bei $\mathfrak{A}$ fester Normalteiler von $\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \rhd \mathfrak{P}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{P}_k = \mathfrak{N}$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{P}$ bis $\mathfrak{N}$ bezüglich des aus den inneren Automorphismen von $\mathfrak{P}$ und aus $\mathfrak{A}$ bestehenden Operatorenbereiches. Dann sind die Faktorgruppen $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}$ charakteristisch einfach, also elementar abelsch; sie werden ferner von $\mathfrak{P}$ zentralisiert. Wir nennen die Gruppen $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}$ die irreduziblen Teile von $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$, die darauf induzierten Darstellungen von $\mathfrak{A}$ die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$. Nach dem Satz von* JORDAN-HÖLDER *für Gruppen mit Operatoren sind die $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}$ und die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$ bis auf die Anordnung und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt* [1]).

1.2. SATZ. *Sei $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe (im Sinne von* P. HALL*) und $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$. Dann hat $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P})$ die gleichen irreduziblen Komponenten.*

BEWEIS. a) Hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p, so ist offenbar nichts zu beweisen. Sei zunächst $\mathfrak{P}$ vom Exponenten p^2. Es sei ferner $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ irreduzibel und $\mathfrak{P} > \mathfrak{N} \geqq \Omega_1(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{N}$. Wir betrachten nun die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$.

Die Abbildung $\overline{X} \to \overline{X}^p$ ist ein $\mathfrak{A}$-Homomorphismus von $\overline{\mathfrak{P}}$ in $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$: Denn aus $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}') \leqq \mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{N}}) = \overline{\mathfrak{E}}$ folgt, daß $\overline{\mathfrak{P}}'$ den Exponenten p hat. Nun ergibt die Regularität

$$(\overline{X}\,\overline{Y})^p \equiv \overline{X}^p \overline{Y}^p \mod \mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}'),$$

also $(\overline{X}\,\overline{Y})^p = \overline{X}^p \overline{Y}^p$. Somit ist die Potenzierung mit p ein Homomorphismus, sodann natürlich auch ein $\mathfrak{A}$-Homomorphismus. Der Kern enthält sicher $\overline{\mathfrak{N}}$. Der Homomorphismus ist nichttrivial: Denn sonst wäre $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$, d. h. für jedes $P \in \mathfrak{P}$ hätten wir $P^p = N^p$ mit einem geeigneten $N \in \mathfrak{N}$. Nach P. HALL folgt in einer regulären p-Gruppe daraus aber $(PN^{-1})^p = E$ (s. [1], S. 77, theorem 4.28), also $PN^{-1} \in \Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{N}$ und dann $P \in \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$ entgegen unserer Annahme. Da der $\mathfrak{A}$-Homomorphismus nicht der triviale Homomorphismus ist, $\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}$ aber ein einfacher $\mathfrak{A}$-Modul ist, haben wir einen Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}$ in $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$. Dieser ist sogar ein Isomorphismus auf $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$: Es gilt nämlich $\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}}) = \overline{\mathfrak{N}}$; denn sicher ist $\overline{\mathfrak{N}} \leqq \Omega_1(\overline{\mathfrak{P}})$, aber $\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}}) \leqq \overline{\mathfrak{N}}$ wurde soeben gezeigt. Da $\overline{\mathfrak{P}}$ regulär ist, erhalten wir

$$|\overline{\mathfrak{P}}| = |\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})| = |\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}})|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})| = |\overline{\mathfrak{N}}|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|,$$

daher $|\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}| = |\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|$.

Wir haben damit einen $\mathfrak{A}$-Isomorphismus von $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$ nachgewiesen. Nun können wir diese Konstruktion wiederholen. Dies ergibt eine $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_0 \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_k = \Omega_1(\mathfrak{P})$ und die $\mathfrak{A}$-Isomorphismen

[1]) Darstellungen auf beliebigen (nicht notwendig abelschen) Gruppen wurden zum ersten Male von WIELANDT in [10] eingeführt.

$\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1} \cong \mathfrak{O}_1(\mathfrak{R}_i)/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{R}_{i+1})$. Die Kette $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{R}_0) \rhd \mathfrak{O}_1(\mathfrak{R}_1) \rhd \cdots \rhd \mathfrak{O}_1(\mathfrak{R}_k) = \mathfrak{E}$ ist daher eine $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe von $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$. Das verbleibende Stück $\Omega_1(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ (beachte, daß $\mathfrak{P}$ den Exponenten p^2 hat!) ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P})$ gemeinsam.

b) Wir zeigen nun, daß für $i \geqq 2$ die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$ auf $\Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))$ und $\Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$ die gleichen sind. Dazu betrachten wir $\mathfrak{P}^* = \Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Offenbar hat $\mathfrak{P}^*$ den Exponenten p^2, ferner ist $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}^*) = \mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Wir behaupten $\Omega_1(\mathfrak{P}^*) = \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$:

Sei $X \in \Omega_i(\mathfrak{P})$, $X^p \in \mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Dann ist $X^p = Y^p$ mit einem geeigneten $Y \in \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})$. Dies ergibt

$$X^{p^{i-1}} = Y^{p^{i-1}} = E,$$

also $X \in \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})$. Wenden wir jetzt a) auf $\mathfrak{P}^*$ an, so erhalten wir den $\mathfrak{A}$-Isomorphismus

$$\Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P})) \cong \mathfrak{P}^*/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}^*) \cong \Omega_1(\mathfrak{P}^*) = \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P})).$$

Dies ist die Behauptung.

1.3. SATZ. *Sei $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe und $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Dann ist die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{A}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ dieselbe wie die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$.*

BEWEIS. Seien $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \rhd \mathfrak{P}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{P}_k = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{R}_0 \rhd \mathfrak{R}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{R}_k = \mathfrak{E}$ $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihen von $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ bzw. $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Erfährt $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}$ den identischen Automorphismus unter $\mathfrak{A}$, so gilt $(N\mathfrak{R}_{i+1})^A = N\mathfrak{R}_{i+1}$ für alle $N \in \mathfrak{R}_i$ und alle $A \in \mathfrak{A}$. Nach WIELANDT ([*10*], Hilfssatz 4.1) gibt es dann ein Element F aus der Fixgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ mit $F\mathfrak{R}_{i+1} = N\mathfrak{R}_{i+1}$. Also ist $\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R}_i)\,\mathfrak{R}_{i+1}$ und somit folgt $|\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}| = |\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R}_i/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R}_{i+1}|$. Bewirkt aber $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}$ nicht den identischen Automorphismus, so gibt es auf $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}$ keinen Fixpunkt von $\mathfrak{A}$ (außer E), also ist $\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{R}_{i+1} \cap \mathfrak{F}$. Nun erhalten wir

$$|\mathfrak{F}| = \prod_i |\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{F}/\mathfrak{R}_{i+1} \cap \mathfrak{F}| = \prod\nolimits^* |\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}|,$$

wobei das Produkt $\prod^*$ nur über diejenigen $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}$ zu erstrecken ist, auf denen $\mathfrak{A}$ den identischen Automorphismus bewirkt. Nach 1.2 ist aber $\prod^* |\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i+1}| = \prod^* |\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}|$ und das rechtsstehende Produkt ist die Ordnung der Fixgruppe von $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ bezüglich $\mathfrak{A}$.

Der folgende Hilfssatz wird später nützlich sein:

1.4. HILFSSATZ. *$\mathfrak{P}$ sei eine reguläre p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$ mit $p \nmid |\mathfrak{S}|$. Ferner sei $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ abelsch und die Ordnung der Gruppe der Fixelemente unter $\mathfrak{S}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ (oder in $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$) sei p^k. Dann hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index p^k.*

BEWEIS. Nach 1.3 ist die Ordnung der Fixuntergruppe $\overline{\mathfrak{F}}$ bezüglich $\mathfrak{S}$ in $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ gleich p^k. Da die Ordnung von $\mathfrak{S}$ zu p teilerfremd ist, können wir nach dem Satz von MASCHKE zu $\overline{\mathfrak{F}}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ ein bei $\mathfrak{S}$ invariantes Komplement

$\overline{\mathfrak{R}}$ finden. Also ist $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{F}} \times \overline{\mathfrak{R}}$. Da $\overline{\mathfrak{F}}$ bei $\mathfrak{S}$ elementweise fest bleibt, folgt $(\mathfrak{S}, \mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{R}$ das Urbild von $\overline{\mathfrak{R}}$ in $\mathfrak{P}$ ist. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{P}$. Nun ist $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{P}\mathfrak{S} = N(\mathfrak{P})$ vom Index p^k. Nach einem Satz von WIELANDT ([8], S. 189, Satz 5) folgt unter Ausnutzung der Regularität von $\mathfrak{P}$ die Existenz eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \cap N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$. Dies ergibt $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}| = |\mathfrak{P}/\mathfrak{R}| = p^k$.

1.5. SATZ. *Die p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ sei metazyklisch (d.h. zyklische Erweiterung einer zyklischen Gruppe), nichtabelsch, ferner $p > 2$. Dann hat $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale p-Faktorgruppe.*

BEWEIS. a) Sei $\mathfrak{S}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ von zu p teilerfremder Ordnung. $\mathfrak{P}$ ist regulär und die Gruppen $\Omega_1(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ sind elementar abelsch vom Typ (p, p). Da $\mathfrak{P}'$ zyklisch ist, ist $\Omega_1(\mathfrak{P}')$ eine bei $\mathfrak{S}$ invariante Untergruppe von $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Somit hat $\mathfrak{S}$ auf $\Omega_1(\mathfrak{P})$ eindimensionale irreduzible Teile $\lambda_1(S)$ und $\lambda_2(S)$. Nach Satz 1.3 gilt dasselbe für $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$, und dort ist $\mathfrak{S}$ nach dem Satz von MASCHKE vollständig reduzibel. Also gibt es Erzeugende X_1 und X_2 von $\mathfrak{P}$ mit $X_i^S \equiv X_i^{\lambda_i(S)} \bmod \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$. Wir betrachten nun $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}')$. Wegen $|\overline{\mathfrak{P}}'| = p$ hat $\overline{\mathfrak{P}}$ die Klasse 2. Dann gilt für alle $\overline{X}, \overline{Y} \in \overline{\mathfrak{P}}$ bekanntlich die Gleichung $(\overline{X}, \overline{Y}^p) = (\overline{X}, \overline{Y})^p = E$; also ist $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}) \leqq Z(\overline{\mathfrak{P}})$. Daher folgt

$$(\overline{X}_1, \overline{X}_2)^S = (\overline{X}_1^{\lambda_1(S)}, \overline{X}_2^{\lambda_2(S)}) = (\overline{X}_1, \overline{X}_2)^{\lambda_1(S)\lambda_2(S)}.$$

Da $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ ganz $\overline{\mathfrak{P}}'$ erzeugt, erfährt $\mathfrak{P}'/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}')$ unter $\mathfrak{S}$ die Darstellung $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$. Nach 1.2 erleidet dann $\Omega_1(\mathfrak{P}')$ die gleiche Darstellung, d.h. $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$ ist ein irreduzibler Teil von $\mathfrak{S}$ auf $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Daher ist $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$ gleich $\lambda_1(S)$ oder gleich $\lambda_2(S)$ (für alle $S \in \mathfrak{S}$) also ist $\lambda_1(S) \equiv 1$ oder $\lambda_2(S) \equiv 1$. Somit hat $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ mindestens p Fixpunkte.

b) Die Behauptung folgt nun sofort aus Hilfssatz 1.4, wenn für $\mathfrak{S}$ ein p-Komplement von $N(\mathfrak{P})$ genommen wird.

§ 2. Modulare p-Gruppen

2.1. DEFINITION. *Die p-Gruppe $\mathfrak{P}$ heißt modular, wenn der Verband $V(\mathfrak{P})$ aller Untergruppen von $\mathfrak{P}$ ein modularer Verband ist, d.h. wenn aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in V(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$ stets folgt $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \cap \mathfrak{C} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \rangle$.*

2.2. SATZ[2]). *Eine p-Gruppe ist genau dann modular, wenn je zwei Untergruppen als Ganzes vertauschbar sind. (Die Modularität überträgt sich also nicht nur auf Untergruppen, sondern auch auf Faktorgruppen.)*

BEWEIS. a) Seien alle Untergruppen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Ist $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$, so gilt dann $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \rangle$ und dies ist die modulare Identität.

b) Ist umgekehrt $V(\mathfrak{P})$ modular, so erfüllt es bekanntlich die Dedekind-Bedingung. Der Verband $V(\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle : \mathfrak{A})$ der Untergruppen $\mathfrak{U}$ mit $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \geqq \mathfrak{U} \geqq \mathfrak{A}$ und der Verband $V(\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ der Untergruppen $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sind dann isomorph, haben daher die gleiche Länge. Da es sich aber um eine

[2]) Siehe IWASAWA [6], S. 175.

p-Gruppe handelt, wo jede maximale Untergruppe den Index p hat, folgt jetzt $|\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle : \mathfrak{A}| = |\mathfrak{B} : \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}|$ und daraus $|\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle| = \frac{|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{B}|}{|\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}|} = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$. Also ist $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind vertauschbar.

Für uns ist die folgende Charakterisierung nützlich:

2.3. SATZ. *Sei $p \neq 2$. Genau dann ist die p-Gruppe $\mathfrak{P}$ modular, wenn für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U}) \geqq \mathfrak{U}'$. (Für $p=2$ ist bekanntlich immer $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U}) \geqq \mathfrak{U}'$).*

BEWEIS. a) Sei $\mathfrak{P}$ modular, seien X und Y Elemente aus $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{P}$. Nach 2.2 gilt $\langle X\rangle\langle Y\rangle = \langle X, Y\rangle$. In einem Produkt $\mathfrak{B} = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ von zwei zyklischen p-Gruppen gilt aber stets die Relation $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{B}) \geqq \mathfrak{B}'$: Denn nach dem Burnsideschen Basissatz ist $|\mathfrak{B}/\Phi(\mathfrak{B})| \leqq p^2$ (s. ZASSENHAUS [*11*], S. 105). Andererseits erhält man sofort $|\langle X^p\rangle\langle Y^p\rangle| = |\mathfrak{B}|/p^2$; also ist $\Phi(\mathfrak{B}) = \langle X^p\rangle\langle Y^p\rangle = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{B}) \geqq \mathfrak{B}'$. Da X und Y beliebige Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, ergibt sich jetzt $(X, Y) \in \mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{B}) \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$, also $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$.

b) Sei nun $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$ für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$. Seien X und Y aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U} = \langle X, Y\rangle$. Nach unserer Annahme ist $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$, also $|\mathfrak{U}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})| = |\mathfrak{U}/\Phi(\mathfrak{U})| \leqq p^2$. Wegen $p > 2$ ist dann $\mathfrak{U}$ regulär mit höchstens 2 Invarianten, dann aber $\mathfrak{U} = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ (s. HUPPERT [*4*], S. 247). Somit sind alle zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar, dann aber auch alle Untergruppen.

2.4. HILFSSATZ. a) *Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist regulär im Sinne von* P. HALL.

b) *Ist $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe und $p > 2$, so ist die Abbildung von $X \in \Omega_i(\mathfrak{P})$ auf $X^{p^{i-1}}$ ein Homomorphismus in $Z(\Omega_i(\mathfrak{P}))$.*

BEWEIS. a) Es ist $\langle X, Y\rangle = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ und jedes Produkt von zwei zyklischen p-Gruppen ist für $p > 2$ regulär (s. HUPPERT [*4*], S. 247).

b) Die Hallschen Relationen für reguläre p-Gruppen liefern uns nun

$$(\Omega_i(\mathfrak{P}), \mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P}))) = \mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P})') \leqq \mathfrak{O}_{i-1}(\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))) = \mathfrak{O}_i(\Omega_i(\mathfrak{P})) = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P})) \leqq Z(\Omega_i(\mathfrak{P})).$$

Die Regularität ergibt ferner

$$(XY)^{p^{i-1}} = X^{p^{i-1}} Y^{p^{i-1}} \prod C_j^{p^{i-1}}$$

mit $C_j \in \Omega_i(\mathfrak{P})' \leqq \mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))$, also $C_j^{p^{i-1}} \in \mathfrak{O}_i(\Omega_i(\mathfrak{P})) = \mathfrak{E}$. Also bleibt nur

$$(XY)^{p^{i-1}} = X^{p^{i-1}} Y^{p^{i-1}}$$

und die Abbildung von X auf $X^{p^{i-1}}$ ist ein Homomorphismus.

Wichtig für unsere späteren Untersuchungen ist, daß eine modulare p-Gruppe ein großes Zentrum besitzt; es gilt nämlich:

2.5. SATZ. *Ist $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe mit $p > 2$, so gilt*

$$|Z(\mathfrak{P}) \cap \Omega_1(\mathfrak{P})| \geqq p^{\omega_1 - 1};$$

dabei ist ω_1 die Anzahl der Basiselemente von $\mathfrak{P}$, also $|\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1}$.

BEWEIS. a) Seien $A_1, \ldots, A_s, A_{s+1}, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{P}$ mit Ordnung $A_i = p^{\mu_i} = p^{\mu}$ für $1 \leqq i \leqq s$, Ordnung $A_j \leqq$ Ordnung $A_{s+1} = p^{\mu_2} < p^{\mu}$ für $j > s$ (s. P. HALL [1], S. 90, theorem 4.51). Sei $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$ und $1 \leqq i \leqq s$. Dann ist $\langle A_i, X\rangle = \langle A_i\rangle\langle X\rangle$, also ist $\langle A_i\rangle$ ein Normalteiler von $\langle A_i, X\rangle$. Wegen $X^p = E$ liefert uns dies

$$A_i^X = A_i^{1+\lambda_i(X)p^{\mu-1}}.$$

Wir zeigen nun, daß alle $\lambda_i(X)$ mit $1 \leqq i \leqq s$ (bei festem X) übereinstimmen:

$$(A_i A_j)^X = A_i^X A_j^X = A_i^{1+\lambda_i(X)p^{\mu-1}} A_j^{1+\lambda_j(X)p^{\mu-1}} = (A_i A_j)^{1+\varrho(X)p^{\mu-1}}$$

(denn auch $A_i A_j$ hat die Ordnung p^{μ} und wird von X in eine Potenz von sich transformiert).

$$\left.\begin{aligned} &= A_i A_j (A_i A_j)^{\varrho(X)p^{\mu-1}} \\ &= A_i A_j (A_i^{p^{\mu-1}} A_j^{p^{\mu-1}})^{\varrho(X)} \\ &= A_i A_j A_i^{\varrho(X)p^{\mu-1}} A_j^{\varrho(X)p^{\mu-1}} \\ &= A_i^{1+\varrho(X)p^{\mu-1}} A_j^{1+\varrho(X)p^{\mu-1}}. \end{aligned}\right\} \text{(nach 2.4)}$$

Da die A_i Basiselemente sind, ist der Vergleich der Exponenten erlaubt und liefert $\lambda_i(X) \equiv \varrho(X) \equiv \lambda_j(X) \bmod p$. Also erhalten wir $A_i^X = A_i^{1+\lambda(X)p^{\mu-1}}$ für alle $1 \leqq i \leqq s$ und alle $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$.

b) Wir betrachten nun $\Omega_{\mu_2}(\mathfrak{P})$ mit der Basis

$$A_1^{p^{\mu-\mu_2}}, \ldots, A_s^{p^{\mu-\mu_2}}, A_{s+1}, \ldots.$$

Wenden wir a) auf $\Omega_{\mu_2}(\mathfrak{P})$ an, so erhalten wir

$$A_{s+1}^X = A_{s+1}^{1+\tau(X)p^{\mu_2-1}} \quad \text{und} \quad (A_1^{p^{\mu-\mu_2}})^X = (A_1^{p^{\mu-\mu_2}})^{1+\tau(X)p^{\mu_2-1}}.$$

Andererseits ist $A_1^{p^{\mu-\mu_2}} \in \mathfrak{V}_1(\mathfrak{P})$, wird also von $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$ zentralisiert (s. P. HALL [1], S. 88, theorem 4.461). Daher ist $\tau(X) \equiv 0(p)$, somit $A_{s+1}^X = A_{s+1}$. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen und ergibt schließlich $\Omega_{\mu-1}(\mathfrak{P}) \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P}))$. Also haben wir dann $A_i^X = A_i^{1+\lambda(X)p^{\mu-1}}$ für alle Basiselemente A_i von $\mathfrak{P}$.

c) Offenbar ist die Abbildung $X \to \lambda(X)$ ein Homomorphismus von $\Omega_1(\mathfrak{P})$ in die additive Gruppe des Körpers $GF(p)$. Der Kern dieses Homomorphismus ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})$. Also folgt $|\Omega_1(\mathfrak{P})/\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| \leqq p$, was zu zeigen war.

Die Struktur der modularen p-Gruppen (und überhaupt aller endlichen Gruppen mit modularem Untergruppenverband) wurde von IWASAWA bestimmt (IWASAWA [6], S. 187ff.). Da sich aber in dem Iwasawaschen Beweis eine Lücke befindet[3]), wollen wir hier die Iwasawaschen Resultate nicht verwenden. Satz 2.5 wird für die beabsichtigten Untersuchungen ausreichen. Wir geben noch eine einfache Folgerung aus Satz 2.5 an:

2.6. SATZ. *Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist metabelsch. Schärfer: Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist isomorph zu einer Untergruppe eines direkten Produktes von metazyklischen Gruppen.*

BEWEIS. Durch Induktion nach $|\mathfrak{P}|$.

Ist $\omega_1(\mathfrak{P}) = 2$, so ist $\mathfrak{P}$ metazyklisch (HUPPERT [4], S. 247). Sei also $|\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1(\mathfrak{P})} \geqq p^3$. Nach Satz 2.5 ist dann $|\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| \geqq p^2$. Also gibt

[3]) Auf S. 197, letzter Abschnitt.

es Untergruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ von $Z(\mathfrak{P})$ mit $|\mathfrak{N}|=|\mathfrak{M}|=p$ und $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$. Unsere Induktionsannahme sagt nun, daß $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{M}$ isomorph sind zu Untergruppen von direkten Produkten von metazyklischen p-Gruppen. Daher trifft dies auch für $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{P}/\mathfrak{N}\times\mathfrak{P}/\mathfrak{M}$ zu

§ 3. Auflösbare Gruppen mit modularen Sylow-Gruppen

Hat $\mathfrak{G}$ eine abelsche p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$, so gilt bekanntlich $\mathfrak{G}'\cap Z(\mathfrak{G})\hat{\ }\mathfrak{P}=\mathfrak{E}$ (s. TAUNT [7], dort mit der für den Beweis nicht wesentlichen Einschränkung, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist; ein einfacher Beweis in HUPPERT [5]). Wir wollen diesen Satz verallgemeinern auf den Fall, daß $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe mit $p>2$ ist. Der einfache Beweis (HUPPERT [5]) scheint dies nicht zu leisten. Aber der Tauntsche Beweis benötigt nur geringe Abänderungen.

3.1. DEFINITION. *$K_\infty(\mathfrak{G})$ sei der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit nilpotenter Faktorgruppe. Also ist $K_\infty(\mathfrak{G})$ der Durchschnitt aller Glieder der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; dies ist eine duale Bildung zum Hyperzentrum $Z_\infty(\mathfrak{G})$, man könnte also $K_\infty(\mathfrak{G})$ den Hyperkommutator von $\mathfrak{G}$ nennen.*

3.2. SATZ. *Hat $\mathfrak{G}$ eine modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ mit $p>2$, so gilt $\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung, also $\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})\neq\mathfrak{E}$. Dann gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{R}|=p$ und $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$. Dann gilt unser Satz für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Das ergibt $\mathfrak{E}<\mathfrak{N}\mathfrak{R}/\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{P}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap Z(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\cap K_\infty(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{E}$, also ein Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{R}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

b) Sei $\mathfrak{M}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach a) haben wir dann $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{M}\lhd\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$. Nun ist $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{Q}\cap Z(\mathfrak{M})$, also wegen $\mathfrak{Q}\cap Z(\mathfrak{M})\cap K_\infty(\mathfrak{M})=\mathfrak{E}$ sicher $\mathfrak{R}\nleqq K_\infty(\mathfrak{M})$. Da $K_\infty(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{G}$ normal ist und $\mathfrak{R}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, erhalten wir $K_\infty(\mathfrak{M})=\mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist nilpotent. Dann ist notwendig $\mathfrak{M}$ eine p-Gruppe. Hat $\mathfrak{G}$ mehr als einen maximalen Normalteiler, so ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}$ und der Satz wird wegen $K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$ trivial. Also ist $\mathfrak{M}$ einziger maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

c) Angenommen, es sei $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})<\mathfrak{G}$. Dann haben wir $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{P}\cap Z\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)$ und $\mathfrak{P}\cap Z\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)\cap K_\infty\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)=\mathfrak{E}$, also $\mathfrak{R}\nleqq K_\infty\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)$. Somit ist p ein Teiler von $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})/N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})'$, d.h. $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})$ besitzt nichttriviale p-Faktorgruppen. Da $\mathfrak{P}$ regulär ist, hat dann auch $\mathfrak{G}$ selbst eine nichttriviale p-Faktorgruppe (WIELANDT [8], S. 189, Satz 5). Da $\mathfrak{M}$ einziger maximaler Normalteiler ist, liefert dies $|\mathfrak{G}/\mathfrak{M}|=p$, daher $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}$ und wir sind fertig. Also ist $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})=\mathfrak{G}$, somit $\mathfrak{M}=\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{G}$.

d) Sei $\mathfrak{L}=Z(\mathfrak{P})\cap\Omega_1(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{L}\lhd\mathfrak{G}$. Dabei wird $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ zentralisiert, erfährt also unter $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von zu p teilerfremder Ordnung. Ist $|\mathfrak{L}|>p$, so erhalten wir nach dem Satz von MASCHKE $\mathfrak{L}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{T}\lhd\mathfrak{G}$, entgegen der Feststellung in a), daß $\mathfrak{R}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also haben wir $|\mathfrak{L}|=p$, woraus mit Satz 2.5 folgt, daß $|\Omega_1(\mathfrak{P})|\leqq p^2$ gilt. Mithin ist $\mathfrak{P}$ zyklisch oder metazyklisch.

e) Sei $\mathfrak{P}$ metazyklisch. Wegen $|\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| = p$ ist dann $\mathfrak{P}$ nichtabelsch. Nach Satz 1.5 hat daher $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale p-Faktorgruppe, entgegen der Feststellung in c), daß $\mathfrak{P}$ einziger maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also ist $\mathfrak{P}$ zyklisch. Dann bewirkt ein p-Komplement $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ (welches nach dem Satz von SCHUR-ZASSENHAUS existiert) wegen $\mathfrak{N} \leqq Z(\mathfrak{G})$ die triviale Automorphismengruppe auf $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{G})$. Dann zentralisiert $\mathfrak{S}$ aber ganz $\mathfrak{P}$, so daß wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}$ erhalten, woraus $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ folgt. Nun ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}$ und der Satz ist bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3.2 lassen sich große Teile der Tauntschen Theorie der A-Gruppen ohne Schwierigkeit auf Gruppen mit modularen p-Sylow-Gruppen ausdehnen. Wir erwähnen:

3.3. SATZ. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Die Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ seien modular für $p > 2$, abelsch für $p = 2$. Ist $\mathfrak{D}$ ein Systemnormalisator von $\mathfrak{G}$* (s. P. HALL [2]), *so gilt $\mathfrak{G} = K_\infty(\mathfrak{G})\,\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D} \cap K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$.*

BEWEIS. $\mathfrak{G}/K_\infty(\mathfrak{G})$ enthält nur zentrale Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$, wird also von $\mathfrak{D}$ gedeckt, d. h. es ist $\mathfrak{G} = K_\infty(\mathfrak{G})\,\mathfrak{D}$. Aber $K_\infty(\mathfrak{G})$ enthält nach Satz 3.2 keinen zentralen Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$, wird daher von $\mathfrak{D}$ gemieden, was $K_\infty(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ ergibt. (Für die Deck-Meide-Eigenschaften von $\mathfrak{D}$ s. P. HALL [2], theorem 6.1 und 7.1.)

3.4. SATZ. *Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und sind die p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ modular für $p > 2$, abelsch für $p = 2$, so läßt sich jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 auf monomiale Gestalt bringen.*

BEWEIS. Zum Beweis genügt bekanntlich der Nachweis eines abelschen Normalteilers, der nicht im Zentrum liegt (und der Hinweis darauf, daß sich die Voraussetzung auf Untergruppen vererbt). Ist $K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{G}$ nilpotent und jeder Normalteiler, der zyklische Erweiterung des Zentrums ist, erfüllt unsere Bedingung. Ist aber $K_\infty(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{E}$, so wählen wir einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ in $K_\infty(\mathfrak{G})$. Da nun die Voraussetzungen von 3.2 für alle $p > 2$ erfüllt sind und für $p = 2$ sogar $\mathfrak{P} \cap Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$ gilt, haben wir $Z(\mathfrak{G}) \cap K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$. Also liegt $\mathfrak{N}$ nicht in $Z(\mathfrak{G})$.

Die Einschränkung, daß die 2-Sylow-Gruppe abelsch und nicht nur modular ist, ist in den bisherigen Sätzen notwendig; diese zeigt die Erweiterung der Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einem Automorphismus der Ordnung 3.

Für die Untersuchung des folgenden Paragraphen ist eine Aussage über die p-Länge einer p-auflösbaren Gruppe mit modularer p-Sylow-Gruppe wichtig. Wir beweisen etwas mehr, als für die Anwendungen benötigt wird, nämlich:

3.5. SATZ. *Sei $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, $\mathfrak{P}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$.*

a) *Läßt sich keine Untergruppe von $\mathfrak{P}$ homomorph auf die p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 abbilden und ist p keine Fermatsche Primzahl, so hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1* [4]).

[4]) Eine allgemeinere Vermutung wird in [3] auf S. 8 erwähnt.

b) *Ist* $\mathfrak{P}$ *regulär, so hat* $\mathfrak{G}$ *höchstens die* p*-Länge* 2.

c) *Ist* $\mathfrak{P}$ *modular und* $p>2$, *so hat* $\mathfrak{G}$ *die* p*-Länge* 1.

VORBEMERKUNGEN. (1) Jede reguläre p-Gruppe erfüllt die Voraussetzung von a); denn einerseits vererbt sich Regularität auf Untergruppen und Faktorgruppen andererseits ist die p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 irregulär. Aus a) folgt also: Ist $\mathfrak{P}$ regulär und p keine Fermatsche Primzahl, so hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1. Somit ist b) nur für Fermat-Zahlen p von Interesse.

(2) Ist $\mathfrak{P}$ modular und $p>2$, so ist $\mathfrak{P}$ regulär. Falls also p keine Fermat-Zahl ist, folgt c) schon aus a).

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Unsere Voraussetzungen übertragen sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Also haben alle eigentlichen Untergruppen und alle eigentlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1 (bzw. $\leqq 2$). Ferner ist $\mathfrak{G}$ p-reduziert, d.h. es hat keine nichttrivialen Normalteiler oder Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung. Wir beweisen nun nacheinander:

(1) $$\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}:$$

Angenommen, es sei $\Phi(\mathfrak{G})>\mathfrak{E}$. Sei $\mathfrak{N}$ ein in $\Phi(\mathfrak{G})$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, ist $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe. Da $\mathfrak{G}$ ein minimales Gegenbeispiel ist, haben wir $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ im Falle a) oder c) und $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leqq 2$ im Falle b). Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Nach dem Satz von ZASSENHAUS-SCHUR gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$; wegen der Auflösbarkeit von $\mathfrak{N}$ sind alle diese Gruppen $\mathfrak{S}$ konjugiert in $\mathfrak{M}$ (s. ZASSENHAUS [*11*], S. 125). Dies ergibt $\mathfrak{G}=\mathfrak{M}N(\mathfrak{S})=\mathfrak{N}N(\mathfrak{S})$ und dann wegen $\mathfrak{N}\leqq\Phi(\mathfrak{G})$ sogar $\mathfrak{G}=N(\mathfrak{S})$. Also ist $\mathfrak{S}\lhd\mathfrak{G}$, wegen der p-Reduziertheit von $\mathfrak{G}$ dann $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G})=l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ bzw. $\leqq 2$,entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also ist $\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$.

(2) *Der maximale* p*-nilpotente Normalteiler* $\mathfrak{Q}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist eine elementar abelsche* p*-Gruppe:*

Da $\mathfrak{G}$ keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung besitzt, ist $\mathfrak{Q}$ sicher eine p-Gruppe. Ferner ist $\Phi(\mathfrak{Q})\leqq\Phi(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{Q}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Mit (1) ergibt dies $\Phi(\mathfrak{Q})=\mathfrak{E}$, also die Behauptung.

(3) $\mathfrak{Q}$ *ist einziger minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$:

Angenommen es sei $\mathfrak{E}<\mathfrak{R}<\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R})=1$ bzw. $\leqq 2$. Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) gilt $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}N(\mathfrak{S})$. Ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$, so folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R})=l_p(\mathfrak{G})=1$ bzw. $\leqq 2$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also gilt sicher $\mathfrak{S}\neq\mathfrak{E}$, daher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{R}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Nun haben wir $\mathfrak{Q}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=N(\mathfrak{S})\cap\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{L}\lhd N(\mathfrak{S})$ und dann $\mathfrak{E}<\mathfrak{L}\lhd\mathfrak{G}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})=1$ bzw. $\leqq 2$. Dies liefert nun

$$l_p(\mathfrak{G})=l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R}\cap\mathfrak{L})=\mathrm{Max}\{l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R}),\ l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})\}=1 \quad \text{bzw.} \quad \leqq 2,$$

denn $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\times\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$. Dies widerspricht der Wahl von $\mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{Q}$ doch minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die letzte Schlußweise zeigt auch gleichzeitig, daß $\mathfrak{Q}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

(4) *Im Falle* a) *oder* c) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})=1$:

Sei $\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Q}\leqq\mathfrak{N}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{N})=1$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, gilt $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|=p$ und $\mathfrak{N}$ hat keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung. Letzteres liefert $\mathfrak{N}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Q}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{N}$ und einem $\mathfrak{S}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) erhalten wir wieder $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ und wegen der p-Reduziertheit ist sicher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{Q}\nleqq N(\mathfrak{S})$. Da $\mathfrak{Q}$ nach (3) minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also gibt es ein Element $P\in N(\mathfrak{S})$ mit $P^p=E$ derart, daß $\mathfrak{Q}\langle P\rangle$ eine p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ ist. Im Falle c) ist nun $\Omega_1(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P}$ abelsch. Dann folgt $l_p(\mathfrak{G})=1$ aus den Sätzen von HALL-HIGMAN ([3], S. 7).

Im Falle a) betrachten wir den von P auf $\mathfrak{Q}$ bewirkten Automorphismus. Angenommen, es trete ein unzerlegbarer Teil $Q_1,\ldots,Q_d$ der Dimension $d\geqq p$ auf. Wir können die Elemente Q_i von $\mathfrak{Q}$ so wählen, daß gilt

$$Q_1^P=Q_1,\qquad Q_i^P=Q_iQ_{i-1}\quad\text{für}\quad 2\leqq i\leqq d$$

(Jordansche Normalform für P!). Nun ist $\langle Q_1,\ldots,Q_p,P\rangle$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$, welche zur p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 isomorph ist. Dies ist aber im Falle a) ausgeschlossen.

Somit haben alle unzerlegbaren Teile von P höchstens die Dimension $p-1$, d.h. das Minimalpolynom von P ist ein Teiler von

$$(x-1)^{p-1}=\frac{(x-1)^p}{(x-1)}=\frac{x^p-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{p-1}.$$

Mithin ist $E+P+\cdots+P^{p-1}$ auf $\mathfrak{Q}$ der Nulloperator, und dies gilt ebenso für jede Potenz P^i von P. Nun haben wir für alle $Q\in\mathfrak{Q}$

$$(Q\,P^{-i})^p=Q^{E+P^i+\cdots+P^{i(p-1)}}=E.$$

Also hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p. Da p keine Fermatsche Primzahl ist, folgt nach HALL-HIGMAN $l_p(\mathfrak{G})=1$ ([3], S. 2);

(5) *Im Falle* b) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$:

Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ von zu p teilerfremder Ordnung, so folgt wie früher $\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also haben wir $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}\cap N(\mathfrak{S})$. Nach P. HALL sind in einer regulären p-Gruppe p-te Potenzen und Elemente der Ordnung p stets vertauschbar ([1], S. 88). Daher liegt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})=\{P^p\mid P\in\mathfrak{P}\}$ im Zentralisator $C(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$ folgt $C(\mathfrak{Q})=\mathfrak{Q}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=C(\mathfrak{Q})\cap N(\mathfrak{S})$. Dabei ist $\mathfrak{L}$ invariant unter $\mathfrak{Q}$ und $N(\mathfrak{S})$, also auch unter $\mathfrak{G}$. Nun liefert (3) die Aussage $\mathfrak{L}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{Q}$, insbesondere $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})\leqq\mathfrak{U}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$. Mithin wird $\mathfrak{P}$ erzeugt von den beiden Untergruppen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{U}$ vom Exponenten p. Wegen der Regularität hat dann $\mathfrak{P}$ selbst den Exponenten p und nach HALL-HIGMAN folgt $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$ ([3], S. 2). Diese Schranke ist übrigens scharf, sie wird schon bei p-Gruppen vom Exponenten p angenommen.

b) *Ist* $\mathfrak{P}$ *regulär, so hat* $\mathfrak{G}$ *höchstens die* p*-Länge* 2.

c) *Ist* $\mathfrak{P}$ *modular und* $p>2$, *so hat* $\mathfrak{G}$ *die* p*-Länge* 1.

VORBEMERKUNGEN. (1) Jede reguläre p-Gruppe erfüllt die Voraussetzung von a); denn einerseits vererbt sich Regularität auf Untergruppen und Faktorgruppen andererseits ist die p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 irregulär. Aus a) folgt also: Ist $\mathfrak{P}$ regulär und p keine Fermatsche Primzahl, so hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1. Somit ist b) nur für Fermat-Zahlen p von Interesse.

(2) Ist $\mathfrak{P}$ modular und $p>2$, so ist $\mathfrak{P}$ regulär. Falls also p keine Fermat-Zahl ist, folgt c) schon aus a).

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Unsere Voraussetzungen übertragen sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Also haben alle eigentlichen Untergruppen und alle eigentlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1 (bzw. $\leqq 2$). Ferner ist $\mathfrak{G}$ p-reduziert, d.h. es hat keine nichttrivialen Normalteiler oder Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung. Wir beweisen nun nacheinander:

(1) $$\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}:$$

Angenommen, es sei $\Phi(\mathfrak{G}) > \mathfrak{E}$. Sei $\mathfrak{N}$ ein in $\Phi(\mathfrak{G})$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, ist $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe. Da $\mathfrak{G}$ ein minimales Gegenbeispiel ist, haben wir $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ im Falle a) oder c) und $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leqq 2$ im Falle b). Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Nach dem Satz von ZASSENHAUS-SCHUR gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$; wegen der Auflösbarkeit von $\mathfrak{N}$ sind alle diese Gruppen $\mathfrak{S}$ konjugiert in $\mathfrak{M}$ (s. ZASSENHAUS [*11*], S. 125). Dies ergibt $\mathfrak{G}=\mathfrak{M}N(\mathfrak{S})=\mathfrak{N}N(\mathfrak{S})$ und dann wegen $\mathfrak{N}\leqq\Phi(\mathfrak{G})$ sogar $\mathfrak{G}=N(\mathfrak{S})$. Also ist $\mathfrak{S}\lhd\mathfrak{G}$, wegen der p-Reduziertheit von $\mathfrak{G}$ dann $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G})=l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ bzw. $\leqq 2$,entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also ist $\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$.

(2) *Der maximale* p*-nilpotente Normalteiler* $\mathfrak{Q}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist eine elementar abelsche* p*-Gruppe:*

Da $\mathfrak{G}$ keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung besitzt, ist $\mathfrak{Q}$ sicher eine p-Gruppe. Ferner ist $\Phi(\mathfrak{Q})\leqq\Phi(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{Q}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Mit (1) ergibt dies $\Phi(\mathfrak{Q})=\mathfrak{E}$, also die Behauptung.

(3) $\mathfrak{Q}$ *ist einziger minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$:

Angenommen es sei $\mathfrak{E}<\mathfrak{R}<\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R})=1$ bzw. $\leqq 2$. Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) gilt $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}N(\mathfrak{S})$. Ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$, so folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R})=l_p(\mathfrak{G})=1$ bzw. $\leqq 2$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also gilt sicher $\mathfrak{S}\neq\mathfrak{E}$, daher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{R}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Nun haben wir $\mathfrak{Q}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=N(\mathfrak{S})\cap\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{L}\lhd N(\mathfrak{S})$ und dann $\mathfrak{E}<\mathfrak{L}\lhd\mathfrak{G}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})=1$ bzw. $\leqq 2$. Dies liefert nun

$$l_p(\mathfrak{G}) = l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R}\cap\mathfrak{L}) = \operatorname{Max}\{l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{R}),\ l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})\} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \leqq 2,$$

denn $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\times\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$. Dies widerspricht der Wahl von $\mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{Q}$ doch minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die letzte Schlußweise zeigt auch gleichzeitig, daß $\mathfrak{Q}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

(4) *Im Falle* a) *oder* c) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})=1$:

Sei $\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Q}\leqq\mathfrak{N}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{N})=1$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, gilt $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|=p$ und $\mathfrak{N}$ hat keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung. Letzteres liefert $\mathfrak{N}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Q}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{N}$ und einem $\mathfrak{S}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) erhalten wir wieder $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ und wegen der p-Reduziertheit ist sicher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{Q}\nleqq N(\mathfrak{S})$. Da $\mathfrak{Q}$ nach (3) minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also gibt es ein Element $P\in N(\mathfrak{S})$ mit $P^p=E$ derart, daß $\mathfrak{Q}\langle P\rangle$ eine p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ ist. Im Falle c) ist nun $\Omega_1(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P}$ abelsch. Dann folgt $l_p(\mathfrak{G})=1$ aus den Sätzen von HALL-HIGMAN ([3], S. 7).

Im Falle a) betrachten wir den von P auf $\mathfrak{Q}$ bewirkten Automorphismus. Angenommen, es trete ein unzerlegbarer Teil $Q_1,\ldots,Q_d$ der Dimension $d\geqq p$ auf. Wir können die Elemente Q_i von $\mathfrak{Q}$ so wählen, daß gilt

$$Q_1^P=Q_1,\quad Q_i^P=Q_iQ_{i-1}\quad\text{für}\quad 2\leqq i\leqq d$$

(Jordansche Normalform für P!). Nun ist $\langle Q_1,\ldots,Q_p,P\rangle$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$, welche zur p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 isomorph ist. Dies ist aber im Falle a) ausgeschlossen.

Somit haben alle unzerlegbaren Teile von P höchstens die Dimension $p-1$, d. h. das Minimalpolynom von P ist ein Teiler von

$$(x-1)^{p-1}=\frac{(x-1)^p}{(x-1)}=\frac{x^p-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{p-1}.$$

Mithin ist $E+P+\cdots+P^{p-1}$ auf $\mathfrak{Q}$ der Nulloperator, und dies gilt ebenso für jede Potenz P^i von P. Nun haben wir für alle $Q\in\mathfrak{Q}$

$$(Q\,P^{-i})^p=Q^{E+P^i+\cdots+P^{i(p-1)}}=E.$$

Also hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p. Da p keine Fermatsche Primzahl ist, folgt nach HALL-HIGMAN $l_p(\mathfrak{G})=1$ ([3], S. 2);

(5) *Im Falle* b) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$:

Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ von zu p teilerfremder Ordnung, so folgt wie früher $\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also haben wir $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}\cap N(\mathfrak{S})$. Nach P. HALL sind in einer regulären p-Gruppe p-te Potenzen und Elemente der Ordnung p stets vertauschbar ([1], S. 88). Daher liegt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})=\{P^p\,|\,P\in\mathfrak{P}\}$ im Zentralisator $C(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$ folgt $C(\mathfrak{Q})=\mathfrak{Q}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=C(\mathfrak{Q})\cap N(\mathfrak{S})$. Dabei ist $\mathfrak{L}$ invariant unter $\mathfrak{Q}$ und $N(\mathfrak{S})$, also auch unter $\mathfrak{G}$. Nun liefert (3) die Aussage $\mathfrak{L}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{Q}$, insbesondere $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})\leqq\mathfrak{U}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$. Mithin wird $\mathfrak{P}$ erzeugt von den beiden Untergruppen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{U}$ vom Exponenten p. Wegen der Regularität hat dann $\mathfrak{P}$ selbst den Exponenten p und nach HALL-HIGMAN folgt $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$ ([3], S. 2). Diese Schranke ist übrigens scharf, sie wird schon bei p-Gruppen vom Exponenten p angenommen.

§ 4. Normalstruktur von Gruppen mit einer modularen p-Sylow-Gruppe

$\mathfrak{G}$ habe modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ und es sei $p>2$. Wir wollen die Ergebnisse, welche in [5] für den Fall einer abelschen p-Sylow-Gruppe gewonnen wurden, auf diesen Fall ausdehnen. Die Grundlage dafür ist:

4.1. HILFSSATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$. Es sei $p>2$ und $\Omega_1(\mathfrak{P})\trianglelefteq\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Die Voraussetzung besagt $\Omega_1(\mathfrak{P})=\Omega_1(\mathfrak{P})^G=\Omega_1(\mathfrak{P}^G)$ für alle $G\in\mathfrak{G}$, d.h. die Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{G}$ bilden eine Untergruppe. Dies überträgt sich offenbar auf alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$, also ist jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ p-auflösbar. Ferner ist $\mathfrak{G}$ p-reduziert. Wir zeigen nacheinander:

(1) *$\mathfrak{G}/\Omega_1(\mathfrak{P})$ ist eine einfache nichtabelsche Gruppe von durch p teilbarer Ordnung:*

Sei $\Omega_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ p-auflösbar, also hat $\mathfrak{N}$ nach Satz 3.5 c) die p-Länge 1. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, hat $\mathfrak{N}$ keinen nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung. Also ist $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\lhd\mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ einfach und nicht p-auflösbar, also ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nichtabelsch von durch p teilbarer Ordnung.

Da $\Omega_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{Q}$ gilt, hat $\mathfrak{Q}$ ebenso viele Invarianten wie $\mathfrak{P}$. Daher ist $|\mathfrak{Q}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})|=p^{\omega_1}$, also $\mathfrak{Q}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})=\Omega_1\big(\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})\big)\lhd\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$ sind also alle Voraussetzungen erfüllt, aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$ ist wegen $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})\leqq\mathfrak{N}$ nicht p-auflösbar. Somit erhalten wir $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})=\mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{Q}=\Omega_1(\mathfrak{P})$.

Angenommen $\mathfrak{N}$ ist nicht Untergruppe der Frattini-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine eigentliche Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{V}$. Nun sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{V}$ p-auflösbar, somit auch $\mathfrak{G}$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$. Also bleibt $\mathfrak{N}\leqq\Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{N}$ ist nilpotent. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, folgt nun $\mathfrak{N}=\mathfrak{Q}=\Omega_1(\mathfrak{P})$.

(2) *$\Omega_1(\mathfrak{P})$ ist eigener Zentralisator in $\mathfrak{G}$:*

Aus $\Omega_1(\mathfrak{P})\leqq C\big(\Omega_1(\mathfrak{P})\big)\trianglelefteq\mathfrak{G}$ folgt nach (1) entweder $\Omega_1(\mathfrak{P})=C\big(\Omega_1(\mathfrak{P})\big)$ oder $\mathfrak{G}=C\big(\Omega_1(\mathfrak{P})\big)$. Im zweiten Falle liefert Hilfssatz 1.7 von [5] einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}|=p^{\omega_1}$. Dies widerspricht jedoch (1).

(3) *Ist $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{P}^X$, so gilt $\mathfrak{G}=\langle\mathfrak{P},\mathfrak{P}^X\rangle$:*

Sei $\Omega_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{U}$ p-auflösbar. Nach Satz 3.5 c) hat $\mathfrak{U}$ die p-Länge 1. Sei $\mathfrak{K}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{U}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Dann ist $\mathfrak{K}\leqq C\big(\Omega_1(\mathfrak{P})\big)=\Omega_1(\mathfrak{P})$ (nach (2)), also $\mathfrak{K}=\mathfrak{E}$. Somit hat $\mathfrak{U}$ wegen $l_p(\mathfrak{U})=1$ invariante p-Sylow-Gruppe. Ist also $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{P}^X$, so ist $\langle\mathfrak{P},\mathfrak{P}^X\rangle$ sicher keine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

(4) *Ist $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{P}^X$, so gilt $Z(\mathfrak{P})\cap Z(\mathfrak{P}^X)=\mathfrak{E}$:*

Sei $\mathfrak{D}=Z(\mathfrak{P})\cap Z(\mathfrak{P}^X)$. Dann haben wir $C(\mathfrak{D})\geqq\langle\mathfrak{P},\mathfrak{P}^X\rangle=\mathfrak{G}$ (nach (3)), also $\mathfrak{D}\leqq Z(\mathfrak{G})$. Nun liefert Hilfssatz 1.4 einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}|=|\mathfrak{D}|$; denn $\mathfrak{D}$ liegt sicher in $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Nach (1) folgt daher $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}$.

(5) *Es gilt* $\omega_1(\mathfrak{P}) \leqq 2$:

Sei $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^X$, ferner $\mathfrak{Z}_1 = \Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{Z}_2 = \Omega_1(\mathfrak{P}^X) \cap Z(\mathfrak{P}^X)$. Nach Satz 2.5 gilt $|\mathfrak{Z}_i| \geqq p^{\omega_1 - 1}$. Andererseits ist nach (4) $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{E}$, also $p^{2(\omega_1-1)} \leqq |\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{Z}_2| \leqq |\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1}$, was die Behauptung ergibt.

(6) $\mathfrak{G}$ *ist* p*-auflösbar:*

Ist $\mathfrak{P}$ abelsch, so folgt aus (2) $\mathfrak{P} \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P})) = \Omega_1(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{G}$ ist p-auflösbar. Andernfalls ist $\mathfrak{P}$ nach (5) metazyklisch und nichtabelsch. Dann liefert Satz 1.5 eine nichttriviale p-Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, entgegen der Feststellung von (1).

4.2. Satz. $\mathfrak{G}$ *habe modulare* p*-Sylow-Gruppe* $\mathfrak{P}$ *und es sei* $p > 2$. *Sei* $\mathfrak{T}$ *der kleinste Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* p*-auflösbarer Faktorgruppe. Dann enthält* $\mathfrak{T}$ *keinen Kompositionsfaktor der Ordnung* p.

Beweis. Sei wieder $\mathfrak{G}$ ein kleinstes Gegenbeispiel. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist der Satz richtig, aber für $\mathfrak{G}$ nicht. Daher ist $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe und es gibt einen Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ p-auflösbar ist und $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p enthält. Ist $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}$, so gilt der Satz für $\mathfrak{L}$, dann aber auch für $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$. Falls $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{P})$, so ist $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 4.1 p-auflösbar, also $\mathfrak{G}$ kein Gegenbeispiel.

Sei $\mathfrak{N} < \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ mit $p \mid |\mathfrak{M}/\mathfrak{N}|$ und $\mathfrak{M}$ sei minimal mit diesen Eigenschaften. Ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}$, so gilt der Satz in $\mathfrak{M}$. Sei $\mathfrak{R}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{M}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p enthält, ist sicher $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{E}$. Andererseits ist $\mathfrak{R}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{M}$, ist also normal in $\mathfrak{G}$. Nun gilt der Satz für $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, dann aber auch für $\mathfrak{G}$ selbst. Somit ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist p-einfach.

Wegen $\mathfrak{N} < \Omega_1(\mathfrak{P})$ haben wir $\mathfrak{N} < \Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq C(\mathfrak{N}) \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Daraus folgt $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{N} \leqq Z(\mathfrak{G})$. Nun liefert Hilfssatz 1.4 ein $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = |\mathfrak{N}| = p^n > 1$. Für $\mathfrak{K}$ gilt nun der Satz, dann aber auch für $\mathfrak{G}$.

Wir übertragen nun auch die Sätze 3.4 und 3.6 aus Huppert [5] auf Gruppen mit einer modularen p-Sylow-Gruppe ($p > 2$):

4.3. Satz. $\mathfrak{G}$ *habe eine modulare* p*-Sylow-Gruppe* $\mathfrak{P}$. *Es sei* $p > 2$ *und* $\mathfrak{T}$ *sei der kleinste Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* p*-auflösbarer Faktorgruppe. Dann zerfällt* $\mathfrak{P}$ *über* $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{P}$.

Beweis. Wir können offenbar $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{T}$ annehmen. Sei $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{T}$. Sei ferner $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ mit $p \nmid |\mathfrak{S}|$. Sicher ist $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) \leqq N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$.

(1) *Es gilt* $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K}\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ *mit* $\mathfrak{K} \leqq C(\mathfrak{Q})$ *und* $p \nmid |\mathfrak{K}|$:

$N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ ist p-auflösbar, hat also nach Satz 3.5 c) die p-Länge 1. Sei $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{K} \leqq \mathfrak{K}\mathfrak{P} \leqq N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ eine p-Reihe von $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$, also $p \nmid |\mathfrak{K}|$. Wegen $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ gilt sicher $\mathfrak{K} \leqq C(\mathfrak{Q})$. Für alle $S \in N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ haben wir $\mathfrak{P}^S \leqq \mathfrak{K}\mathfrak{P}$, also nach dem Satz von Sylow $\mathfrak{P}^S = \mathfrak{P}^K$ für ein geeignetes $K \in \mathfrak{K}$. Dies ergibt $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K} N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}\mathfrak{P}\mathfrak{S}$. Wegen $p \nmid |\mathfrak{K}|$ und $p \nmid |\mathfrak{S}|$ haben wir $\mathfrak{K}\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{T}$. Damit ergibt sich $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K}\mathfrak{S}(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{T}) = \mathfrak{K}\mathfrak{S}\mathfrak{Q} \leqq C_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q})\mathfrak{S}\mathfrak{Q}$.

(2) *Wir betrachten die Menge* $\mathfrak{M}$ *der Untergruppen* $\mathfrak{X}$ *von* $\mathfrak{P}$ *mit* $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{X}$. *Wegen* $\mathfrak{P} \in \mathfrak{M}$ *ist* $\mathfrak{M}$ *sicher nicht leer. Sei* $\mathfrak{Y}$ *ein minimales Element aus* $\mathfrak{M}$. *Dann ist* $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Y})$:

$\tilde{\mathfrak{Q}} = (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q})\, \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$ ist ein Normalteiler von $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$. Wir können $\tilde{\mathfrak{Z}}$ als $\mathfrak{S}$-Modul betrachten. Dann ist $\tilde{\mathfrak{Q}}$ ein $\mathfrak{S}$-Teilmodul, hat also nach dem Satz von MASCHKE ein Komplement $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$ mit $\mathfrak{L}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{L}$. Ist $\tilde{\mathfrak{Q}} > \tilde{\mathfrak{E}}$, so ist $\mathfrak{L} < \mathfrak{Z}$. Nun ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Q}\mathfrak{L}$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{Z}$. Also haben wir $\tilde{\mathfrak{Q}} = \tilde{\mathfrak{E}}$, d. h. $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$.

(3) $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$:

Wegen $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{T}$ folgt $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{S}) \leqq \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{P} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$. Also bewirkt $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{Z}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$ den identischen Automorphismus. In der modularen p-Gruppe $\mathfrak{Z}$ gilt nach Satz 2.3 $\Phi(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})\ \mathfrak{Z}' = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{Z})$. Somit bewirkt $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{Z}/\Phi(\mathfrak{Z})$ den identischen Automorphismus. Da $\mathfrak{S}$ eine zu p teilerfremde Ordnung hat, folgt bekanntlich $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{E}$. Nach (1) ist $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ ein p-Komplement von $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q})$. Somit folgt $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q}, \mathfrak{N}\mathfrak{S}) = \mathfrak{E}$. Also besteht $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q}$ aus Fixpunkten von $\mathfrak{Q}$ unter $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Ist $|\Omega_1(\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{Z}| = p^{\alpha} > 1$, so liefert nun Hilfssatz 1.4 einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{T}$ mit $|\mathfrak{T}/\mathfrak{N}| = p^{\alpha}$, entgegen der Definition von $\mathfrak{T}$. Also ist $\mathfrak{Z} \cap \Omega_1(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{E}$ und dann auch $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$.

Die Struktur von $\mathfrak{T}$ wird teilweise geklärt durch

4.4. SATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine modulare p-Sylow-Gruppe. Es sei $p > 2$, ferner habe $\mathfrak{G}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Zu jeder Kompositionsreihe $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_r = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es dann eine Zerlegung $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$ mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $\mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_{j(i)}$ *für $1 \leqq i \leqq s$ und geeignetes $j(i)$.*

b) *Ist $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ Produkt einiger der $\mathfrak{P}_i$.*

Der Beweis von Satz 3.6 aus HUPPERT [5] läßt sich wörtlich übertragen; dort wurde nämlich nicht benutzt, daß $\mathfrak{P}$ abelsch ist. Die benutzte Eigenschaft der Hauptfaktoren, nämlich p-einfach zu sein, folgt nach HUPPERT [5] Hilfssatz 2.2 schon aus der Regularität von $\mathfrak{P}$.

Auch 3.5 aus HUPPERT [5] läßt sich nun übertragen. In dem speziellen Falle, daß $\mathfrak{P}$ eine nichtabelsche metazyklische p-Gruppe ist, läßt sich noch etwas mehr sagen:

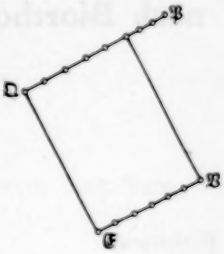
4.5. SATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine nichtabelsche metazyklische p-Sylow-Gruppe und es sei $p > 2$. Dann gilt entweder $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P} = s\mathfrak{P}$ oder es gibt einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ mit zyklischer Vertretergruppe und es besteht $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ aus allen Obergruppen von $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$, ferner allen Untergruppen einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V} \leqq Z(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$. In diesem Falle besteht $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ nur aus zwei Ketten.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, so gilt $l_p(\mathfrak{G}) = 1$ und wir erhalten nach WIELANDT [9] $s\mathfrak{P} = s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$. Sei also $\mathfrak{G}$ nicht p-auflösbar und $\mathfrak{T}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe. Nach Satz 4.3 zerfällt $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{T}$. Nach Satz 1.5 ist sicher $\mathfrak{Q} < \mathfrak{P}$, also haben wir $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Insbesondere folgt $\Omega_1(\mathfrak{Q}) \cap \Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{E}$, daher $|\Omega_1(\mathfrak{Q})| = |\Omega_1(\mathfrak{N})| = p$ und folglich sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}$ zyklisch. Da nun $\mathfrak{T}$ eine zyklische p-Sylow-Gruppe hat, ist es nach Satz 4.4 p-einfach.

Sei $\mathfrak{N} \in s\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q} \nleqq \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T}/\mathfrak{T} \cong \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$ p-auflösbar. Ferner ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q} \in s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$, aber $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q} < \mathfrak{Q}$, daher also $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$. Daraus folgt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T} \cap \mathfrak{P} =$

$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ und die Ordnung von $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$ ist somit zu p teilerfremd. Also ist $\mathfrak{N}$ p-auflösbar.

Sei nun $\mathfrak{N}$ der maximale p-auflösbare Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach der eben angestellten Überlegung enthält $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ alle $\mathfrak{X} \in s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{V}$ zyklisch. Ferner gilt $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{V}) \leqq (\mathfrak{T}, \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{P} \leqq \mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{V}$ liegt im Zentralisator von $\mathfrak{Q}$. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \langle Q \rangle \langle R \rangle$ mit $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{V} = \langle V \rangle$ mit $V = Q^a R^b$. Wegen $\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{P}$ ist $V^R = V^c$ für ein geeignetes c, also $V^R = (Q^a)^R R^b = Q^{a'} R^b = (Q^a R^b)^c = Q^{a''} R^{bc}$. Wegen $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ können wir die Exponenten vergleichen und erhalten $c \equiv 1 \bmod$ Ordnung R^b. Aus $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ folgt aber Ordnung $R^b =$ Ordnung V. Also ist $V^R = V \in Z(\mathfrak{P})$, somit $\mathfrak{V} \leqq Z(\mathfrak{P})$, wie behauptet.



Wir erwähnen noch eine direkte Folgerung aus Satz 4.5:

4.6. Satz. *Sei $\mathfrak{P}$ eine metazyklische p-Gruppe mit $p > 2$. $\mathfrak{P}$ habe keinen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Vertretergruppe. Ist $\mathfrak{P}$ die p-Sylow-Gruppe irgendeiner endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

Gruppen mit der in 4.6 geforderten Eigenschaft lassen sich leicht angeben; z. B. definieren die Relationen

$$A^{p^n} = E, \qquad B^{p^n} = A^{p^{n-1}}, \qquad B^{-1} A B = A^{1+p}$$

für $n > 2$ eine solche Gruppe der Ordnung p^{2n}.

Literatur

[1] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **36**, 29–95 (1933).

[2] Hall, P.: On the system normalizers of a soluble group. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **43**, 507–528 (1937).

[3] Hall, P., and G. Higman: On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **6**, 1–42 (1956).

[4] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243–264 (1953).

[5] Huppert, B.: Subnormale Untergruppen und p-Sylow-Gruppen. Erscheint demnächst in Acta Szeged.

[6] Iwasawa, K.: Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. J. Fac. Sci. Tokyo (2) **4**, 171–199 (1941).

[7] Taunt, D.: On A-groups. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 24–42 (1948).

[8] Wielandt, H.: p-Sylow-Gruppen und p-Faktorgruppen. J. reine angew. Math. **182**, 180–193 (1940).

[9] Wielandt, H.: Sylow-Gruppen und Kompositionsstruktur. Abh. Math. Seminar Hamburg **22**, 215–228 (1958).

[10] Wielandt, H.: Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe. Math. Z. **73**, 146–158 (1960).

[11] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. Oktober 1960)

SCHÄFKE, F. W.
Math. Zeitschr. 75, 154–191 (1961)

Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II

Von

FRIEDRICH WILHELM SCHÄFKE

Inhaltsübersicht

Teil I[1])

Einleitung
1. Elementare Hilfssätze
2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern
3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung

Teil II

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz 154
5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz 165
6. Reienentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\varkappa,\nu+n}(z)$, n ganz 176
7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen 181

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz

41. ν NICHT GANZ.

Sei ν eine nicht ganze (komplexe) Zahl. Wir suchen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$z\left(z\,y'(z)\right)' + (z^2 - \lambda)\,y(z) = 0 \tag{1}$$

mit der Umlaufseigenschaft

$$y(z\,e^{\pi i}) = e^{\pi i\nu}\,y(z) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Man hat offenbar die Eigenwerte $\lambda = (\nu+2n)^2$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und (bis auf konstanten Faktor bestimmt) die Eigenlösungen $J_{\nu+2n}(z)$. Wir erinnern dabei an

$$J_\nu(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2l}}{\Gamma(\nu+l+1)\,l!}. \tag{3}$$

Wie schon in **32** bemerkt, geht (1) durch $z = e^{it}$, $y(z) = u(t)$ in

$$u''(t) + (\lambda - e^{2it})\,u(t) = 0 \tag{4}$$

über; (2) entsprechend in

$$u(t+\pi) = e^{\pi i\nu}\,u(t) \not\equiv 0. \tag{5}$$

[1]) Teil I erschien in dieser Zeitschrift, Bd. 74, S. 436—470.

Hier aber ist unmittelbar die Theorie von **31** anwendbar. Zur Formulierung werden noch die Normierungsgrößen

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} J_\nu(e^{it})\,J_{-\nu}(e^{it})\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_{z_0}^{z_0 e^{\pi i}} J_\nu(z)J_{-\nu}(z)\,\frac{1}{z}\,dz$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu+1)} = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}$$

benötigt. Ferner kann man ν durch $\nu+1$ ersetzen und beide Resultate — dies entspricht dann der Umlaufsrelation

$$y(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu}\,y(z) \not\equiv 0 \tag{2'}$$

— zusammenfassen. So ergibt sich

Satz 1. *Sei ν nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_{\nu+n}(z)\,J_{-(\nu+m)}(z)\,\frac{1}{z}\,dz = \frac{\sin\pi(\nu+n)}{\pi(\nu+n)}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem Kreisring

$$0 \leqq \varrho_1 < |z| < \varrho_2 \leqq \infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint f(z)\,J_{-(\nu+n)}(z)\,\frac{1}{z}\,dz.$$

Unmittelbar ersichtlich wegen (3) sind folgende

Zusätze.

1. *$f(z)$ läßt sich in der Form $f(z)=z^\nu g(z)$ darstellen, wo $g(z)$ im Kreisring eindeutig holomorph ist.*

2. *Ist hier $g(z)$ gerade, $g(-z)=g(z)$, so gilt*

$$c_n = 0 \quad (n \text{ ungerade}).$$

3. *Ist $g(z)$ ungerade, $g(-z)=-g(z)$, so gilt*

$$c_n = 0 \quad (n \text{ gerade}).$$

4. *Ist $g(z)$ in der vollen Kreisscheibe $|z|<\varrho_2$ holomorph, so gilt*

$$c_n = 0 \qquad (n<0).$$

In diesem Falle konvergiert die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-\nu} J_{\nu+n}(z)$$

in kompakten Teilmengen dieser Kreisscheibe absolut gleichmäßig.

5. *Ist $g(z)$ in $0<|z|<\varrho_2$ holomorph und hat in 0 einen Pol der Ordnung m $(m=1, 2, 3, \ldots)$, so gilt*

$$c_n = 0 \qquad (n<-m).$$

Mit Hilfe dieser Resultate lassen sich zahlreiche spezielle Reihenentwicklungen angeben, deren Beweis durch die früher verwendete Methode der Reihentransformation (Umordnung von und in Potenzreihen) unangenehmere Rechenarbeit erfordert[2]).

So erhält man jetzt sofort

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}{m!} J_{\nu+2m}(z) \tag{6}$$

wegen

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi(\nu+2m)}{\sin \pi\nu} \oint \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-2m}(z) \frac{1}{z}\, dz \\ &= \frac{\pi(\nu+2m)}{\sin \pi\nu} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(-\nu-m+1)\, m!} \\ &= \frac{(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}{m!}, \end{aligned}$$

was aus (3) und dem Ergänzungssatz für die Γ-Funktion ersichtlich ist.

Nach dieser relativ einfachen Entwicklung sei nun eine der allgemeinsten derartigen Reihen hergeleitet. Mit $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ gebildet, läßt sich nach Satz 1

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{2r} J_{\lambda+2r}(z)$$

entwickeln, wobei

$$c_{2r} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi(\lambda+2r)}{\sin \pi(\lambda+2r)} \oint J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z)\, J_{-(\lambda+2r)}(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} \frac{1}{z}\, dz$$

ist. Nach (3) wird also

$$c_{2r} = \frac{\pi(\lambda+2r)}{\sin \pi(\lambda+2r)} \sum \frac{(-1)^m \alpha^{\mu+2m} (-1)^n \beta^{\nu+2n} (-1)^k}{\Gamma(\mu+m+1)\, m!\, \Gamma(\nu+n+1)\, n!\, \Gamma(-\lambda-2r+k+1)\, k!},$$

wobei die Summe über $m, n, k = 0, 1, 2, \ldots$ mit $k+m+n=r$ zu erstrecken ist. Setzt man $k=r-m-n$ und wendet den Ergänzungssatz der Γ-Funktion

[2]) Vgl. etwa ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher transcendental functions II, p. 63ff., p. 98ff., New York-Toronto-London 1953 sowie die dort zitierten Originalarbeiten.

an, so wird (die Glieder mit $n+m>r$ sind 0)

$$c_{2r}=\frac{\alpha^\mu\beta^\nu}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\cdot\frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{(-r)_{m+n}(\lambda+r)_{m+n}}{(\mu+1)_m(\nu+1)_n\,m!\,n!}\alpha^{2m}\beta^{2n}$$

daher hat man mit[3])

$$F_4(a,b;c,d;x,y)=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(d)_n\,m!\,n!}x^m y^n$$

die Entwicklung[4])

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu}J_\mu(\alpha z)\,J_\nu(\beta z)=\frac{\alpha^\mu\beta^\nu}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!}\times\\ \times F_4(-r,\lambda+r;\mu+1,\nu+1;\alpha^2,\beta^2)\,J_{\lambda+2r}(z). \tag{7}$$

Aus ihr können speziellere Entwicklungen durch Grenzübergang erhalten werden, der nach unseren Überlegungen an den einzelnen Koeffizienten ausgeführt werden kann. Man dividiert z.B. durch β^ν und läßt dann β gegen 0 gehen. Es gilt dann – das ergäbe sich auch als Anwendung von **31**, Satz 2 (Potenzreihenentwicklung nach μ) –

$$\beta^{-\nu}J_\nu(\beta z)\to\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$$

gleichmäßig in kompakten Kreisringen um 0, die 0 nicht enthalten. Beachtet man noch

$$F_4(a,b;c,d;x,0)={}_2F_1(a,b;c;x),$$

so entsteht

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu}J_\mu(\alpha z)\\ =\frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!}\,{}_2F_1(-r,\lambda+r;\mu+1;\alpha^2)\,J_{\lambda+2r}(z). \tag{8}$$

Auf die Spezialfälle $\lambda=\mu$ und $\alpha=1$[5]) sei nur hingewiesen; $\alpha\to 0$ ergibt natürlich die anfangs betrachtete Reihe (6).

Von besonderem Interesse ist die Entwicklung von $\frac{z^\nu}{t-z}$[6]). Für $|z|<|t|$ gilt nach Satz 1[6a])

$$\frac{z^\nu}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n,\nu}(t)\,J_{\nu+n}(z) \tag{9}$$

mit

$$A_{n,\nu}(t)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint\frac{z^\nu J_{-\nu-n}(z)}{t-z}\,\frac{1}{z}\,dz, \tag{10}$$

[3]) Vgl. J. Horn: Math. Ann. **105**, 381–407 (1931).

[4]) Vgl. W. N. Bailey: Quart. J. Math. Oxford Ser. **6**, 233–238 (1935).

[5]) Hier läßt sich ${}_2F_1$ durch die Γ-Funktion ausdrücken.

[6]) Vgl. Gegenbauer: Wiener Sitzugsber. **74**, (2) 124–130 (1877).

[6a]) Es sei bemerkt, daß sich aus unseren Überlegungen auch die gleichmäßige Konvergenz bezüglich z und t für $|z|\leqq\varrho_1<\varrho_2\leqq|t|$ ergibt.

wo etwa über einen Kreis $0<|z|=r<|t|$ zu integrieren ist. Entwickelt man

$$(t-z)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty} z^m t^{-m-1},$$

so kann gliedweise integriert werden, und mit der Abkürzung Ph = Polhauptteil bei 0, d.h.

$$Ph\left\{\sum_{r=-m}^{\infty} a_r z^r\right\}=\sum_{r=-m}^{-1} a_r z^r$$

folgt

$$A_{n,\nu}(t)=\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\{t^{\nu-1}J_{-\nu-n}(t)\}. \tag{11}$$

Abgesehen von der mit unserer Theorie gegebenen neuen einfachen Beweismöglichkeit der Gegenbauerschen Entwicklung (9) ist anscheinend die Darstellung (11) kaum bekannt. In ihr sind die $A_{n,\nu}$ sehr einfach durch Bessel-Funktionen ausgedrückt. Man erhält sofort die explizite Darstellung

$$A_{n,\nu}(t)=\frac{2^{\nu+n}(\nu+n)}{t^{n+1}}\sum_{m=0}^{\leq\frac{1}{2}n}\frac{\Gamma(\nu+n-m)}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \tag{12}$$

Weiter können mit (11) z.B. Rekursionsformeln, Differentialgleichung und Umlaufsintegrale[7]) aus den entsprechenden bekannten Formeln für die Bessel-Funktionen offensichtlich leicht erhalten werden. Dies sei nur an einem Beispiel erläutert:

Wegen

$$\frac{d}{dz}\,Ph\{f(z)\}=Ph\{f'(z)\}$$

gilt

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\left\{\frac{2}{t}(\nu-1)t^{\nu-1}J_{-\nu-n}(t)+2t^{\nu-1}J'_{-\nu-n}(t)\right\},$$

also mit

$$\frac{2}{t}J_{-\nu-n}(t)=\frac{1}{-\nu-n}\left(J_{-\nu-n-1}(t)+J_{-\nu-n+1}(t)\right),$$

$$2J'_{-\nu-n}(t)=J_{-\nu-n-1}(t)-J_{-\nu-n+1}(t)$$

nunmehr

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{\pi}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\{t^{\nu-1}[(n+1)J_{-\nu-n-1}(t)-(2\nu+n-1)J_{-\nu-n-1}(t)]\},$$

daher mit (11)

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{2\nu+n-1}{\nu+n-1}A_{n-1,\nu}(t)-\frac{n+1}{\nu+n+1}A_{n+1,\nu}(t). \tag{13}$$

Insgesamt zeigt sich, daß man so einen neuen einfacheren, eben anscheinend naturgemäßen Zugang zur Theorie dieser Polynome von GEGENBAUER hat. Eine Ausdehnung dieser Überlegungen auf die Neumannschen und

[7]) Vgl. l.c. [6]), oder auch G. N. WATSON: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, S. 283ff. Cambridge 1952.

Kapteynschen Polynome und Verallgemeinerungen werden sich in analoger Weise unten ergeben.

42. $\nu = 0$, ALS GRENZFALL BETRACHTET.

Sei $g(z)$ im Kreisring $0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$ eindeutig analytisch und gerade. Dann gilt nach Satz 1 für jedes nicht ganze ν eine Entwicklung

$$z^\nu g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\nu,2n} J_{\nu+2n}(z), \tag{1}$$

die in jedem abgeschlossenen Teilkreisring absolut gleichmäßig konvergiert.

Wir betrachten nun alle ν auf dem Kreise $|\nu| = \frac{1}{2}$ oder auf dem Kreise $|\nu - 1| = \frac{1}{2}$ und wollen zeigen, daß die Gleichmäßigkeit auch bezüglich dieser ν gilt.

Dazu kann man den Ursprung der Abschätzungen von **23**, Satz 9 aufsuchen. Als bestimmende Größen treten hier zunächst α und γ auf. γ ist für unser Problem von ν unabhängig, α kann offenbar als gleich für alle die genannten ν gewählt werden, wie die Überlegungen von Teil I, S. 461 zeigen. Außerdem tritt nur noch das Integral

$$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda)\,|d\lambda| \tag{2}$$

auf. Hierzu gehen wir mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_n = \frac{1}{4}(\nu + 2n)^2$ $(n = \cdots, -1, 0, 1, \ldots)$ die Abschätzungen von Abschnitt **1** durch. Die Aussagen von Hilfssatz 1 gelten gleichmäßig bezüglich a, b, c_m^*, falls a, b nach oben und $1 - b + a$, $a - b$, b nach unten durch positive Zahlen gleichmäßig beschränkt sind, wie der Beweis zeigt. Hilfssatz 2 gilt offenbar für unsere ν gleichmäßig. Dasselbe trifft für Hilfssatz 3 zu. Denn hier ist $\vartheta = \nu$ zu setzen und für alle unsere ν wird $\delta = \frac{1}{2}$. Damit folgt auch die Gleichmäßigkeit der Abschätzungen in Hilfssatz 4, insbesondere der $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ — Aussage für (2).

Weiter sind nun für $\mu = 0$, d.h. im Falle der entsprechenden Laurent-Reihen, die Entwicklungen auch bezüglich unserer ν gleichmäßig konvergent. Dann aber gibt **23**, Satz 9 das gewünschte Resultat auch für (1).

Damit ist es erlaubt in (1) die Operationen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu|=\frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{\nu}\,d\nu, \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu-1|=\frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{\nu-1}\,d\nu$$

gliedweise auszuführen, wobei immer noch die absolut gleichmäßige Konvergenz bezüglich z erhalten bleibt.

Betrachten wir zunächst die erste Operation. Sie ergibt links $g(z)$. Rechts wollen wir die Glieder mit n und $-n$ zusammenfassen. Dann hat man, wenn man die Integration über ζ und die Faktoren $g(\zeta)$, $\frac{1}{\zeta}$, $\frac{1}{2\pi i}$ fortläßt, die Operation — wir sehen zunächst $n = 1, 2, 3, \ldots$ an — auf

$$\frac{\pi \zeta^\nu}{\sin \pi\nu}\left[(\nu + 2n)\, J_{-\nu-2n}(\zeta)\, J_{\nu+2n}(z) + (\nu - 2n)\, J_{-\nu+2n}(\zeta)\, J_{\nu-2n}(z)\right]$$

auszuüben. Setzt man für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$L_{2n}(z) = J_{2n}(z) + 2n \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+2n}(z) - J_{\nu-2n}(z)]|_{\nu=0},$$

so ergibt sich

$$L_{2n}(\zeta)\, J_{2n}(z) + J_{2n}(\zeta)\, L_{2n}(z).$$

Für $n=0$ entsteht ähnlich $J_0(\zeta)\, J_0(z)$.

So folgt nach unseren vorangehenden Überlegungen die Entwicklung

$$g(z) = c_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{2n} J_{2n}(z) + c_{-2n} L_{2n}(z)\right)$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta)\, J_0(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta)\, L_{2n}(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

$$c_{-2n} = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta)\, J_{2n}(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta.$$

Betrachten wir jetzt analog die zweite Operation, die links $z g(z)$ ergibt. Rechts fassen wir die Glieder mit n und $-n-1$ für $n=0, 1, 2, \ldots$ zusammen. Dann ist, wenn man die Integration über ζ und die Faktoren $\zeta\, g(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, \frac{1}{2\pi i}$ fortläßt, die Operation auf

$$-\frac{\pi \zeta^{\nu-1}}{\sin \pi(\nu-1)} [(\nu - 1 + 2n + 1)\, J_{-\nu-2n}(\zeta)\, J_{\nu+2n}(z) + (\nu - 1 - 2n - 1) \times \\ \times J_{-\nu+2n+2}(\zeta)\, J_{\nu-2n-2}(z)]$$

anzuwenden. Man setzt nun

$$L_{2n+1}(\zeta) = J_{2n+1}(\zeta) + (2n+1) \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+2n+1}(\zeta) + J_{\nu-2n-1}(\zeta)]|_{\nu=0}.$$

Dann ergibt sich

$$L_{2n+1}(\zeta)\, J_{2n+1}(z) + J_{2n+1}(\zeta)\, L_{2n+1}(z).$$

Damit folgt nach unseren vorangehenden Überlegungen die Entwicklung

$$z\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{2n+1} J_{2n+1}(z) + c_{-2n-1} L_{2n+1}(z)\right)$$

mit

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta\, g(\zeta)\, L_{2n+1}(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

$$c_{-2n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta\, g(\zeta)\, J_{2n+1}(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta.$$

Entsprechend der Aufspaltung in eine gerade und eine ungerade Funktion können beide Ergebnisse bequem zusammengefaßt werden:

SATZ 2. *Es sei gesetzt*

$$L_n(z) = J_n(z) + n \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{\nu-n}(z)]|_{\nu=0} \tag{3}$$

für $n=0, 1, 2, \ldots$. Diese Funktionen sind für $0<|z|<\infty$ eindeutig holomorph; sie haben in 0 einen Pol n-ter Ordnung.

Ist $g(z)$ im Kreisring $0\leqq r_1<|z|<r_2\leqq\infty$ eindeutig holomorph, so gilt bei absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilkreisringen

$$g(z)=c_0 J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n J_n(z)+c_{-n} L_n(z)]$$

mit den Koeffizienten

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\, L_n(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\, J_n(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Ist speziell $g(z)$ im Kreise $|z|<r_2$ holomorph, so sind $c_{-n}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Die Reihe

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(z)$$

ist dann in jedem abgeschlossenen Teilkreis absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise der letzten Tatsache kann man etwa die Operation

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\varrho}\frac{\cdots}{z-t}\,dz$$

für $|t|\leqq\varrho'<\varrho$ gliedweise anwenden.

Ergänzend zu Satz 2 würde man sich Eindeutigkeit der Entwicklungen bzw. äquivalent dazu Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen wünschen. Ferner vermißt man die Aufspaltung der Reihe entsprechend den J_n und den L_n. Schließlich wird die Zerlegung einer im Kreisring $r_1<|z|<r_2$ eindeutig holomorphen Funktion $g(z)$ eindeutig in der Form $g_0(z)+g_\infty(z)$, wo $g_0(z)$ in $|z|<r_2$ holomorph ist und $g_\infty(z)$ in $|z|>r_1$ holomorph ist und in ∞ verschwindet, nicht widergespiegelt.

Die gewünschten Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen folgen einfach aus denen für nicht ganzes ν. Man hat etwa für n, m ganz und $n^2\neq m^2$

$$\oint J_{-\nu-m}(t)\,\frac{1}{\nu}\,[J_{\nu+n}(t)-(-1)^n J_{\nu-n}(t)]\,\frac{1}{t}\,dt=0,$$

also für $\nu\to 0$ wegen gleichmäßiger Konvergenz auf dem Integrationswege und wegen

(a) $$\frac{1}{2\pi i}\oint J_m(t)\, J_n(t)\,\frac{1}{t}\,dt=\begin{cases}1 & (n=m=0)\\ 0 & (\text{sonst})\end{cases}$$

die Relationen

(b) $$\oint J_m(t)\, L_n(t)\,\frac{1}{t}\,dt=0 \qquad (n\neq m;\ n, m=0, 1, 2, \ldots).$$

Ähnlich folgt aus

$$\oint\frac{1}{\nu}\,[J_{-\nu-m}(t)-(-1)^m J_{-\nu+m}(t)]\,\frac{1}{\nu}\,[J_{\nu+n}(t)-(-1)^n J_{\nu-n}(t)]\,\frac{1}{t}\,dt=0$$

für alle n, m mit $n^2 \neq m^2$, bzw. $\to 0$ für $n^2 = m^2$ bei $\nu \to 0$

$$\text{(c)} \qquad \oint L_m(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = 0 \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die verbleibende Relation

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint J_n(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt nun zusammen mit (b), (c), indem man die Entwicklung von $L_n(z)$ gemäß Satz 1 betrachtet, die $L_n(z) = c_{-n} L_n(z)$ lauten muß. Wir fassen zusammen in

SATZ 3. *Bezüglich eines* 0 *einmal positiv umlaufenden Weges gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_m(t)\, J_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint L_m(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & (n = m = 0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_n(t)\, L_m(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Jede in einem Kreisring um 0 *eindeutige holomorphe Funktion* $g(z)$ *läßt sich eindeutig in eine in kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = c_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n J_n(z) + c_{-n} L_n(z)]$$

entwickeln.

Um aus dieser Entwicklung eine Modifikation zu erhalten, die die vorhin erwähnte Trennung $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ widerspiegelt, betrachtet man am besten — das kommt auch mit den Koeffizientenformeln und mit der Entwicklung von $\frac{1}{t - z}$ herein —

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_n O_n(z) = Ph\left\{\frac{1}{z} L_n(z)\right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ \qquad (\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_n = 2\ (n = 1, 2, 3,)), \end{cases}$$

wo Ph wieder den Polhauptteil bei 0 bezeichnet. Wir erhalten

SATZ 4. $O_n(z)$ *ist ein Polynom* $(n+1)$*-ten Grades in* $1/z$ *ohne freies Glied. Es gilt*

$$\text{(5)} \qquad O_0(z) = \frac{1}{z}$$

und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\text{(6)} \qquad O_n(z) = (-1)^n \frac{n}{2} Ph\left\{\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(z)\Big|_{\nu=0}\right\}$$

bzw.[8])

$$\text{(7)} \qquad O_n(z) = -\frac{n}{2} Ph\left\{\frac{\pi}{z} Y_n(z)\right\}.$$

[8]) Vgl. die nachfolgenden Erläuterungen.

Man hat die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen ($n, m \neq 0, 1, 2, \ldots$)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint O_n(z)\, O_m(z)\, dz = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_n(z)\, O_m(z)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_m} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m). \end{cases} \tag{9}$$

Es gilt für $|t| > |z|$

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O_n(t)\, J_n(z). \tag{10}$$

Schließlich ist

$$\varepsilon_n O_n(z) = \lim_{\nu \to 0} A_{n,\nu}(z). \tag{11}$$

Hier ist (5) aus $L_0(z) = J_0(z)$ ersichtlich. (6) folgt aus der Definition (3):

$$\begin{aligned} Ph\,\frac{1}{z} L_n(z) &= Ph\left\{\frac{1}{z}\left(J_n(z) + n\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{\nu-n}(z)\right]\Big|_{\nu=0}\right)\right\} \\ &= Ph\left\{\frac{n}{z}\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}[\ldots]\Big|_{\nu=0}\right\} \\ &= Ph\left\{\frac{n}{z}(-1)^n\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(z)\Big|_{\nu=0}\right\}, \end{aligned}$$

da $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu+n}(z)$ nur positive Potenzen von z enthält; ferner ist zuletzt noch ν statt $-\nu$ substituiert worden. (7) ergibt sich analog wegen[9])

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\nu \to 0} Y_{\nu+n}(z) = \lim_{\nu \to 0} \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{-\nu-n}(z)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial \nu}[\ldots]\Big|_{\nu=0} \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \log\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\left[J_{-\nu+n}(z) + (-1)^n J_{-\nu-n}(z)\right]\Big|_{\nu=0}, \end{aligned}$$

wenn man nur in naheliegender Weise

$$Ph\left\{\sum_{m=-n}^{\infty} a_m z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \cdot \log z\right\} = \sum_{m=-n}^{-1} a_m z^m$$

verabredet. (8) ist trivial und (9) folgt aus (Satz 3)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_n(z)\, L_m(z)\, \frac{1}{z}\, dz = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m), \end{cases}$$

da nur der Polhauptteil von $\frac{1}{z} L_m(z)$ zum Integral einen Beitrag liefert. (10) ist mit Satz 2 herzuleiten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\, J_n(z), \\ c_n(t) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{t-z} L_n(z)\, \frac{1}{z}\, dz \\ &= \varepsilon_n O_n(t). \end{aligned}$$

[9]) Vgl. l. c. [2]), S. 4, Formel (4) und S. 7, Formel (28).

(11) schließlich muß gelten, weil nach unseren Überlegungen speziell die Reihe **41**, (9) für $\nu \to 0$ in (10) übergeht.

Die $O_n(z)$ sind — sonst zunächst durch (10) ad hoc definiert und durch Reihenumordnung erhalten — die Neumannschen Polynome[10]). Wie wir sahen, liefert auch hier unsere Theorie einen bequemen und naturgemäßen Zugang. Insbesondere sind anscheinend die Zusammenhänge (6) und (7) bisher übersehen worden.

(7) ergibt natürlich sofort die explizite Darstellung als Polynom in $\frac{1}{z}$

$$(12) \qquad O_n(z) = \frac{n}{4} \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Weiter aber wird (7) offenbar zur Herleitung von Rekursionsformeln, Differentialgleichung und anderem — ähnlich, wie wir es in **41** zeigten — besonders nützlich. Auf die Polynome von SCHLÄFLI gehen wir in diesem Zusammenhang nicht ein.

Wir geben nunmehr eine Herleitung des Neumannschen Entwicklungssatzes und beweisen

SATZ 5. *$g(z)$ sei im Kreisring $0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$ eindeutig holomorph. Dann läßt sich $g(z)$ eindeutig in eine in kompakten Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n O_n(z)$$

entwickeln. Die Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, O_n(z)\, dz, \qquad b_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, J_n(z)\, dz.$$

Ist $g(z)$ auch um 0 holomorph, so gilt $b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent. Ist $g(z)$ auch um ∞ holomorph und verschwindet in ∞, so gilt $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n O_n(z)$$

ist dann auch um ∞ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise sei $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ zerlegt, wo $g_0(z)$ in $|z| < r_2$ und $g_\infty(z)$ in $|z| > r_1$ holomorph sind und $g_\infty(\infty) = 0$ gilt. Wir entwickeln gemäß Satz 2 für $|z| < r_2$:

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(z);$$

[10]) Vgl. z. B. l. c. [7]), S. 271 ff.

dabei sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, L_n(z)\, \frac{1}{z}\, dz = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g_0(z)\, O_n(z)\, dz = a_n$$

wegen (4). Weiter entwickeln wir gemäß Satz 2

$$z\, g_\infty(z) = c_0\, J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n\, J_n(z) + c_{-n}\, L_n(z)].$$

Wir dividieren mit z und wenden die Operation

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varrho} \frac{\cdots}{z-t}\, dz$$

für $|t| \geqq \varrho_1 > \varrho$ an, was wegen gleichmäßiger Konvergenz gliedweise geschehen kann. Indem wir statt t wieder z schreiben, erhalten wir für $|z| > r_1$ mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in abgeschlossenen Teilmengen

$$g_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}\, Ph\left\{\frac{1}{z}\, L_n(z)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}\, \varepsilon_n\, O_n(z).$$

Dabei sind offenbar $\varepsilon_n\, c_{-n} = b_n$. Die Eindeutigkeit der Entwicklungen folgt mit Satz 4, (8), (9). Damit ist Satz 5 voll bewiesen.

5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz (Kapteynsche Reihen)

51. ν NICHT GANZ.

Wir gehen davon aus, daß offenbar $u(z) = J_\mu(\mu z)$ der Differentialgleichung

$$z(z u')' + \mu^2 (z^2 - 1)\, u = 0 \tag{1}$$

genügt. Daraus ist ersichtlich, daß für nicht ganzes ν das Eigenwertproblem

$$z(z u')' + \lambda (z^2 - 1)\, u = 0 \tag{2}$$

$$u(z\, e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu}\, u(z) \not\equiv 0 \tag{3}$$

genau die Eigenwerte $\lambda = (\nu + 2n)^2$ und die (bis auf konstanten Faktor eindeutig bestimmten) Eigenlösungen

$$u = J_{\nu+2n}\big((\nu + 2n)\, z\big)$$

mit $n = \cdots, -1, 0, 1, \ldots$ hat. Um hier die Theorie von 3 anwenden zu können, muß auf ein entsprechendes Problem für eine Hillsche Differentialgleichung transformiert werden.

Wir führen die Umrechnung an (1) durch mit dem Ansatz

$$\frac{dt}{dz} = b(z), \qquad u(z) = a(z)\, v(t).$$

Indem wir mit $'$ bzw. $\cdot$ die Differentiationen nach z bzw. t kennzeichnen, erhalten wir

$$u' = a' v + a b \dot{v},$$

$$(z u')' + \mu^2 \frac{z^2 - 1}{z} u = z a b^2 \ddot{v} + [z a' b + (z a b)'] \dot{v} + (z a')' v + \mu^2 a \frac{z^2 - 1}{z} v.$$

Soll (1) die Form

$$\ddot{v}(t) + \left(\mu^2 + g(t)\right) v(t) = 0 \tag{4}$$

erhalten, so muß

$$(z b)^2 = z^2 - 1, \qquad a' 2 z b + a (z b)' = 0$$

gelten. Indem wir die Potenzen von $(1 - z^2)$ durch die Schnitte $(-\infty, -1]$ und $[1, +\infty)$ sowie durch die Verabredung des Hauptwertes auf $(-1, 1)$ eindeutig erklären, setzen wir daher

$$t = -i \int_1^z (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\zeta} d\zeta, \qquad v(t) = (1 - z^2)^{\frac{1}{4}} u(z).$$

Es wird offenbar

$$i t = \log z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left(1 + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right);$$

t nimmt bei halbem positivem Umlauf um $z = 0$ um π zu. Man erhält ferner

$$g(t) = \frac{z (z a')'}{a (z^2 - 1)}, \qquad a(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dies ist eine gerade Funktion von z; also gilt

$$g(t + \pi) = g(t). \tag{5}$$

Wir bemerken noch, daß $g(t) \to 0$ für $z \to 0$, also für $\operatorname{Im} t \to +\infty$ gilt.

Um nun die Überlegungen von Abschnitt **3** anwenden zu können, wird man einen möglichst großen Streifen der t-Ebene parallel der reellen Achse abzubilden suchen. Man erkennt, daß hier nur die Halbebene $\operatorname{Im} t > 0$ in Frage kommt. Sie wird auf das entsprechend dem Umlauf um 0 unendlich oft überdeckte Gebiet $\mathfrak{L}$:

$$|w(z)| < 1 \tag{6}$$

mit

$$w(z) = e^{it} = \frac{z\, e^{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

abgebildet[11].) Wir bemerken, daß es eine echte Teilmenge des Kreises $|z| < 1$ ist. (3) entspricht jetzt

$$v(t + \pi) = e^{\pi i \nu} v(t) \not\equiv 0. \tag{8}$$

[11]) Bezüglich des Gebiets $\mathfrak{L}$ vgl. etwa l.c. [7]), S. 279f.

Auf (4), (8) ist nun die Theorie von **31** anwendbar. Zur Formulierung des Resultats benötigen wir noch die Normierungsintegrale

$$\frac{1}{\pi i}\int_{z_0}^{z_0 e^{\pi i}} J_\mu(\mu z)\, J_{-\mu}(\mu z)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu}.$$

Indem wir wieder ν durch $\nu+1$ ersetzen und beide Resultate zusammenfassen, erhalten wir

SATZ 1. *ν sei nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)\, J_{-\nu-m}\big((\nu+m)\,z\big)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz = \frac{\sin\pi(\nu+n)}{\pi(\nu+n)}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem Gebiet (vom Ringtypus um 0)

$$0 \leqq \varrho_1 < |w(z)| < \varrho_2 \leqq 1$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufsrelation

$$f(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint f(z)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,z\big)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz.$$

Offenbar gelten hier fast wörtlich die Zusatzbemerkungen zu **41**, Satz 1.

Als Anwendung leiten wir zuerst die Entwicklung von $\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$ her[12]):

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}\, J_{\nu+2m}\big((\nu+2m)\,z\big),$$

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+2m)}{\sin\pi\nu}\oint \left(\frac{z}{2}\right)^\nu J_{-\nu-2m}\big((\nu+2m)\,z\big)\,\frac{1-z^2}{z}\,dz \\ &= (\nu+2m)^{-\nu+1}\,\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu J_{-\nu-2m}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta - \\ &\quad - 4\,(\nu+2m)^{-\nu-1}\,\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\nu+2} J_{-\nu-2m}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \\ &= \frac{\Gamma(\nu+m)}{m!\,(\nu+2m)^{\nu-1}} - 4\,\frac{\Gamma(\nu+m+1)\,m}{m!\,(\nu+2m)^{\nu+1}} \\ &= \frac{\nu^2\,\Gamma(\nu+m)}{(\nu+2m)^{\nu+1}\,m!}. \end{aligned}$$

[12]) Bezüglich der Schwierigkeiten, die die Herleitung früher bot, vgl. etwa die Ausführungen l.c. [7]), S. 564 ff., S. 571.

Man hat also

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m)}{(\nu+2m)^{\nu+1}\, m!} J_{\nu+2m}\big((\nu+2m)\, z\big) \tag{9}$$

mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilmengen von $0<|w(z)|<1$.

Wir leiten weiter ein Analogon zu **41**, (7) her, das anscheinend unbekannt ist. Wir entwickeln

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu}(1-z^2)^{-1} J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big)$$

mit

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{\pi(\lambda+2m)}{\sin\pi\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z)\, J_{-\lambda-2m}\big((\lambda+2m)\, z\big)\,\frac{1}{z}\,dz \\ &= \frac{\pi(\lambda+2m)^{\mu+\nu-\lambda+1}}{\sin\pi\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_{\mu}(\alpha_m\zeta) J_{\mu}(\beta_m\zeta)\, J_{-\lambda-2m}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta, \\ \alpha_m &= \alpha(\lambda+2m)^{-1}, \qquad \beta_m = \beta(\lambda+2m)^{-1}. \end{aligned}$$

Hier ist das Integral für **41**, (7) berechnet worden. So hat man sofort

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu}(1-z^2)^{-1} J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}(\lambda+2m)^{1-\lambda}\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)\, m!} \times \\ &\times F_4(-m, \lambda+m; \mu+1, \nu+1; \alpha_m^2, \beta_m^2)\, J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilmengen von $0<|w(z)|<1$. Der Faktor $(1-z^2)^{-1}$ kann offenbar beseitigt werden, indem man die Reihen für $\lambda+2$ statt λ aufschreibt und mit (10) entsprechend kombiniert. Analog kann statt $(1-z^2)^{-1}$ auch $(1-z)^{-1}$ bzw. $(1+z)^{-1}$ erhalten werden. Als Grenzfall $\beta\to 0$ notieren wir noch

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu}(1-z^2)^{-1} J_{\mu}(\alpha z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mu}(\lambda+2m)^{1-\lambda}\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\mu+1)\, m!} \times \\ &\times {}_2F_1(-m, \lambda+m; \mu+1; \alpha_m^2)\, J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Für $\alpha\to 0$ entsteht hieraus natürlich wieder im wesentlichen (9).

Eine Entwicklung ganz anderer Art ist [12a])

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m} t^{2m}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+t\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-t\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}+m-t\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}+m+t\right)} \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)\, 2^{\nu} J_{\nu+2n}\big((\nu+2n)\, z\big)}{(\nu+2n)^{-1}\, n!\left(t^2-\left(n+\frac{\nu}{2}\right)^2\right)}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Es handelt sich offenbar um eine Verallgemeinerung der Reihen von MEISSEL[13]), die sich für $\nu=2$ und $\nu=1$ ergeben. Die Reihe links stellt — bei absolut

[12a]) Vgl. W. N. BAILEY: Proc. Lond. Math. Soc. **33**, 154–159 (1932).

[13]) Vgl. MEISSEL: Astr. Nachr. **130**, 363–368 (1892), oder l. c. [7]), S. 557 f., S. 561 ff.

gleichmäßiger Konvergenz in entsprechenden kompakten Teilgebieten bezüglich ν, t^2, z — eine für $t^2 \neq \left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, $0<|z|<\infty$ holomorphe Funktion von ν, t^2 z dar. Indem wir $\nu \neq$ ganz fest annehmen, entwickeln wir (Satz 1)

$$f(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(t^2)\, J_{\nu+2n}\left((\nu+2n)\,z\right)$$

innerhalb $0<|w(z)|<1$. Die Koeffizientenformel

$$(*)\qquad c_{2n}(t^2)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+2n)}{\sin\pi\nu}\oint f(t,z)\, J_{-\nu-2n}\left((\nu+2n)\,z\right)\,\frac{1-z^2}{z}\,dz$$

zeigt, daß

$$c_{2n}(t^2)\quad \text{für}\quad t^2\neq\left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2\quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

eindeutig holomorph ist und an diesen Stellen höchstens einfache Pole hat. Wir bilden nun die Residuen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\left|t^2-\left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2\right|=\varepsilon} c_{2n}(t^2)\,d(t^2).$$

In (*) kann dazu die Integration über t^2 mit der über z vertauscht werden. Das Residuum von $f(t,z)$ bei $t^2=\left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2$ ist aber offenbar gerade

$$\frac{\Gamma(\nu+k)\,2^{\nu}}{(\nu+2k)^{\nu-1}\,k!}\,J_{\nu+2k}\left((\nu+2k)\,z\right).$$

Daher hat $c_{2n}(t^2)$ im Endlichen nur den einen einfachen Pol $\left(\frac{\nu}{2}+n\right)^2$ mit dem Residuum

$$\frac{\Gamma(\nu+n)\,2^{\nu}}{(\nu+2n)^{\nu-1}\,n!}.$$

Überdies gilt $c_{2n}(\infty)=0$. Denn diese Eigenschaft haben alle Potenzreihenkoeffizienten in (12). Sie überträgt sich auf $c_{2n}(t^2)$, indem man in (*) die auf dem Integrationswege gleichmäßig konvergente Potenzreihe von

$$z^{\nu}\,J_{-\nu-2n}\left((\nu+2n)\,z\right)$$

gliedweise integriert. Beide Eigenschaften von $c_{2n}(t^2)$ ergeben nun aber die in (12) notierte Gestalt. Diese Herleitung ist wesentlich einfacher als die von BAILEY, l. c.[12a]).

Von besonderem Interesse ist schließlich wieder die Entwicklung

$$(13)\qquad \frac{z^{\nu}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{A}_{n,\nu}(t)\,J_{\nu+n}\left((\nu+n)\,z\right),$$

für die wir

$$(14)\qquad \mathfrak{A}_{n,\nu}(t)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint\frac{z^{\nu}\,J_{-\nu-n}\left((\nu+n)\,z\right)}{t-z}\,\frac{1-z^2}{z}\,dz$$

erhalten, also

$$(15)\qquad \mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = \frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\, Ph\{t^{\nu-1}(1-t^2)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,t\big)\}.$$

Daraus ist, indem man mit **41**, (11) vergleicht, sofort

$$(16)\quad \mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = (\nu+n)^{-\nu+1} A_{n,\nu}\big((\nu+n)\,t\big) - (\nu+n)^{-\nu-1} A_{n-2,\nu+2}\big((\nu+n)\,t\big)$$

abzulesen, sowie mit **41**, (12) die explizite Darstellung

$$(17)\qquad \mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\leq \frac{1}{2}n} \frac{(\nu+n-2m)^2\,\Gamma(\nu+n-m)}{\left(\frac{\nu+n}{2}\right)^{\nu+n-2m+1}\, m!\, t^{n-2m+1}}.$$

Auch folgern wir mit (15) und (12) sofort

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_{n,\nu}(t) &= (\nu+n)^{1-\nu}(1-t^2)\, A_{n,\nu}\big((\nu+n)\,t\big) + \\ &+ \cos^2 n\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\nu}(\nu+n)^{1-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\,t + \\ &+ \sin^2 n\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\nu+1}(\nu+n)^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Dazu ist nur

$$Ph\left\{(1-z^2)\sum_{n=-m}^{+\infty} a_n z^n\right\} = (1-z^2)\left\{Ph\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n\right\} + a_{-1}\,z + a_{-2}$$

zu beachten.

Man hat so, d.h. mit der bisher anscheinend nicht bekannten Darstellung (15), offenbar einen bequemen und natürlichen Zugang zu diesen zuerst von NIELSEN[14]) betrachteten Polynomen[15]).

52. $\nu = 0$, ALS GRENZFALL BETRACHTET.

Fast wörtlich ebenso wie in **42** kann gezeigt werden: Ist $g(z)$ für

$$0 \leqq r_1 < |w(z)| < r_2 \leqq 1$$

eindeutig holomorph, so ist die Reihe

$$z^{\nu}\, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\nu}\, J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big),$$

$$c_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint \zeta^{\nu}\, g(\zeta)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\zeta\big)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta$$

auch für $|\nu| = \frac{1}{2}$ absolut gleichmäßig konvergent.

[14]) Ann. sci. de l'École norm. sup. (3) **18**, insbes. S. 60.

[15]) Vgl. l.c. [7]), S. 571f. Man beachte die Druckfehler in S. 571, Formel (3).

Es kann also die Operation

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu|=\frac{1}{2}}\cdots\frac{1}{\nu}\,d\nu$$

gliedweise angewandt werden, wobei immer noch absolut gleichmäßige Konvergenz für

$$r_1<\varrho_1\leqq|w(z)|\leqq\varrho_2<r_2$$

erhalten bleibt.

Das Glied mit $n=0$ gibt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta.$$

Für $n=1, 2, 3, \ldots$ fassen wir wieder die Glieder mit n und $-n$ zusammen und erhalten, wenn wir die Integration über ζ sowie die Faktoren $\frac{1}{2\pi i}\,g(\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}$ fortlassen, den Grenzwert von

$$\frac{\pi\zeta^\nu(-1)^n}{\sin\pi\nu}\left[(\nu+n)\,J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\zeta\big)\,J_{\nu+n}\big((\nu+n)z\big)+\right.$$
$$\left.+(\nu-n)\,J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\zeta\big)\,J_{\nu-n}\big((\nu-n)z\big)\right]$$

für $\nu\to 0$. Dieser ist

$$2J_n(n\zeta)\,J_n(nz)+(-1)^n n\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\zeta\big)\,J_{\nu+n}\big((\nu+n)z\big)-\right.$$
$$\left.-J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\zeta\big)\,J_{\nu-n}\big((\nu-n)z\big)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$=2J_n(n\zeta)\,J_n(nz)+(-1)^n n\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_{\nu+n}\big((\nu+n)z\big)\,J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\zeta\big)+\right.$$
$$\left.+J_{-\nu-n}\big((\nu+n)z\big)\,J_{\nu+n}\big((\nu+n)\zeta\big)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$=2J_n(n\zeta)\,J_n(nz)+$$
$$+J_n(nz)\,2n\zeta\,J_n'(n\zeta)+$$
$$+J_n(n\zeta)\,2nz\,J_n'(nz)+$$
$$+J_n(nz)\,n\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_{\nu+n}(n\zeta)+(-1)^n J_{-\nu-n}(n\zeta)\right]\Big|_{\nu=0}+$$
$$+J_n(n\zeta)\,n\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_{\nu+n}(nz)+(-1)^n J_{-\nu-n}(nz)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$=J_n(nz)\left(L_n(n\zeta)+2n\zeta\,J_n'(n\zeta)\right)+$$
$$+\left(L_n(nz)+2nz\,J_n'(nz)\right)J_n(n\zeta).$$

Hier wurde beim Übergang zur zweiten Zeile

$$J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\zeta\big)\,J_{\nu-n}\big((\nu-n)z\big)=J_{-\nu+n}\big((n-\nu)\zeta\big)\,J_{\nu-n}\big((n-\nu)z\big)$$

beachtet und für die Berechnung von $\frac{\partial}{\partial\nu}\Big|_{\nu=0}$ die Substitution $-\nu$ statt ν vorgenommen.

Wir erhalten nun

SATZ 2. *Es sei gesetzt* $(n=0, 1, 2, \ldots)$

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_n(z) = J_n(nz) + 2nz\,J_n'(nz) + \\ \qquad + n\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(nz) - (-1)^n J_{\nu-n}(nz)\right]\Big|_{\nu=0}. \end{cases}$$

Dann ist

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}_n(z) = L_n(nz) + 2nz\,J_n'(nz).$$

Diese Funktionen sind für $0<|z|<\infty$ *eindeutig holomorph; sie haben in* 0 *einen Pol n-ter Ordnung.*

Ist $g(z)$ *für* $0\leqq r_1<|w(z)|<r_2\leqq 1$ *eindeutig holomorph, so ist bei absolut gleichmäßiger Konvergenz in abgeschlossenen Teilmengen eindeutig*

$$g(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n J_n(nz) + c_{-n}\mathfrak{Q}_n(z)\right)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,\mathfrak{Q}_n(\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,J_n(n\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

entwickelbar. Dementsprechend gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\oint J_n(nz)\,J_m(mz)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & (n=m=0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint \mathfrak{Q}_n(z)\,\mathfrak{Q}_m(z)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & (n=m=0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint J_n(nz)\,\mathfrak{Q}_m(z)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \delta_{nm} \quad (n, m=0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Ist speziell $g(z)$ *für* $|w(z)|<r_2$ *holomorph, so sind* $c_{-n}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. *Die Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(nz)$$

ist dann auch um 0 *absolut gleichmäßig konvergent.*

Hierzu ist nur noch zu bemerken, daß der Beweis von (3) — das entspricht der Eindeutigkeit — wie in **42** durch entsprechenden Grenzübergang $\nu\to 0$ erhalten wird. Wir können auf die Durchführung im einzelnen verzichten.

In Analogie zu den Neumannschen Polynomen $O_n(t)$ haben wir hier

$$(4)\qquad \varepsilon_n \mathfrak{O}_n(z) = Ph\left\{\frac{1-z^2}{z}\,\mathfrak{Q}_n(z)\right\} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

zu bilden. Es gilt

SATZ 3. *$\mathfrak{O}_n(z)$ ist ein Polynom $(n+1)$-ten Grades in $1/z$ ohne freies Glied. Es gilt*

$$\mathfrak{O}_0(z) = \frac{1}{z} \tag{5}$$

und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathfrak{O}_n(z) = (-1)^n \frac{n}{2} Ph\left\{\frac{1-z^2}{z} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{nz}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(nz)\Big|_{\nu=0}\right\} \tag{6}$$

bzw.

$$\mathfrak{O}_n(z) = -\frac{n\pi}{2} Ph\left\{\frac{1-z^2}{z} Y_n(nz)\right\} \tag{7}$$

bzw.

$$\mathfrak{O}_n(z) = n(1-z^2) O_n(nz) + \sin^2 n\frac{\pi}{2} + \cos^2 n\frac{\pi}{2} \cdot z. \tag{8}$$

Man hat die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \mathfrak{O}_n(z)\, \mathfrak{O}_m(z)\, dz = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_n(nz)\, \mathfrak{O}_m(z)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_n} & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{10}$$

Für

$$|w(z)| < |w(t)|, \qquad |w(z)| < 1$$

gilt

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \mathfrak{O}_n(t) J_n(nz). \tag{11}$$

Schließlich ist

$$\varepsilon_n \mathfrak{O}_n(z) = \lim_{\nu \to 0} \mathfrak{A}_{n,\nu}(z). \tag{12}$$

(5) bis (7) erhält man wie in **42**. Für (8) verfährt man entsprechend wie für **51**, (18) oder verwendet (12) zusammen mit **42**, (11) und **51**, (18).

(9) ist trivial; (10) folgt aus der dritten Zeile von (3). (11) ergibt sich mit Satz 2 und (4):

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) J_n(nz),$$

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{t-z} \frac{1-z^2}{z} \mathfrak{Q}_n(z)\, dz = \varepsilon_n \mathfrak{O}_n(z).$$

(12) ist richtig, weil nach den obigen Überlegungen **51**, (13) für $\nu \to 0$ in (11) übergehen muß.

Die $\mathfrak{O}_n(z)$ sind die Polynome von KAPTEYN[16]), zu denen unsere Theorie wieder einen bequemen Zugang eröffnete.

---

[16]) Vgl. l.c. [7]), S. 568—569.

Wir geben nun eine Herleitung des Kapteynschen Entwicklungssatzes und beweisen

SATZ 4. *$g(z)$ sei in $0 \leqq r_1 < |w(z)| < r_2 \leqq 1$ eindeutig holomorph. Dann läßt sich $g(z)$ eindeutig in eine in abgeschlossenen Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(n z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathfrak{O}_n(z)$$

entwickeln. Die Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, \mathfrak{O}_n(z)\, dz,$$

$$b_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, J_n(n z)\, dz.$$

Ist $g(z)$ auch um 0 holomorph, so gilt $b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(n z)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent. Ist $g(z)$ auch für $|w(z)| > r_1$ holomorph und verschwindet in ∞, so gilt $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathfrak{O}_n(z)$$

ist dann auch um ∞ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise sei $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ zerlegt, wo $g_0(z)$ für $|w(z)| < r_2$ und $g_\infty(z)$ für $|w(z)| > r_1$ holomorph sind und $g_\infty(\infty) = 0$ gilt. Es ist für $r_1 < \varrho < r$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w(t)|=\varrho} g(t)\, \frac{1}{t - z}\, dt = g_0(z) \qquad (|w(z)| < \varrho),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w(t)|=\varrho} g(t)\, \frac{1}{t - z}\, dt = g_\infty(z) \qquad (|w(z)| > \varrho).$$

Wir entwickeln nun gemäß Satz 2

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(n z).$$

Dabei sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, \mathfrak{Q}_n(z)\, \frac{1 - z^2}{z}\, dz$$

$$= \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g_0(z)\, \mathfrak{O}_n(z)\, dz = a_n$$

wegen (4). Weiter entwickeln wir gemäß Satz 2 in $r_1 < |w(z)| < 1$

$$\frac{z}{1 - z^2}\, g_\infty(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n J_n(n z) + c_{-n} \mathfrak{Q}_n(z)].$$

Wir multiplizieren mit $\frac{1-z^2}{z}$ und wenden die Operation

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w(z)|=\varrho}\frac{\cdots}{z-t}\,dz$$

für $|w(t)|>\varrho$, $r_1<\varrho<1$ an, was wegen gleichmäßiger Konvergenz gliedweise geschehen kann. Indem wir statt t wieder z schreiben, erhalten wir

$$g_\infty(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\,Ph\left\{\frac{1-z^2}{z}\,\mathfrak{Q}_n(z)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\,\varepsilon_n\,\mathfrak{D}_n(z).$$

Dabei sind

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z}{1-z^2}\,g_\infty(z)\,\frac{1-z^2}{z}\,J_n(n\,z)\,dz=\frac{b_n}{\varepsilon_n}.$$

Indem wir noch beachten, daß die Eindeutigkeit unserer Entwicklung mit den schon angegebenen Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen äquivalent ist, haben wir so Satz 4 voll bewiesen.

53. Asymptotische Formeln für $n\to+\infty$.

Die Theorie von **31** gab im dort notierten Satz 1 auch eine Formel für die Eigenlösungen bezüglich ihres Verhaltens bei wachsendem Index bzw. im entsprechenden Satz 2 auch eine diesbezügliche asymptotische Reihe. Die Konsequenzen dieser Tatsachen sind für den Spezielfall des Abschnitts **4** weniger interessant. Sie bestätigen in diesem allgemeinen Rahmen nur, daß die z-Potenzreihe für $J_\nu(z)$ zugleich asymptotische Reihe bezüglich ν ist.

Für die hier diskutierten Funktionen $J_\nu(\nu\,z)$ dürfte dagegen die Beachtung der erwähnten Sätze von Interesse sein. Wir beschränken uns hier darauf, die Folgerung der asymptotischen Formel von **31**, Satz 1 zu notieren.

Dazu ist an **51** anzuknüpfen. Für die entsprechenden Eigenlösungen von (4) hat man nach dem erwähnten Satze

$$v_{\nu+n}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi}v_{\nu+n}(\tau)\,e^{-i(\nu+n)\tau}\,d\tau\cdot e^{i(\nu+n)t}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

und zwar in jedem Streifen $0<\varepsilon\leqq\operatorname{Im}t\leqq T<\infty$ gleichmäßig. Die zu Beginn von **51** gegebene Transformation gestattet nun sofort die Umrechnung:

$$(1-z^2)^{\frac{1}{4}}J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint(1-\zeta^2)^{\frac{1}{4}}J_{\nu+n}\big((\nu+n)\zeta\big)\,[w(\zeta)]^{-\nu-n}\,\frac{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}\,d\zeta\,[w(z)]^{\nu+n}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Damit gilt gleichmäßig für

$$0<\varrho_1\leqq\left|\frac{z\exp\left((1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|\leqq\varrho_2<1$$

bei $n\to\pm\infty$

$$J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)=\frac{[(\nu+n)\,z]^{\nu+n}\exp\left[(\nu+n)\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\nu+n}\,\Gamma(\nu+n+1)\,[1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+n}\,(1-z^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Wie in Abschnitt 42 kann hier Gleichmäßigkeit bezüglich ν in kompakten Mengen, die keine ganze Zahl enthalten, bewiesen werden. So folgt — ähnlich dem Vorgehen in 42 —

$$J_\nu(\nu z) = \frac{(\nu z)^\nu \exp[\nu(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{e^\nu \Gamma(\nu+1)\,[1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu (1-z^2)^{\frac{1}{4}}}$$

zumindest für $\operatorname{Re}\nu \to \pm\infty$ gleichmäßig bezüglich $\operatorname{Im}\nu$ bei $|\operatorname{Im}\nu| \leqq \text{const}$ und gleichmäßig bezüglich obiger z. So erhält man also die asymptotische Formel von CARLINI und MEISSEL[17]).

6. Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\varkappa,\nu+n}(z)$, n ganz

Im folgenden sei stets

$$2\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

angenommen. Wir suchen dann Lösungen der Whittakerschen Diffferentialgleichung

$$y''(z) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{z} + \frac{\frac{1}{4}-\lambda}{z^2}\right) y(z) = 0 \tag{2}$$

mit der Umlaufseigenschaft

$$y(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})}\, y(z) \neq 0. \tag{3}$$

Offenbar sind die Eigenwerte genau

$$\lambda = (\nu+n)^2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{4}$$

die Eigenlösungen sind — bis auf konstanten Faktor bestimmt —

$$y = M_{\varkappa,\nu+n}(z). \tag{5}$$

Dazu bemerken wir, daß (2) mit $\lambda = \mu^2$ bekanntlich die Lösung

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}\, {}_1F_1(\mu-\varkappa+\tfrac{1}{2}; 2\mu+1; z) \tag{6}$$

hat, was natürlich unmittelbar nur für $2\mu+1 \neq 0, -1, -2, \ldots$ sinnvoll ist. Man erkennt speziell

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}\left(1 + z\,\mathfrak{P}(z)\right), \tag{7}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine ganze Funktion von z darstellt.

Die Whittakersche Differentialgleichung (2) geht mit

$$z = e^{it}, \qquad v(t) = z^{-\frac{1}{2}}\, y(z) \tag{8}$$

in die Hillsche Differentialgleichung

$$v''(t) + (\lambda - \varkappa\, e^{it} + \tfrac{1}{4}\, e^{2it})\, v(t) = 0 \tag{9}$$

[17]) Vgl. l.c. [7]), S. 7 und 227, bzw. die dort zitierten Originalarbeiten.

über, die die Periode 2π besitzt. (3) entspricht

$$v(t+2\pi) = e^{2\pi i \nu} v(t) \not\equiv 0. \tag{10}$$

Hier ist nun unmittelbar — nur mit der entsprechenden Modifikation bezüglich der Periode — die Theorie von **31** anwendbar. Dazu ist mit

$$v_{\nu+n}(t) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$
$$v^*_{\nu+n}(t) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z)$$

noch das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\nu+n}(t)\, v^*_{\nu+n}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\oint M_{\varkappa,\nu+n}(z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz = 1$$

zu berechnen, was aus (6) zu ersehen ist.

Damit erhält man

SATZ 1. *Sei 2ν nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint M_{\varkappa,\nu+n}(z)\, M_{\varkappa,-\nu-m}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz = \delta_{nm}. \tag{11}$$

Jede in einem Kreisring

$$0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz.$$

Unmittelbar ersichtlich wegen (6) sind folgende

ZUSÄTZE:

1. *$f(z)$ ist in der Form $z^{\nu+\frac{1}{2}}\, g(z)$ darstellbar, wo $g(z)$ im Kreisring eindeutig holomorph ist.*

2. *Ist hier $g(z)$ auch um 0 holomorph, so sind $c_n = 0$ für $n < 0$. Die Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^{-\nu-\frac{1}{2}}\, M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent.

Satz 1 stellt offenbar eine Verallgemeinerung bzw. Ergänzung eines Satzes von ERDELYI[18]) dar, der nur den Fall des Zusatzes 2 betrifft. Allerdings treten in den Koeffizientenformeln bei ERDELYI andere Funktionen auf, die den Gegenbauerschen Funktionen $A_{n,\nu}(t)$ entsprechen. Während ERDELYI spezielle Entwicklungen, nämlich die der Potenzen bzw. die der Funktion

$$\frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z},$$

durch Reihenumordnung beweist und damit seinen Satz erhält, können nun ausgehend von Satz 1 offenbar leicht spezielle Entwicklungen hergeleitet werden. Damit wird auch sofort wieder der Zusammenhang zwischen den Koeffizientenformeln von Satz 1 bzw. des Satzes von ERDELYI deutlich werden; ganz genau so wie im Abschnitt **41**, der wie wir bemerken sollten, im wesentlichen den Spezialfall $\varkappa = 0$ behandelt.

Wir entwickeln zunächst

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M'_{\varkappa,\nu+n}(z).$$

Man hat mit (6) sofort

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint z^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} M_{\varkappa,-\nu-n}(z) \frac{1}{z^2} dz \\ &= \frac{(-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2})_n}{(1-2\nu-2n)_n\, n!} \\ &= \frac{(\frac{1}{2}+\nu+\varkappa)_n}{(2\nu+n)_n\, n!}, \end{aligned}$$

also die bekannte Reihe

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})_n}{(2\nu+n)_n\, n!} M_{\varkappa,\nu+n}(z). \tag{12}$$

ERDELYI leitet aus (12) mittels Reihenumordnung die Entwicklung von $z^{\nu+\frac{1}{2}}$ her. Hier kann dies direkt geschehen.

Dazu berechnen wir zunächst die Potenzreihenentwicklung von $M_{\varkappa,\mu}(z)$: man hat

$$\begin{aligned} &z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r \frac{z^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu-\varkappa+\frac{1}{2})_s}{(2\mu+1)_s\, s!} z^s \\ &= z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s (\mu-\varkappa+\frac{1}{2})_s}{(2\mu+1)_s\, s!} 2^s, \end{aligned}$$

also

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, \mu-\varkappa+\frac{1}{2}; 2\mu+1; 2\right) \frac{z^n}{n!}. \tag{13}$$

Betrachten wir nun

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z),$$

[18]) ERDELYI, A.: Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam **39**, 1092–1098 (1936); vgl., insbes. Satz II.

so wird

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint z^{\nu+\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\,\frac{1}{z^2}\,dz$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2};1-2\nu-2n;2\right)\frac{1}{n!},$$

nämlich gerade der n-te Koeffizient in (13) für $\mu=-\nu-n$. Damit steht da:

$$(14)\quad \begin{cases} z^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\times \\ \qquad \times {}_2F_1\left(-n,-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2};1-2\nu-2n;2\right) M_{\varkappa,\nu+n}(z). \end{cases}$$

Ebenso kann jetzt direkt[19])

$$(15)\qquad \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\varkappa,\nu+n,n}(t)\,M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

für $|z|<|t|$ entwickelt werden. Wir erhalten

$$(16)\qquad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{z^{\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z)}{t-z}\,dz,$$

also

$$(17)\qquad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = Ph\left[t^{\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(t)\right].$$

Dies ist wieder offenbar unbekannt. Man erkennt sofort, daß es sich um Polynome in $1/t$ vom Grad $n+1$ ohne freies Glied handelt. Auch liest man aus (13) die explizite Darstellung[19])

$$(18)\quad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = t^{-n-1}\sum_{s=0}^{n} {}_2F_1\left(-s,-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2};1-2\nu-2n;2\right)\frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^s}{s!}$$

ab.

Es wäre nun offenbar leichte Rechenarbeit, mit (17) für die Polynome $A_{\varkappa,\nu+n,n}(t)$ Rekursionsformeln, Differentialgleichung oder ähnliches aufzuschreiben, also entsprechende Formeln zu notieren, wie sie für die Polynome $O_n(t)$ von NEUMANN und die Polynome $A_{n,\nu}(t)$ von GEGENBAUER bekannt sind. Man hat eben nur entsprechende Formeln für die $M_{\varkappa,-\nu-n}(t)$ zu benutzen. Da einerseits kein unmittelbares Interesse für derartige Formeln ersichtlich ist, und da andererseits ihre Existenz und qualitative Struktur mit (17) deutlich sind, kann auf die explizite Aufstellung wohl verzichtet werden.

Wir haben dagegen noch zu vermerken, daß für den Fall des Zusatzes 2 von Satz 1 mit (17) offenbar

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\,\frac{1}{z^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint g(z)\,A_{\varkappa,\nu+n,n}(z)\,dz$$

wird. Das ist die Koeffizientenformel von ERDELYI.

[19]) Vgl. l.c. [18]), S. 4.

Auch die weiteren Resultate der Note von ERDELYI können aus unseren Überlegungen schnell entnommen werden. So folgt aus der asymptotischen Aussage von **31**, Satz 1 hier — nach Ergänzung durch Gleichmäßigkeitsbetrachtung bezüglich ν analog zu **42** bzw. **53** —

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \tag{19}$$

für $\operatorname{Re}\mu \to \pm\infty$ gleichmäßig bezüglich z in kompakten Mengen ohne 0 und bezüglich $|\operatorname{Im}\mu| \leqq \text{const}$, wenn man nur $|2\mu + n| \geqq \text{const} > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ fordert[20]). Schließlich kann die von ERDELYI angegebene Entwicklung in einem Kreisring nach den Funktionen $z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\nu+n}(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und den Funktionen $A_{\varkappa,\nu+n,n}(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ aus Satz 1 und (17) mit der Methode zum Beweise von **42**, Satz 5 erhalten werden: Man zerlegt

$$g(z) = g_0(z) + g_\infty(z),$$

entwickelt

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_{\varkappa,\nu+n}(z),$$

$$z^{-\nu+\frac{1}{2}} g_\infty(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n M_{\varkappa,-\nu-n}(z)$$

und geht bei der zweiten Zeile zu den Polhauptteilen über:

$$g_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_{\varkappa,\nu+n,n}(z).$$

Als Beispiel einer mit unsern Methoden leicht zu gewinnenden neuen Reihenentwicklung betrachten wir

$$z^{\nu-\mu} e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}} M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z).$$

Man rechnet:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint z^{\nu-\mu-2} e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}} M_{\varrho,\mu}(\alpha z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, dz \\ &= \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}}{2\pi i} \oint z^{-n-1} F\left(\mu - \varrho + \frac{1}{2};\ 2\mu + 1;\ \alpha z\right) \times \\ &\quad \times F\left(-\nu - n - \varkappa + \frac{1}{2};\ 1 - 2\nu - 2n;\ z\right) dz \\ &= \alpha^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\mu - \varrho + \frac{1}{2})_\nu (-\nu - n - \varkappa + \frac{1}{2})_{n-\nu} \alpha^\nu}{(2\mu+1)_\nu (1 - 2\nu - 2n)_{n-\nu} (n-\nu)!\, \nu!} \\ &= \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} + \nu + \varkappa)_n}{n!\,(2\nu+n)_n} {}_3F_2\left(-n,\ 2\nu+n,\ \mu - \varrho + \frac{1}{2};\ 2\mu+1,\ \nu+\varkappa+\frac{1}{2};\ -\alpha\right), \end{aligned}$$

wobei

$$(1 - \sigma - n)_{n-\nu} = (-1)^{n-\nu} \frac{(\sigma)_n}{(\sigma)_\nu}$$

[20]) Vgl. l. c. [18]), § 3.

benutzt wurde. So haben wir also

$$(20)\quad \begin{cases} z^{\nu-\mu}\, e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}}\, M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+\nu+\varkappa)_n}{n!\,(2\nu+n)_n} \times \\ \times\, {}_3F_2\Big(-n,\, 2\nu+n,\, \mu-\varrho+\frac{1}{2};\, 2\mu+1,\, \nu+\varkappa+\frac{1}{2};\, -\alpha\Big) M_{\varkappa,\nu+n}(z). \end{cases}$$

Hierin sind natürlich interessante Spezialfälle enthalten, so etwa $\mu=\nu$, $\varrho=-\varkappa$, wo

$${}_3F_2(\ldots) = {}_2F_1(-n,\, 2\nu+n;\, 2\nu+1;\, -\alpha)$$

wird, oder $\varrho=0$ (eventuell mit $\alpha=-1$), oder $\varkappa=0$ (eventuell mit $\alpha=-1$).

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß es interessant wäre, $2\nu=$ ganze Zahl als Grenzfall analog dem Vorgehen in **42** bzw. **52** zu diskutieren. Das sei jedoch einer späteren Note vorbehalten.

7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen

71. Eigenlösungen und Transformation der Legendreschen Differentialgleichung.

711. Sei $\nu+\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl. Wir suchen Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$(1)\qquad [(1-z^2)\,y'(z)]' + [\lambda - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\,y(z) = 0$$

mit der Umlaufseigenschaft (um die Strecke $[-1, 1]$)

$$(2)\qquad y(z\,e^{\pi i}) = e^{-\pi i(\nu+1)}\,y(z) \not\equiv 0.$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda = (\nu+2n)(\nu+2n+1) \qquad (n \text{ ganz}),$$

die Eigenlösungen (bis auf konstanten Faktor)

$$y(z) = \widetilde{\Omega}^{\mu}_{\nu+2n}(z).$$

Dazu sei an[21])

$$(3)\quad \begin{cases} \widetilde{\Omega}^{\mu}_{\nu}(z) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\, z^{-\nu-\mu-1} \times \\ \qquad \times\, {}_2F_1\Big(\dfrac{\nu+\mu+1}{2},\, \dfrac{\nu+\mu+2}{2};\, \nu+\dfrac{3}{2};\, z^{-2}\Big) \end{cases}$$

erinnert. Es ist

$$(4)\qquad \Omega^{\mu}_{\nu}(z) = e^{i\mu\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)\,\widetilde{\Omega}^{\mu}_{\nu}(z).$$

$\widetilde{\Omega}^{\mu}_{\nu}(z)$ ist im Gegensatz zu $\Omega^{\mu}_{\nu}(z)$ eine ganze Funktion von ν und μ. Man hat

$$(5)\qquad \widetilde{\Omega}^{-\mu}_{\nu}(z) = \widetilde{\Omega}^{\mu}_{\nu}(z).$$

Zu denselben Eigenwerten sind

$$y(z) = \widetilde{\Omega}^{\mu}_{-\nu-2n-1}(z)$$

[21]) Vgl. MS. S. 252f. (vgl. Anm.[1]) Math. Z., Bd. 74, S. 436 im I. Teil).

Eigenlösungen für die Umlaufseigenschaft

$$y(z\,e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu}\, y(z) \not\equiv 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\nu \neq -\nu - 1 + 2k$, k ganz, also

$$e^{\pi i \nu} \neq e^{-\pi i(\nu+1)}.$$

Um mit Hilfe der Theorie von **31** einen Entwicklungssatz zu erhalten, soll (1) auf eine Hillsche Differentialgleichung transformiert werden.

Wir rechnen — im Hinblick auf eine weitere Anwendung — allgemeiner

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + [\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\,y(z) = 0 \tag{6}$$

mit

$$\frac{dt}{dz} = b(z), \qquad y(z) = a(z)\,v(t) \tag{7}$$

um und notieren mit $\cdot$ die Ableitung nach t. Es entsteht

$$\begin{cases} (1-z^2)\,b^2\,a\,\ddot{v} + \{[(1-z^2)\,a\,b]' + (1-z^2)\,a'\,b\}\,\dot{v} + \\ \quad + \{[(1-z^2)\,a']' + [\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\,a\}\,v = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Für den oben genannten Zweck erhält man mit

$$b(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad a(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{4}} \tag{9}$$

die Differentialgleichung

$$\ddot{v} + \{(\nu+\tfrac{1}{2})^2 - (\mu^2 - \tfrac{1}{4})\,(1-z^2)^{-1}\}\,v = 0. \tag{10}$$

Indem wir genauer

$$t = \frac{\pi}{2} - \int_0^z (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\zeta = \arccos z,$$

$$z = \cos t, \qquad 1 - z^2 = \sin^2 t$$

setzen und bei $\zeta = 0$ vom Hauptwert ausgehen, bilden wir die Halbebene

$$\operatorname{Im} t < 0$$

eineindeutig auf die unendlich oft überlagerte z-Ebene ohne den Schnitt $-1 \leqq z \leqq 1$ ab. Dabei entspricht

$$z \to z\,e^{\pi i}$$

offenbar

$$t \to t + \pi;$$

dies z. B. wegen

$$\oint \frac{-i}{z}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = 2\pi.$$

(10) ist damit Hillsche Differentialgleichung.

712. Sei jetzt μ nicht ganz. Wir suchen Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + [\nu(\nu+1) - \lambda(1-z^2)^{-1}]\,y(z) = 0 \tag{11}$$

mit der Umlaufseigenschaft (um $z=1$)

$$y\left(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\right) = e^{\pi i\mu}\,y(z) \not\equiv 0. \tag{12}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda = (\mu+2n)^2 \qquad (n \text{ ganz}),$$

die Eigenlösungen (bis auf konstanten Faktor)

$$y(z) = \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z).$$

Wir erinnern dazu an

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1-z}{2}\right) = \mathfrak{P}_{-\nu-1}^{-\mu}(z). \tag{13}$$

Zu denselben Eigenwerten sind

$$y(z) = \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)$$

Eigenlösungen für die Umlaufseigenschaft

$$y\left(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\right) = e^{-\pi i\mu}\,y(z) \not\equiv 0.$$

Um auch hier einen Entwicklungssatz zu erhalten, wird wieder auf eine entsprechende Hillsche Differentialgleichung transformiert. Wir können an (6), (7), (8) anschließen. Man wird hier

$$b(z) = -\,i\,(z^2-1)^{-1}, \qquad a(z) = 1 \tag{14}$$

wählen und

$$\ddot{v} + \{\mu^2 - \nu(\nu+1)\,(1-z^2)\}\,v = 0 \tag{15}$$

erhalten. Genauer wird man mit

$$t = -\,i\int_{\infty e^{i0}}^{z} (\zeta^2-1)^{-1}\,d\zeta = \frac{1}{2i}\log\frac{z-1}{z+1} \tag{16}$$

die Halbebene $\operatorname{Im} t>0$ auf die in $z=1$ punktierte unendlich oft überdeckte Halbebene $\operatorname{Re} z>0$ abbilden. Dabei entspricht einmaliger positiver Umlauf um $z=1$ gerade $t\to t+\pi$. (15) ist damit Hillsche Differentialgleichung.

72. Reihenentwicklungen nach den Funktionen $\mathfrak{Q}_{\nu+n}^{\mu}(z)$ (n ganz).

Wir können nun gemäß **711** die Theorie von **31** auf die Legendresche Differentialgleichung anwenden. Es ist bequem die Resultate für ν und für $\nu+1$ anstatt ν gemeinsam zu formulieren, da man dann nur ganze Umläufe um die Strecke $[-1, 1]$ zu notieren braucht.

Da man mit (3) und (5) die Normierungsintegrale leicht hinschreiben kann erhält man so den

SATZ 1. *Sei $\nu+\frac{1}{2}$ nicht ganz. Dann gilt für ganze n, m*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \tilde{\Omega}^{\mu}_{\nu+n}(z)\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\nu-m-1}(z)\,dz=\frac{\cos\pi(\nu+n)}{2(\nu+n)+1}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem konfokalen Ellipsenring mit den Brennpunkten $+1$, -1, d.h. für

$$1\leqq r_1<|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|<r_2\leqq\infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\,e^{2\pi i})=e^{-2\pi i\nu}f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jedem kompakten Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Es gilt

$$c_n=\frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)\cdot 2\pi i}\oint f(z)\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\nu-n-1}(z)\,dz.$$

ZUSÄTZE. 1. *Gilt*

$$f(z\,e^{\pi i})\equiv e^{-\pi i(\nu+1)}f(z),$$

so ist

$$c_n=0,\qquad (n\ \textit{ungerade});$$

gilt dagegen

$$f(z\,e^{\pi i})\equiv e^{-\pi i\nu}f(z),$$

so ist

$$c_n=0\qquad (n\ \textit{gerade}).$$

2. *Gilt*

$$r_2=\infty,$$

$$f(z)=z^{-\nu-1}g(z),$$

und ist $g(z)$ in ∞ holomorph, so sind

$$c_n=0\qquad (n<0).$$

Die Zusätze sind mit der Koeffizientendarstellung auf Grund von (3) leicht zu verifizieren.

Von besonderem Interesse ist der Fall $\nu=\mu$, wobei wir $\mu+\frac{1}{2}$ als nicht ganz voraussetzen. Hier wird für

$$\nu=-1,-2,-3,\ldots$$

die Funktion

$$\tilde{\Omega}^{\mu}_{\mu+\nu}(z)=(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}F_{-\mu,-\nu-1}(z),$$

wo

$$F_{\mu,-\nu-1}(z)$$

ein Polynom in z vom genauen Grad $-\nu-1$ ist; ebenso wird — das ist wegen (5) nur eine andere Schreibweise derselben Tatsache — für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

die Funktion

$$\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-\nu-1}(z) = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} F_{\mu,\nu}(z).$$

Das zeigt (3).

Damit läßt sich aus Satz 1 folgern:

SATZ 2. *Sei $\mu+\frac{1}{2}$ nicht ganz. Dann läßt sich jede im Innern einer Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1 holomorphe Funktion $g(z)$ in eine Reihe*

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m F_{\mu,m}(z)$$

entwickeln, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$d_m = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)\cdot 2\pi i} \oint (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z)\, \tilde{\Omega}^{\mu}_{\mu+m}(z)\, dz.$$

Zum Beweise wird man

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z) = f(z)$$

setzen und Satz 1 anwenden. Mit

$$m = -n-1, \qquad c_n = d_m$$

entsteht dann

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m \tilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-m-1}(z).$$

Dabei sind aber für $m = -1, -2, -3, \ldots$

$$d_m = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)\cdot 2\pi i} \oint g(z)\, F_{-\mu,-m-1}(z)\, dz = 0.$$

Daß sich die Konvergenzeigenschaften von einem Ellipsenring auf das ganze Innere übertragen, ist klar, da es sich um dort holomorphe Funktionen handelt.

Die Polynome $F_{\mu,\nu}(z)$ sind im wesentlichen die Gegenbauerschen Polynome. Man hat nämlich[22])

$$\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-\nu-1}(z) = \cos(\mu+\nu)\pi \cdot \Gamma(2\mu+\nu+1)\, \mathfrak{P}^{-\mu}_{\mu+\nu}(z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und[23])

$$C^{\mu+\frac{1}{2}}_{\nu}(z) = \frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+1)\,\nu!}\, \Gamma(2\mu+\nu+1)\, (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\, \mathfrak{P}^{-\mu}_{\mu+\nu}(z).$$

Danach ist

$$F_{\mu,\nu}(z) = \frac{2^{\mu}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \cos(\mu+\nu)\pi \cdot \nu!\quad C^{\mu+\frac{1}{2}}_{\nu}(z),$$

[22]) Vgl. MS, S. 258.

[23]) Vgl. ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI: Higher transcendental functions, I, S. 175, Formel (4).

wenn man nach dem Multiplikationssatz von LEGENDRE

$$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)$$

umrechnet. Entwicklung und Koeffizientenformel von Satz 2 schreibt man damit zu

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} k_m\, C_m^{\mu+\frac{1}{2}}(z), \tag{17}$$

$$k_m = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{2(\mu+m)+1}{2\pi i}\,m!\oint (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,g(z)\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(z)\,dz \tag{18}$$

um. Ohne Durchführung des Beweises (analog zu Überlegungen in **4** sei bemerkt, daß der Entwicklungssatz in dieser Form auch für $\mu+\frac{1}{2}=1, 2, 3, \ldots$ gültig bleibt. (Für $\mu+\frac{1}{2}=0, -1, -2, \ldots$ ist kein Resultat zu erwarten, da dann nur endlich viele Gegenbauersche Polynome vorhanden sind[24]).)

Wir bemerken noch, daß für $\mu=0$

$$C_m^{\frac{1}{2}}(z) = P_m(z),$$

Legendresches Polynom, wird; dann ist mit (4)

$$k_m = \frac{2m+1}{2\pi i}\oint g(z)\,\mathfrak{Q}_m(z)\,dz.$$

Im folgenden seien nur einige wenige Beispiele von Reihenentwicklungen notiert. Zunächst betrachten wir

$$g(z) = \frac{1}{t-z}$$

für $|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}| < |t+(t^2-1)^{\frac{1}{2}}|$ und wenden Satz 2 an. Man hat

$$d_m(t) = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos(\mu+m)\pi}\,\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{t-z}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(z)\,dz.$$

Nun ist

$$z\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(z)$$

für $m=0, 1, 2, \ldots$ nach (3), (5) in ∞ regulär. Daher wird

$$d_m(t) = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)}\,(t^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(t).$$

So ist bewiesen[24a])

$$\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,(t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{t-z} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)}\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{-\mu-m-1}^{\mu}(z)\,\tilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(t) \tag{19}$$

[24]) Vgl. l.c. [23]), S. 175, Formel (1).

[24a]) Vgl. T. MACROBERT: Phil. Mag. (7) **35**, 670–680 (1944).

bzw.

$$(20)\quad \frac{(t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{t-z} = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}[2(\mu+m)+1]\,m!\;C_m^{\mu+\frac{1}{2}}(z)\,\mathfrak{T}_{\mu+m}^{\mu}(t)$$

und insbesondere für $\mu=0$

$$(21)\quad \frac{1}{t-z} = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(z)\,\mathfrak{Q}_m(t).$$

(21) ist die Entwicklung von HEINE[25]). Von ihr ausgehend hat C. NEUMANN[26]) den Spezialfall $\mu=0$ von Satz 2 entwickelt, sowie auch den Spezialfall $\nu=\mu=0$ von Satz 1.

Wir betrachten nunmehr die Entwicklung gemäß Satz 1

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,z^{-\nu-\mu-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\mathfrak{T}_{\nu+n}^{\mu}(z)$$

mit

$$c_n = \frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,z^{-\nu-\mu-1}\,\mathfrak{T}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z)\,dz.$$

Man wird mit (3), (5)

$$\mathfrak{T}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z) = \frac{\sqrt{\pi}\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\,z^{\nu+\mu+n}}{2^{-\nu-n}\,\Gamma(-\nu-n+\frac{1}{2})}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{-\nu-n-\mu+1}{2},\ \frac{-\nu-\mu-n}{2};\ -\nu-n+\frac{1}{2};\ z^{-2}\right)$$

benutzen. Dann erhält man aus den Koeffizienten der hier auftretenden hypergeometrischen Reihe sofort die gesuchten c_n. Es ergibt sich

$$(22)\quad \begin{cases}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,z^{-\nu-\mu-1}\\ \qquad = \dfrac{\sqrt{\pi}\,2^\nu}{\cos\pi\nu}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\nu+4k+1}{\Gamma(-\nu-k+\frac{1}{2})}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu)}{\Gamma(-\nu-\mu-2k)}\,\frac{1}{k!}\,\mathfrak{T}_{\nu+2k}^{\mu}(z).\end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann die Entwicklung von

$$(z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\mu}$$

gewonnen werden. Man substituiert in

$$c_n = \frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint (z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)]^{-\nu-\mu}\,\mathfrak{T}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z)\,dz$$

einmal

$$[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}] = \zeta, \qquad dz = (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-1}\,d\zeta,$$

[25]) HEINE, E.: Crelle's J. **42**, 72 (1851).

[26]) Über die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen. Halle 1862.

dann [27])

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{-\nu-n-1}(z)=\frac{e^{\mu\pi i}}{\Gamma(-\nu-n-\mu)}\,\mathfrak{Q}^{-\mu}_{-\nu-n-1}(z)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-\mu}}{\Gamma(-\nu-n+\frac{1}{2})}\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\,\zeta^{\nu+n+\mu}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{2}-\mu,-\nu-n-\mu;-\nu-n+\frac{1}{2};\zeta^{-2}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$(23)\quad\begin{cases}(z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\mu}\\ =\dfrac{\sqrt{\pi}\,2^{-\mu}}{\cos\pi\nu}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\nu+4k+1}{\Gamma(-\nu-k+\frac{1}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+k)\,\Gamma(-\nu-k-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)\,\Gamma(-\nu-2k-\mu)}\,\frac{1}{k!}\,\widetilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu+2k}(z).\end{cases}$$

73. REIHENENTWICKLUNGEN NACH DEN FUNKTIONEN $\mathfrak{P}_{\nu}^{-(\mu+2n)}(z)$ (n GANZ).

Wir wenden nunmehr die Theorie von **31** auf die gemäß **712** umgerechnete Legendresche Differentialgleichung an. Hier wird man die Abkürzung — vgl. (16) —

$$(24)\qquad u=e^{2it}=\frac{z-1}{z+1}$$

verwenden. Für eine in $\operatorname{Im}t>0$ holomorphe π-periodische Funktion $F(t)$ ist dann

$$G(u)=F(t)$$

in $0<|u|<1$ eindeutig holomorph und umgekehrt. Dabei ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(t)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\oint G(u)\,u^{-1}\,du.$$

Wir benötigen nun das Normierungsintegral — nach (13) —:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu}(z)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu}(z)\,u^{-1}\,du=\frac{1}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1-\mu)}=\frac{\sin\pi\mu}{\pi\mu}.$$

Damit kann formuliert werden:

SATZ 3. *Sei μ nicht ganz. Dann gilt für ganze n, m*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2m}(z)\,u^{-1}\,du=\frac{\sin\pi\mu}{\pi(\mu+2n)}\,\delta_{nm},\qquad u=\frac{z-1}{z+1}.$$

Jede in einem Ringgebiet

$$0\leqq r_1<\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<r_2\leqq 1$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f\big(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\big)=e^{\pi i\mu}f(z)$$

[27]) Vgl. l.c. [23]), S. 136/137, Formel (45).

läßt sich dort eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z)$$

entwickeln, die in jedem kompakten Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin \pi\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)\, u^{-1}\, du.$$

ZUSATZ. *Ist*

$$f(z) = (z-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z)$$

und $g(z)$ um $z=1$ holomorph, so gilt

$$c_n = 0 \qquad (n<0).$$

Die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z)$$

ist dann auch um $z=1$ absolut gleichmäßig konvergent.

Als erste Anwendung entwickeln wir

$$f(z) = \frac{2^\nu (z+1)^{-\nu} u^{\frac{\mu}{2}}}{v-u}$$

mit

$$u = \frac{z-1}{z+1}$$

für

$$|u| < \min(1, |v|).$$

Wir erhalten

$$c_n = \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin \pi\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2^\nu (z+1)^{-\nu} u^{\frac{\mu}{2}}}{v-u} \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)\, u^{-1}\, du.$$

Man wird nun[28])

$$\mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z) = \frac{2^{-\nu}(z+1)^\nu}{\Gamma(1-\mu-2n)} u^{-\frac{\mu}{2}-n}\, {}_2F_1(-\nu, -\nu-\mu-2n; 1-\mu-2n; u)$$

einsetzen. Dann wird

$$c_n = \Gamma(1+\mu+2n) \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u^{-n-1}}{v-u}\, {}_2F_1(.,.;.;u)\, du,$$

also für $n=0, 1, 2, \ldots$ (vgl. den Zusatz zu Satz 3)

$$c_n = \Gamma(1+\mu+2n)\, Ph\, v^{-n-1}\, {}_2F_1(-\nu, -\nu-\mu-2n; 1-\mu-2n; v)$$
$$= B_{\nu,n}^{\mu}(v).$$

[28]) Vgl. l.c. [23]), S. 124, 125, Formel (16).

Dabei bedeutet Ph den Polhauptteil bei $v=0$. Damit ist $B^{\mu}_{\nu,n}(v)$ ein mit v^{-1} multipliziertes Polynom vom Grad n in v^{-1}. Wir notieren

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{2^{\nu}(z+1)^{-\nu-\frac{\mu}{2}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{v-\dfrac{z-1}{z+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B^{\mu}_{\nu,n}(v)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z), \\ \qquad \left(\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < \min\left(1,|v|\right)\right), \end{cases}$$

$$(26)\quad B^{\mu}_{\nu,n}(v) = \Gamma(1+\mu+2n)\,Ph\,v^{-n-1}\,{}_2F_1(-\nu,-\nu-\mu-2n;1-\mu-2n;v).$$

Ein weiteres Beispiel ist die Entwicklung von

$$f(z) = 2^{\nu}(z+1)^{-\nu}u^{\frac{\mu}{2}},$$

wo man analog zu eben

$$c_n = \Gamma(1+\mu+2n)\,\frac{1}{2\pi i}\oint u^{-n-1}\,{}_2F_1(-\nu,-\nu-\mu-2n;1-\mu-2n;u)\,du$$
$$= \frac{\Gamma(1+\mu+2n)}{\Gamma(1-\mu-n)}\,\frac{\Gamma(1-\mu-2n)}{n!}\,\frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu-n)}{\Gamma(-\nu-\mu-2n)}$$

erhält. Damit gilt für $\operatorname{Re} z>0$

$$(27)\quad \begin{cases} 2^{\nu}(z+1)^{-\nu-\frac{\mu}{2}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}} \\ \quad = \dfrac{\pi}{\sin\pi\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu+2n}{\Gamma(1-\mu-n)}\,\frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu-n)}{\Gamma(-\nu-\mu-2n)}\,\frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z). \end{cases}$$

Auch die Entwicklung

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}}{t-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} D^{\mu}_{\nu,n}(t)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z), \\ \qquad \left(\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < \min\left(1,\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right)\right), \end{cases}$$

kann angegeben werden. Man berechnet

$$D^{\mu}_{\nu,n}(t) = \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin\pi\mu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{t-z}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2n}(z)\,\frac{2}{z^2-1}\,dz$$
$$= \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin\pi\mu}\,Ph\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2n}(t)\,\frac{2}{t^2-1},$$

wo Ph den Polhauptteil um $t=1$ bezeichnet. So hat man

$$(29)\quad \begin{cases} D^{\mu}_{\nu,n}(t) = \Gamma(1+\mu+2n)\,Ph\,\dfrac{2}{t^2-1}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^{-n}\times \\ \qquad \times\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu-2n;\dfrac{1-t}{2}\right). \end{cases}$$

Dies ist wieder ein mit $(t-1)^{-1}$ multipliziertes Polynom vom Grade n in $(t-1)^{-1}$.

74. Asymptotische Formeln.

Zum Schluß sei der Vollständigkeit halber notiert, daß mit **31** die bekannten asymptotischen Formeln

$$(30)\quad \widetilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu+2n}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Gamma(\nu+2n+\frac{3}{2})}\,(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\left(z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\nu+2n+\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

— gleichmäßig bezüglich z in kompakten Gebieten ohne $-1 \leqq z \leqq 1$ — und

$$(31)\quad \mathfrak{P}^{-\mu-2n}_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\mu+2n)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}+n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

— gleichmäßig in kompakten Teilgebieten von

$$0 < \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$$

— erhalten werden können. Wie in **42** können (30) und (31) erweitert werden, indem man Gleichmäßigkeit bezüglich ν bzw. μ in kompakten Gebieten ohne halbzahlige ν bzw. ganzzahlige μ beweist.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Köln

(Eingegangen am 29. Februar 1960)

MEULENBELD, B.
Math. Zeitschr. 75, 192—200 (1961)

The generalized Legendre functions with special relations between the parameters

By
B. MEULENBELD

1. Introduction

In the present note we derive properties of the generalized Legendre functions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$, introduced by KUIPERS and the author in [1], for special values of the parameters k, m and n. On the crosscut we restrict $z=x$ to lie in the interval $-1<x<1$, and we define:

$$(1)\qquad \begin{cases} P_k^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\{e^{\frac{1}{2}\pi i m}P_k^{m,n}(x+0\,i)+e^{-\frac{1}{2}\pi i m}P_k^{m,n}(x-0\,i)\} \\ Q_k^{m,n}(x)=\frac{1}{2}e^{-\pi i m}\{e^{-\frac{1}{2}\pi i m}Q_k^{m,n}(x+0\,i)+e^{\frac{1}{2}\pi i m}Q_k^{m,n}(x-0i)\}, \end{cases}$$

where $f(x\pm 0\,i)$ means $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x\pm i\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

It is wellknown that the associated Legendre functions $R_k^m(z)$ (R denotes both P and Q) satisfy the differential equation:

$$(2)\qquad R_k^m(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m R_k(z)}{dz^m}\ (m \text{ is an integer} \geqq 0),$$

valid over the whole plane of z with the crosscut, and which gives the connection between $R_k^m(z)$ and $R_k(z)$.

In section 2 we shall give an extension of (2), representing a similar relation between $R_k^{m,n}(z)$ and $R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)$.

In section 3 we shall show that $R_k^{m,n}(z)$ with $k=\pm\frac{1}{2}(m\pm n)$ can be expressed in terms of incomplete betafunctions.

In [5], 76 ROBIN proved that $R_k(x)$ $(-1<x<1)$ with k half an odd integer can be expressed in terms of the elliptic integrals

$$E(s)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-s^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi \quad \text{and} \quad K(s)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-s^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

In section 4 we prove that this is also true for $R_k^m(x)$ (k is half an odd integer and m is an integer). For the sake of brevity we put

$$\alpha=k+\tfrac{1}{2}(m+n),\quad \beta=k-\tfrac{1}{2}(m-n),\quad \gamma=k+\tfrac{1}{2}(m-n),\quad \delta=k-\tfrac{1}{2}(m+n).$$

In section 5 we consider $R_k^{m,n}(z)$, in which one of the four numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ is integral.

Finally in section 6 we derive extensions of CHRISTOFFEL's summation-formula.

2. Extension of formula (1)

In [6], (5) has been shown that if $\frac{1}{2}(n-m)$ is a positive integer or 0, we have

$$(3)\qquad P_k^{m,n}(z)=\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}\Gamma(\gamma+1)\,2^{\frac{1}{2}(n-m)}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}P_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)\right\}.$$

Starting from the expansion (see [2], (8))

$$Q_k^{m,n}(z)=\frac{e^{\pi i m}2^{-m+n-1}\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(-m)\,(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\delta+1)}\times$$
$$\times F\{-\beta,\gamma+1;1+m;\tfrac{1}{2}(1-z)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}e^{\pi i m}\Gamma(m)\,(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{-\frac{1}{2}m}F\{-\gamma,\beta+1;1-m;\tfrac{1}{2}(1-z)\},$$

and employing the relations (see [9], 2.8):

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-n)}z^{c-1-n}(1-z)^{a+b-c-n}F\{a-n,b-n;c-n;z\}$$
$$=\left(\frac{d}{dz}\right)^n\{z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}F\{a,b;c,;z\}\}$$

and

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n F\{a,b;c;z\}=\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+n)}F\{a+n,b+n;c+n;z\};$$

it is easily found that $Q_k^{m,n}(z)$ also satisfies (3), so that we have:

$$R_k^{m,n}(z)=\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}\Gamma(\gamma+1)\,2^{\frac{1}{2}(n-m)}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)\right\}$$

$[\frac{1}{2}(n-m)$ is an integer $\geqq 0]$.

Employing the definitions (1) of the functions for $z=x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we deduce

$$R_k^{m,n}(\cos\vartheta)=\frac{2^{n-m}\cos^n\frac{1}{2}\vartheta\,\Gamma(\gamma+1)}{\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\,\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}\right\}.$$

3. $R_k^{m,n}(z)$ for $k=\pm\frac{1}{2}(m\pm n)$

a) For $|1-z|<2$, z not lying on the crosscut, we have:

$$P_{\frac{1}{2}(m+n)}^{m,n}=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\,\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}}F\left\{-m,n+1;1-m;\frac{1}{2}(1-z)\right\}.$$

This series may be summed up by means of the formula

$$(4)\qquad B_z(a,b)=a^{-1}z^aF\{a,1-b;a+1;z\},$$

valid for $\operatorname{Re}a>0$ (see [9], (2.5.3)), and where $B_z(a,b)$ represents the incomplete betafunction:

$$B_z(a,b)=\int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

Thus we find for $\operatorname{Re}m<0$:

$$P_{\frac{1}{2}(m+n)}^{m,n}=\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1-m)\,(z-1)^{\frac{1}{2}m}}(-m)\left(\frac{1-z}{2}\right)^m B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m,-n)$$
$$=\frac{e^{\mp\pi i m}2^{-m}}{\Gamma(-m)}(z-1)^{\frac{1}{2}m}(z+1)^{\frac{1}{2}n}B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m,-n),$$

the upper or lower sign being taken in the exponential, according as $\mathrm{Im}(z)$ is positive or negative.

In a similar way we find for $\mathrm{Re}\, m < 0$:

$$(5) \qquad P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{2^{-m}}{\Gamma(-m)}(z-1)^{\frac{1}{2}m}(z+1)^{\frac{1}{2}n} B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1).$$

For $\mathrm{Re}\, m \geqq 0$ we transform (5):

$$B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1) = B_1(m+n+1, -m) - B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m),$$

where the second term is meaningful for $\mathrm{Re}(m+n) > -1$.

Since

$$B_1(m+n+1, -m) = \frac{\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(-m)}{\Gamma(n+1)},$$

it follows

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}m}(z+1)^{\frac{1}{2}n} 2^{-m} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{1}{\Gamma(-m)} B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m) \right\}.$$

These formulas hold good in the whole plane of z with the crosscut by analytical continuation.

For $z = x = \cos\vartheta\ (0 < \vartheta < \pi)$ we obtain if $\mathrm{Re}\, m < 0$:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)} \cos^n \frac{1}{2}\vartheta \sin^m \frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(-m)} B_{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}(-m, -n).$$

For $\mathrm{Re}\, m \geqq 0$ we may use the analytical continuation of the function $B_z(a, b)$. Applying the formula:

$$B_z(a, b) = \Gamma(a)\,\Gamma(b) \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} \frac{z^{a+q}(1-z)^{b-q-1}}{\Gamma(a+q+1)\,\Gamma(b-q)} + \frac{B_z(a+p, b-p)}{\Gamma(a+p)\Gamma(b-p)} \right\}$$

we find, if $p - 1 \leqq \mathrm{Re}(m) < p$, p a positive integer:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = 2^{\frac{1}{2}(n-m)}\,\Gamma(-n) \cos^n \frac{1}{2}\vartheta \sin^m \frac{1}{2}\vartheta \times \\ \times \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} \frac{(\sin\frac{1}{2}\vartheta)^{-2(m-q)} (\cos\frac{1}{2}\vartheta)^{-2(n+q+1)}}{\Gamma(-m+q+1)\,\Gamma(-n-q)} + \frac{B_{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}(-m+p, -n-p)}{\Gamma(-m+p)\,\Gamma(-n-p)} \right\}.$$

From [2] (8) we have for $|1-z| < 2$:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m+n-1} \Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(-m)\,(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Gamma(n+1)} \times \\ \times F\left\{-n, m+1; m+1; \frac{1}{2}(1-z)\right\} + \\ + \frac{1}{2} e^{\pi i m} \Gamma(m)(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{-\frac{1}{2}m} F\left\{-m, n+1; 1-m; \frac{1}{2}(1-z)\right\}.$$

Because of

$$F\{-a, b; b; -z\} = (1+z)^a$$

we obtain:

$$F\{-n, m+1; m+1; \tfrac{1}{2}(1-z)\} = (z+1)^n 2^{-n}.$$

Furthermore from (4) for $\operatorname{Re} m<0$:

$$F\{-m, n+1; 1-m; \tfrac{1}{2}(1-z)\} = -m\, e^{\mp \pi i m} 2^{-m} (z-1)^m B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n),$$

so that for $\operatorname{Re} m<0$ and z not lying on the crosscut we have:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m-1}\pi}{\sin m\pi} (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{e^{\mp \pi i m}}{\Gamma(-m)} B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n) \right\}$$

and

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m-1}\pi}{\sin m\pi} (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{\Gamma(-m)} B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1) \right\}.$$

For $\operatorname{Re}(m+n) > -1$ we have:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = e^{\pi i m} 2^{-m-1} \Gamma(m+1) (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m).$$

For $z=x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we obtain if $\operatorname{Re}(m+n) > -1$:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = 2^{\frac{1}{2}(n-m)-1} \Gamma(m+1) \cos^n \tfrac{1}{2}\vartheta \sin^m \tfrac{1}{2}\vartheta\, B_{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta}}(m+n+1, -m).$$

b) For $|1-z|<2$, z not lying on the crosscut, we have:

$$P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1-m)(z-1)^{\frac{1}{2}m}} F\left\{1-m, n; 1-m; \frac{1}{2}(1-z)\right\}$$
$$= \frac{2^n}{\Gamma(1-m)} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m},$$

and for $z=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$:

$$P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)} \cos^{-n} \frac{1}{2}\vartheta \sin^{-m} \frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(1-m)}.$$

For $|1+z|<2$, z not lying on the crosscut we have (see [2], (9)):

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m} \Gamma(1-n) (z+1)^{m+\frac{1}{2}n-1} (z-1)^{-\frac{1}{2}m}}{\Gamma(-m-n+2)} \times$$
$$\times F\left\{-m-n+1, 1-m; -m-n+2; \frac{2}{1+z}\right\}.$$

Hence if $\operatorname{Re}(m+n)<1$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{n-1} \Gamma(1-n)}{\Gamma(-m-n+1)} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m} B_{\frac{2}{z+1}}(-m-n+1, m),$$

and if $\operatorname{Re} m > 0$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = e^{\pi i m} 2^{n-1} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ \Gamma(m) - \frac{\Gamma(1-n)}{\Gamma(-m-n+1)} B_{\frac{z-1}{z+1}}(m, -m-n+1) \right\}.$$

For $z=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we obtain if $\mathrm{Re}(m+n)<1$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)-1}\Gamma(1-n)\cos m\pi}{\Gamma(-m-n+1)}\times$$
$$\times\cos^{-n}\tfrac{1}{2}\vartheta\sin^{-m}\tfrac{1}{2}\vartheta\,B_{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta}}(-m-n+1,m).$$

c) The expressions for $R^{m,n}_{\pm\frac{1}{2}(m-n)}(z)$ are easily found by changing n into $-n$ in the results of *a* and *b*, and using the formulas:

$$R^{m,-n}_{k}(z)=2^{-n}R^{m,n}_{k}(z). \tag{6}$$

4. $R^{m}_{k}(\cos\vartheta)$ if k is half an odd integer and m is an integer

a) In [7] (3) the following recurrence relation is deduced:

$$\begin{cases}\gamma P^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(z)-(z+1)^{-\frac{1}{2}}\{(2k+1)z+2k-2n+1\}\times\\ \qquad\times P^{m,n}_{k}(z)+2(\delta+1)P^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z)=0,\end{cases} \tag{7}$$

valid in the whole z plane including the crosscut $(-1<z<1)$. Now we have for $0<\vartheta<\pi$:

$$P^{0,-1}_{-1}(\cos\vartheta)=P^{0,-1}_{0}(\cos\vartheta)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}F\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi\cos\frac{1}{2}\vartheta}E\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right),$$
$$P^{0,0}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=P_{\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=F\left\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2};1;\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}.$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{2E\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)-K\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

From (7) we find for instance:

$$P^{0,-2}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=\frac{1}{2}P^{0,0}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)+\frac{2^{\frac{1}{2}}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}P^{0,-1}_{-1}(\cos\vartheta)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{E(\sin\frac{1}{2}\vartheta)}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta}-\frac{1}{2}K\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

Continuing this process it is clear that if p is an integer the function $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ can be expressed in terms of E and K functions (for abbrevation we say: $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function). Applying the recurrence relation [7] (9a):

$$\begin{cases}\delta(-\beta\cos\vartheta+\alpha+m+2)P^{m,n}_{k}(\cos\vartheta)+4\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,P^{m+2,n}_{k}(\cos\vartheta)-\\ \qquad-(m+1)\gamma\,2^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\,P^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=0\end{cases} \tag{8}$$

with $m=0$, we can express $P^{2,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ in terms of $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ and $P^{0,-p-1}_{\frac{1}{2}(p-2)}(\cos\vartheta)$, so that $P^{2,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function. From the recurrence relation [7], 4a:

$$\begin{cases}m\left\{(m^2-1)\frac{3+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}-(2k+1)^2+n^2\right\}P^{m,n}_{k}(\cos\vartheta)\\ \quad=(m+1)\alpha(\beta+1)\gamma(\delta+1)P^{m-2,n}_{k}(\cos\vartheta)+4(m-1)P^{m+2,n}_{k}(\cos\vartheta)=0\end{cases} \tag{9}$$

it follows that for integral p and q the function $P^{2q,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function.

In particular, if p is an even integer $=2q-2$ the assertion above holds good for the associated Legendre function $P_{\frac{1}{2}(p-1)}^{-p-2}(\cos\vartheta)$, and thus if $p=-4$ for $P_{-\frac{5}{2}}^{2}(\cos\vartheta)$. ROBIN [5], p. 177 proved that $P_{-\frac{5}{2}}^{0}(\cos\vartheta)$ is an E, K function, so that applying the recurrence relations:

$$P_k^{m+1}(\cos\vartheta)+2m\operatorname{cotg}\vartheta\,P_k^m(\cos\vartheta)+(k+m)(k-m+1)\,P_k^{m-1}(\cos\vartheta)=0$$

and

$$(k+m)\sin\vartheta\,P_k^{m-1}(\cos\vartheta)-\cos\vartheta\,P_k^m(\cos\vartheta)+P_{k+1}^m(\cos\vartheta)=0$$

successively, we find that for integral m $P_{-\frac{5}{2}}^m(\cos\vartheta)$, $P_{-\frac{3}{2}}^m(\cos\vartheta)$ and generally $P_k^m(\cos\vartheta)$ (k half an odd integer) is an E, K function.

b) On emplying the relation [8] (11):

$$Q_k^{n,m}(-\cos\vartheta)=-\frac{2^{m-n}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\left\{\cos\alpha\pi\,Q_k^{m,n}(\cos\vartheta)+\frac{1}{2}\pi\sin\alpha\pi\,P_k^{m,n}(\cos\vartheta)\right\}$$

we deduce for integral p and q:

$$(10)\quad Q_{\frac{1}{2}(p-1)}^{-p-2,\,2q}(\cos\vartheta)=\frac{(-1)^{q+1}\pi\,2^{2q+p+1}\Gamma(-\frac{1}{2}-q)}{\Gamma(p+q+\frac{3}{2})}P_{\frac{1}{2}(p-1)}^{2q,\,-p-2}(-\cos\vartheta).$$

Now we have

$$Q_{-1}^{-1,0}(\cos\vartheta)=2\pi\,P_{-1}^{0,-1}(-\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}E\left(\cos\frac{1}{2}\vartheta\right),$$

$$Q_{-\frac{3}{2}}^{0,0}(\cos\vartheta)=-2E(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta)+K(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta).$$

From (7) we derive the recurrence relation:

$$\left(p+q+\frac{1}{2}\right)P_{\frac{1}{2}(p-2)}^{2q,\,-p-1}(\cos\vartheta)-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}(p\cos\vartheta+3p+4)\,P_{\frac{1}{2}(p-1)}^{2q,\,-p-2}(\cos\vartheta)+$$

$$+2\left(p-q+\frac{3}{2}\right)P_{\frac{1}{2}p}^{2q,\,-p-3}(\cos\vartheta)=0,$$

therefore from (10):

$$Q_{\frac{1}{2}(p-2)}^{-p-1,\,2q}(\cos\vartheta)-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}(-p\cos\vartheta+3p+4)\,Q_{\frac{1}{2}(p-1)}^{-p-2,\,2q}(\cos\vartheta)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(p-q+\frac{3}{2}\right)\left(p+q+\frac{3}{2}\right)Q_{\frac{1}{2}p}^{-p-3,\,2q}(\cos\vartheta)=0.$$

We find for instance if $p=0$, $q=0$:

$$Q_{-\frac{3}{2}}^{-2,0}(\cos\vartheta)=16\left\{\frac{E(\cos\frac{1}{2}\vartheta)}{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}-\frac{1}{2}K\left(\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

With the aid of (10) it is possible to transform the relations (8) and (9) in recurrence relations between the special Q functions, so that, following the same argument as in *a*, $Q_{\frac{1}{2}(p-1)}^{-p-2,\,2q}(\cos\vartheta)$ is an E, K function, and further that for m is an integer and k is half an odd integer $Q_k^m(\cos\vartheta)$ is an E, K function.

5. $R_k^{m,n}(z)$ with one of the four numbers α, δ, γ, β integral

a) α *is a non-negative integer.*

We interchange the parameters and consider the function $P_\alpha^{-m,-n}(z)$ where k is an integer $\geqq 0$. In this case we have for $|1-z|<2$:

$$(11)\quad \begin{cases} P_\alpha^{-m,-n}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(1+m)}(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times \\ \qquad \times F\left\{k+m+1,\ -k-n;\ 1+m;\ \dfrac{1}{2}(1-z)\right\} \\ \qquad = \dfrac{2^{-n}}{\Gamma(1+m)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times \\ \qquad \times F\left\{-k,\ k+m+n+1;\ 1+m;\ \dfrac{1}{2}(1-z)\right\}. \end{cases}$$

Hence the function $(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{-\frac{1}{2}m}P_\alpha^{-m,-n}(z)$ is a polynomial in z of the degree k.

On the crosscut $(0<\vartheta<\pi)$ we have:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\cos^n\frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(1+m)}F\left\{-k,\ k+m+n+1;\ 1+m;\ \sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}.$$

This polynomial is related to the Jacobi polynomial $P_k^{(m,n)}(\cos\vartheta)$. According to [*10*], p. 170 (16) we have:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\Gamma(k+1)\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\cos^n\frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(k+m+1)}P_k^{(m,n)}(\cos\vartheta).$$

For $|1+z|<2$ we find from [*3*] (21) and (11) or from [*2*], (2):

$$P_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{(-1)^k\Gamma(k+n+1)\,2^{-n}}{\Gamma(k+m+1)\,\Gamma(n+1)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left\{-k,\ k+m+n+1;\ 1+n;\ \frac{1}{2}(1+z)\right\},$$

and on the crosscut:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^k\Gamma(k+n+1)\,2^{\frac{1}{2}(m-n)}}{\Gamma(k+m+1)\,\Gamma(n+1)}\cos^n\frac{1}{2}\vartheta\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\times$$
$$\times F\left\{-k,\ k+m+n+1;\ 1+n;\ \cos^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}.$$

From [*2*], (7) we have for $|1-z|>2$:

$$Q_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{e^{-\pi i m}\,2^{k+m}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2k+m+n+2)}(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{-k-\frac{1}{2}m-1}\times$$
$$\times F\left\{k+1,\ k+m+1;\ 2k+m+n+2,\ \frac{2}{1-z}\right\},$$

which may be written as

$$Q_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{e^{-\pi i m}\,2^{-n}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+m+1)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\,Q_k^{(m,n)}(z),$$

where $Q_\alpha^{(m,n)}$ denotes the Jacobi function of the second kind. Using the definition of $Q_k^{(m,n)}(x)$ on the crosscut:

$$Q_k^{(m,n)}(x) = \tfrac{1}{2}\{Q_k^{(m,n)}(x+0\,i) + Q_k^{(m,n)}(x-0\,i)\}$$

we find for $x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$:

$$Q_\alpha^{m,n}(\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\,\Gamma(k+m+n+1)\sin^m\tfrac{1}{2}\vartheta\cos^n\tfrac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(k+n+1)}\,Q_k^{(m,n)}(\cos\vartheta).$$

b) *δ is a negative integer.*

This case may be reduced to that of α, on account of

$$P_k^{m,n}(z)=P_{-k-1}^{m,n}(z),$$

and

$$\sin\alpha\pi\sin\gamma\pi\,Q_k^{m,n}(z)=\tfrac{1}{2}\pi\,e^{\pi i m}\sin 2k\pi\,P_k^{m,n}(z).$$

c) *γ is a non-negative integer.*

We interchange the parameters and consider the function $P_\beta^{m,n}(z)$ where k is an integer $\geqq 0$. If we replace m by $-m$ and apply formula (6), we may reduce this case to that of a.

d) *β is a non-negative integer.*

In the same way as the results in b follow from those in a, the results in d may be deduced from those in c.

REMARK. Further relations between the generalized Legendre associated functions and the Jacobi polynomials and Jacobi functions are given by KUIPERS and ROBIN in [4].

6. Extension of CHRISTOFFEL'S summationformula

From [11], (16) with $(-m,-n)$ in stead of (m,n) we have

$$\{2k(k+1)(2k+1)z_1+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{-m,-n}(z_1)$$
$$=2k(\gamma+1)(\alpha+1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_1)+2(k+1)\beta\delta\,P_{k-1}^{-m,-n}(z_1),$$

$$\{2k(k+1)(2k+1)z_2+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=2k(\gamma+1)(\alpha+1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_2)+2(k+1)\beta\delta\,P_{k-1}^{-m,-n}(z_2).$$

Hence if $k\neq 0$:

$$(k+1)(2k+1)(z_1-z_2)P_k^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=(\gamma+1)(\alpha+1)\,\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)-\frac{k+1}{k}\beta\delta\,\Delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_1,z_2),$$

where

$$\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)=P_{k+1}^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)-P_k^{-m,-n}(z_1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_2).$$

Thus

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta+1)}(2k+1)(z_1-z_2)P_k^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta+1)(k+1)}\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)-\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta)k}\Delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_1,z_2).$$

Hence by giving k the values: $\frac{1}{2}(m+n)$, $\frac{1}{2}(m+n)+1, \ldots, \frac{1}{2}(m+n)+p$, ($p$ a non-negative integer) and summing we have:

$$(z_1 - z_2) \sum_{k=\frac{1}{2}(m+n)}^{\frac{1}{2}(m+n)+p} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\delta+1)} (2k+1)\, P_k^{-m,\,-n}(z_1)\, P_k^{-m,\,-n}(z_2)$$
$$= \frac{\Gamma(m+p+2)\,\Gamma(m+n+p+2)}{\{\frac{1}{2}(m+n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\, \Delta^{-m,\,-n}_{\frac{1}{2}(m+n)+p}(z_1, z_2),$$

or, changing the notation:

$$(12)\quad \begin{cases} (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{p} \frac{\Gamma(k+m+n+1)\,\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)} (2k+m+n+1)\, P_\alpha^{-m,\,-n}(z_1) \times \\ \quad \times P_\alpha^{-m,\,-n}(z_2) = \frac{\Gamma(m+p+2)\,\Gamma(m+n+p+2)}{\{\frac{1}{2}(m+n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\, \Delta^{-m,\,-n}_{\frac{1}{2}(m+n)+p}(z_1, z_2). \end{cases}$$

This formula holds good for every z_1 and z_2 provided that m and n are not negative integers.

If in (12) we change m into $-m$, we have, employing (6):

$$(13)\quad \begin{cases} (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{p} \frac{\Gamma(k-m+n+1)\,\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)} (2k-m+n+1)\, P_\beta^{m,\,n}(z_1) \times \\ \quad \times P_\beta^{m,\,n}(z_2) = \frac{\Gamma(-m+p+2)\,\Gamma(-m+n+p+2)}{\{-\frac{1}{2}(m-n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\, \Delta^{m,\,n}_{-\frac{1}{2}(m-n)+p}(z_1, z_2). \end{cases}$$

(12) and (13) are generalizations of CHRISTOFFEL's first summation-formula.

References

[1] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: On a generalization of Legendre's associated differential equation I, II. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **60**, 436–450 (1957).

[2] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: Linear transformations of generalized Legendre's associated functions. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **61**, 330–333 (1958).

[3] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: Related generalized Legendre's associated functions. Arch. Math. **9**, 394–400 (1958).

[4] KUIPERS, L., and L. ROBIN: Resumé de quelques propriétés des fonctions de Legendre généralisées. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **62**, 502–507 (1959).

[5] ROBIN, L.: Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, Tome II. Paris 1958.

[6] MEULENBELD, B.: Quadratic transformations of generalized Legendre's associated functions. Arch. rational Mech. Anal. **3**, 460–471 (1959).

[7] MEULENBELD, B.: New recurrence formulas for the $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$. Monatshefte f. Math. **4**, 355–360 (1960).

[8] MEULENBELD, B.: Generalized Legendre's associated functions for real values of the argument nummerically less than unity. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **61**, 557–563 (1958).

[9] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions I. New York-Toronto-London 1953.

[10] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions II. New York-Toronto-London 1953.

[11] KUIPERS, L.: Generalized Legendre's associated functions (integral theorems, recurrence formulas). Monatshefte f. Math. **63**, 24–31 (1958).

Dept. of Math., Technological University, Delft (Niederlande)

(Eingegangen am 10. April 1960)

SIOSON, F. M.
Math. Zeitschr. 75, 201—210 (1960)

Some primal Clusters

By
F. M. SIOSON

Introduction. A consideration of the truth-values of certain many-valued logics has lead to the notion of an algebra $\mathfrak{A}=(A, \mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n)$ with the property that each function $f \in A^{A^k}$ $(k<\infty)$ is a composition of the primitive operations $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n$. This property is called *primality* and is quite strongly tied up with the notion of *independence*. A family of algebras of the same species are *independent* if and only if for every finite subfamily $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ and for every set of expressions $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, there exists another expression Ψ such that $\Phi_i=\Psi$ is satisfied in $\mathfrak{A}_i$, for each $i=1, \ldots, m$. Following FOSTER [3] we shall denote this fact by $\Phi_i \equiv \Psi(\mathfrak{A}_i)$.

The composite notion of an independent family of primal algebras (or-*primal cluster*) is of some interest, see [2]. A number of them [2], [6] are known, namely, the family of all Sheffer algebras of species (n), $n \geqq 2$, the family of all n-fields, Post algebras and, more inclusively, all primal algebras $(A, \cdot, \hat{\ })$, where $\hat{\ }$ is a 0-to-1 cyclic permutation for some 0, $1 \in A$ and $0 \cdot \xi = \xi \cdot 0 = 0$, $1 \cdot \xi = \xi \cdot 1 = \xi$, for all $\xi \in A$. Members of the last family are called *strong frames* in order to distinguish them from *weak frames* which are those in which the $\hat{\ }$ are simply permutations.

The object of this communication is to give some new families of primal algebras. It is proved here that the family of all pairwise non-isomorphic primal weak frames and the family of all Słupecki algebras form primal clusters. A method of immersing primal clusters with common frame operations into other primal clusters has also been given.

1. The Cluster of Weak Frames and Słupecki Algebras. We start by recalling a

DEFINITION 1.1. A pair of elements $\alpha \in A$, $\beta \in B$ from a pair of distinct algebras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of the same species are *co-constant*, in symbols $\alpha \sim \beta$, if and only if there exists an expression Φ such that $\Phi \equiv \alpha(\mathfrak{A})$ and $\Phi \equiv \beta(\mathfrak{B})$.

From FOSTER [3], we borrow the following

LEMMA 1.1. *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are a pair of non-isomorphic primal algebras of the same species, then to every pair $\beta', \beta'' \in B$, there exists at least one element $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim \beta'$ and $\alpha \sim \beta''$.*

LEMMA 1.2. *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be any two algebras of the same species with $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ and $\beta_1, \ldots, \beta_k \in B$. If $\alpha_i \sim \beta_i$ for $i=1, \ldots, k$, then $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \sim \Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ for each expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.*

PROOF. By hypothesis, there exist expressions Φ_i such that $\Phi_i \equiv \alpha_i(\mathfrak{A})$ and $\Phi_i \equiv \beta_i(\mathfrak{B})$, for each $i=1, \ldots, k$. Thus, for any expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, we have $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) \equiv \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)(\mathfrak{A})$ and $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) \equiv \Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k)(\mathfrak{B})$.

LEMMA 1.3. *If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are a pair of non-isomorphic primal weak frames, then for each $\alpha \in A$, there exist at least two elements $\beta', \beta'' \in B$ such that $\alpha \sim \beta'$ and $\alpha \sim \beta''$.*

PROOF. Assume the contrary, that is to say, for some $\alpha \in A$, for every $\beta', \beta'' \in B$, $\beta' \neq \beta''$, we either have $\alpha \not\sim \beta'$ or $\alpha \not\sim \beta''$. By Lemma 1.1, there exists at least one $\beta \in B$ such that $\alpha \sim \beta$. If we set $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, and $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, then $\alpha_1 \sim \beta_1$, but $\alpha_1 \not\sim \beta_i$ for all $i \neq 1$. Again by Lemma 1.1, for any $\alpha_i, \alpha_1 \in A$, there is a $\beta \in B$ such that $\alpha_i \sim \beta, \alpha_1 \sim \beta$. Since α_i is arbitrary, it follows then that $\alpha_i \sim \beta$ for each $i = 1, \ldots, n$. Also $\beta = \beta_1$. There is no other element $\beta \in B$, $\beta \neq \beta_1$, which is co-constant with all elements of A. Hence, since $A = A^\circ = \{\alpha_1^\circ, \ldots, \alpha_n^\circ\}$, this shows that $\beta_1^\circ = \beta_1$, by Lemma 1.2. Moreover, for each $\alpha \in A$, $\alpha = \alpha_i \cdot \alpha_j$ with $\alpha_i \sim \beta_1, \alpha_j \sim \beta_1$, so that by Lemma 1.2, $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha \sim \beta_1 \cdot \beta_1$. Whence $\beta_1 \cdot \beta_1 = \beta_1$ and $\{\beta_1\}$ forms a one-element subalgebra of $\mathfrak{B}$. By virtue of the fact that the constant functions in primal algebras are generable by composition from the primitive operations, $\mathfrak{B}$ cannot possess a subalgebra. We thus get a contradiction.

DEFINITION 1.2. An ordered m-tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ of elements from an algebra $\mathfrak{A}$ *covers* the algebra $\mathfrak{B}$ with $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ if and only if $\alpha_1 \sim \beta_1, \ldots, \alpha_m \sim \beta_m$.

LEMMA 1.4. *For any pair $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of primal weak frames, there exists at least $m = \text{card } (B)$ distinct ordered m-tuples of elements of $\mathfrak{A}$ that covers $\mathfrak{B}$.*

PROOF. There is nothing in the proof of FOSTER [3] of the corresponding theorem for strong frames that will prevent its validity for weak frames. This same remark also applies to the following

LEMMA 1.5. *For each pair $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of non-isomorphic primal weak frames, there exists an element $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim \beta$ for all $\beta \in B$, in symbols $\alpha \sim B$.*

LEMMA 1.6. *If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are non-isomorphic primal weak frames, then $\alpha \sim B$ for each $\alpha \in A$.*

PROOF. By Lemma 1.5, there exists an $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim B$. Without loss of generality, let $\alpha = \alpha_1$ and $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. If $\alpha' \neq \alpha_1$ is another element such that $\alpha' \sim B$, then set $\alpha' = \alpha_2$. Continue this process until we arrive at $\alpha_1 \sim B$, $\alpha_2 \sim B, \ldots, \alpha_k \sim B$, $\alpha_{k+1} \not\sim B, \ldots, \alpha_n \not\sim B$. Now, suppose $k < n$. Remembering that $B \cdot B = B$ and $B^\circ = B$, then for every pair $\alpha_i, \alpha_j \in A$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ it follows that $\alpha_i \cdot \alpha_j \sim B$, $\alpha_i^\circ \sim B$, by Lemma 1.2. In other words, $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha_r$ and $\alpha_i^\circ = \alpha_s$ for some $r, s \leqq k$. This proves that under the same operations of $\mathfrak{A}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ forms a proper subalgebra of $\mathfrak{A}$, contrary to the assumption of primality.

The final result is now proved by using the following lemma of FOSTER [3].

LEMMA 1.7. *For a finite set of algebras $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ of the same species to be independent, it is necessary and sufficient that they be weakly coframal,* i.e. *there exist expressions $\Phi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ and $\Psi(\xi) = \xi^\circ$ such that $(A_i, \cdot, {}^\circ)$ are weak frames with $0_i, 1_i \in A_i$ for each $i = 1, \ldots, m$; and that for each $i, j = 1, \ldots, m$,*

there also exist expressions Φ_{ij} satisfying the conditions:

$$\Phi_{ij}(\xi) \equiv \begin{matrix} 1_i(\mathfrak{A}_i), \\ 0_j(\mathfrak{A}_j). \end{matrix}$$

THEOREM 1.1. *Any family of pairwise non-isomorphic primal weak frames are independent and hence, a primal cluster.*

PROOF. If $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ is any finite subfamily of the given family of weak frames, then by Lemma 1.6, we have

$$0_i \sim 1_j, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

By Lemma 1.7, it follows that they are independent and therefore, the given family is a primal cluster.

A second proof of the previous theorem may be given by using a technique analogous to that of O'KEEFE's [6]. This proof is effected through the following Lemmas:

LEMMA 1.8. *If $\mathfrak{A}$ is a primal weak frame, then for any expression $K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ with distinct occurences of indeterminates and for any other expression $\Phi(\xi)$, there exist expressions $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$ such that*

$$K\left(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)\right) \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

PROOF. The proof is by induction on the number of occurences of the operation symbol $\cdot$ in $K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. If there is no occurence of $\cdot$ in K, then K is of the form $\eta^{\cap_i} = (\eta^{\cap_{i-1}})^{\cap}$, where $\eta^{\cap_0} = \eta$. In this case, if h is an integer such that

$$\eta^{\cap_{i+h}} \equiv \eta \ (\mathfrak{A}),$$

then we simply take $\varphi_1(\xi) = \Phi(\xi)^{\cap_h}$; so that

$$\varphi_1(\xi)^{\cap_i} \equiv \Phi(\xi)^{\cap_{i+h}} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Assume that the Lemma is true for all expressions K with m or less distinct occurences of $\cdot$. Now, consider any such expression K with $m+1$ occurences of $\cdot$. Clearly,

$$K = [K_1(\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_i}) \cdot K_2(\eta_{k_{i+1}}, \ldots, \eta_{k_n})]^{\cap_j},$$

where each K_1, K_2 has m or less occurences of $\cdot$. By hypothesis of induction, there exists an expression $\varphi(\xi)$ such that

$$\varphi(\xi)^{\cap_j} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

If $\varphi'(\xi)$ is an expression such that $\varphi'(\xi) \equiv 1 \ (\mathfrak{A})$, then

$$[\varphi'(\xi) \cdot \varphi(\xi)]^{\cap_j} \equiv \varphi(\xi)^{\cap_j} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Considering K_1 together with $\varphi'(\xi)$ and K_2 with $\varphi(\xi)$, it now follows by the hypothesis of induction that there exist expressions $\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_i}, \varphi_{k_{i+1}}, \ldots, \varphi_{k_n}$ such that

$$K_1\left(\varphi_{k_1}(\xi), \ldots, \varphi_{k_i}(\xi)\right) \equiv \varphi'(\xi) \ (\mathfrak{A}),$$

$$K_2\left(\varphi_{k_{i+1}}(\xi), \ldots, \varphi_{k_n}(\xi)\right) \equiv \varphi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Thus we finally get

$$K(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)) = [K_1(\varphi_{k_1}(\xi),\ldots,\varphi_{k_l}(\xi))\cdot K_2(\varphi_{k_{l+1}}(\xi),\ldots,\varphi_{k_n}(\xi))]^{\frown_l}$$
$$\equiv (\varphi'(\xi)\cdot\varphi(\xi))^{\frown_l} \equiv \varphi(\xi)^{\frown_l} \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{A}).$$

Induction is completed and the Lemma proved.

The following lemma is borrowed from O'KEEFE [6].

LEMMA 1.9. *Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be a pair of non-isomorphic primal algebras of the same species. Then there exist n^n expressions Φ_i, $i=1,\ldots,n^n$, $n=$ card (B) such that*

$$\Phi_i \equiv \Phi_j\ (\mathfrak{A}), \quad \text{for all } i,j \leqq n^n;$$

and with the additional property that for any other expression $\Psi(\xi)$

$$\Phi_i(\xi) \equiv \Psi(\xi)\ (\mathfrak{B}),$$

for some $i \leqq n^n$.

LEMMA 1.10. *Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be a pair of non-isomorphic primal weak frames. Then for each $\alpha \in A$ and every expression $\Phi(\xi)$, there exists another expression $\Gamma(\xi)$ such that*

$$\Gamma(\xi) \equiv \begin{matrix} \alpha & (\mathfrak{A}), \\ \Phi(\xi) & (\mathfrak{B}). \end{matrix}$$

PROOF. By primality, there exists an expression $K'(\xi)$ such that $K'(\xi) \equiv \alpha\,(\mathfrak{A})$. Let $K(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ be the expression obtained from $K'(\xi)$ by substituting a distinct indeterminate η_i for each occurence of ξ in K', so that $K(\xi,\ldots,\xi) = K'(\xi)$. By Lemma 1.8, there exist expressions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ such that

$$K(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)) \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{B}).$$

By Lemma 1.9, there exist expressions Φ_i such that $\Phi_i \equiv \Phi_j\ (\mathfrak{A})$, $i,j \leqq n^n$ $(n = \text{card } (B))$ and such that each $\varphi_i(\xi) \equiv \Phi_{k_i}(\xi)\ (\mathfrak{B})$, for some $k_i \leqq n^n$, $i=1,\ldots,n$. Thus it follows that

$$K(\Phi_{k_1}(\xi),\ldots,\Phi_{k_n}(\xi)) \equiv \begin{matrix} K'(\Phi_{k_i}) \equiv \alpha\ (\mathfrak{A}), \\ K(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)) \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{B}). \end{matrix}$$

THEOREM 1.2. *Any pair of non-isomorphic primal weak frames $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are independent.*

PROOF. Because of primality, for any $\beta \in B$, there exists an expression $\Theta'(\mu,\nu)$ such that

$$\Theta'(\mu,\beta) \equiv \mu\ (\mathfrak{B}) \quad \text{and} \quad \Theta'(\beta,\nu) \equiv \nu\ (\mathfrak{B}).$$

Clearly,

$$\Theta'(\mu,\nu) = (\Theta_1\cdot\Psi_1(\mu,\nu))^{\frown_{k_1}}.$$

If Θ_1 contains only one indeterminate, then we are through; if not, we repeat the process on Θ_1, so that

$$\Theta'(\mu,\nu) = (\Theta_2\cdot\Psi_2(\mu,\nu))^{\frown_{k_2}}\cdot\Psi_1(\mu,\nu)^{\frown_{k_1}}.$$

After a finite number of repetitions of this procedure we will arrive at

$$\Theta'(\mu,\nu)=\left(\ldots\left((\Theta_m\cdot\Psi_m(\mu,\nu))^{\cap k_m}\cdot\Psi_{m-1}(\mu,\nu)\right)^{\cap k_{m-1}}\cdot\ldots\cdot\Psi_1(\mu,\nu)\right)^{\cap k_1},$$

where Θ_m contains only one indeterminate. Without loss of generality, we may assume this indeterminate to be ν. Now, if $\varphi(\eta)$ is the expression such that $\varphi(\eta)\equiv\beta\ (\mathfrak{B})$, and $\Phi_i(\xi)$ are expressions such that

$$\Phi_i(\eta)=\Psi_i\left(\eta,\varphi(\eta)\right),$$

$i=1,\ldots,m$, and $\varrho=\Theta_m(\beta)$, then

$$\Theta=\left(\ldots\left((\varrho\cdot\Phi_m(\eta))^{\cap k_m}\cdot\Phi_{m-1}(\eta)\right)^{\cap k_{m-1}}\cdot\ldots\cdot\Phi_1(\eta)\right)^{\cap k_1}\equiv\Theta'(\eta,\beta)\equiv\eta\ (\mathfrak{B}).$$

Let s be an integer such that

$$\Delta=\left(\ldots((\xi^{\cap s}\cdot 1)^{\cap k_m}\cdot 1)^{\cap k_{m-1}}\cdot\ldots\cdot 1\right)^{\cap k_1}=\xi^{\cap(s+k_m+k_{m-1}+\cdots+k_1)}\equiv\xi\ (\mathfrak{A}).$$

Thus we have constructed two polynomial expressions Θ, Δ over $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ respectively, which possess the same "form". Matching their corresponding "factors", we have

$$\xi^{\cap s}\ \text{matched with}\ \varrho,$$

and

$$1\ \text{matched with}\ \Phi_i(\eta),$$

$i=1,\ldots,m$. Applying Lemma 1.10, there exist expressions $\Gamma(\xi),\Gamma_1(\eta),\ldots,\Gamma_m(\eta)$ such that

$$\Gamma(\xi)\equiv\begin{matrix}\xi^{\cap s}\ (\mathfrak{A}),\\ \varrho\ (\mathfrak{B});\end{matrix}$$

$$\Gamma_i(\eta)\equiv\begin{matrix}1\ (\mathfrak{A}),\\ \Phi_i(\eta)\ (\mathfrak{B}),\end{matrix}$$

$i=1,\ldots,m$. Thus if $\Pi(\xi,\eta)$ is the expression

$$\left(\ldots\left((\Gamma(\xi)\cdot\Gamma_m(\eta))^{\cap k_m}\cdot\Gamma_{m-1}(\eta)\right)^{\cap k_{m-1}}\cdot\ldots\cdot\Gamma_1(\eta)\right)^{\cap k_1},$$

then we get

$$\Pi(\xi,\eta)\equiv\begin{matrix}\Theta\equiv\xi\ (\mathfrak{A}),\\ \Delta\equiv\eta\ (\mathfrak{B}),\end{matrix}$$

For any other pair of words Φ, Φ', then

$$\Pi(\Phi,\Phi')\equiv\begin{matrix}\Phi\ (\mathfrak{A}),\\ \Phi'\ (\mathfrak{B}).\end{matrix}$$

Hence $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are independent.

Theorem 1.1 follows from Theorem 1.2 by way of Lemma 1.7.

COROLLARY 1.3. *The family of all pairwise non-isomorphic primal strong frames forms a primal cluster.*

REMARKS Following the procedure devised by O'KEEFE [6] for proving the independence of Sheffer algebras, i.e. primal algebras with a single operation; it may be also shown that the family of all pairwise non-isomorphic

primal algebras $(A, \cdot, \beta)$ of species (2, 0) subject to the conditions that $\beta \cdot \xi$, $\xi \cdot \beta$ are permutations forms a primal cluster. One example of such a family is given by the algebras such that

(1) $\xi \cdot \beta$ is a cyclic permutation on A;

(2) $\beta \cdot \xi$ permutes a pair of elements in A, but leaves the rest fixed;

(3) $\xi \cdot \xi = \xi$ for all $\xi \neq \beta$.

That these algebras are primal is a consequence of the following two theorems of PICCARD [7] and SŁUPECKI [8].

THEOREM (PICCARD). *The set of all unary functions on a finite set is generable by composition from only three* (1) *a cyclic permutation,* (2) *a permutation which permutes a pair of elements but leaves the rest of the elements fixed, and* (3) *a unary function which maps all elements into itself except for one which is mapped onto another distinct element.*

THEOREM (SŁUPECKI). *An arbitrary finite algebra with at least two elements is primal if and only if all unary functions and at least one binary function whose range is the whole of the algebra and which is not equivalent to a unary function are all generable by composition from its primitive operations.*

It is further remarked that the method mentioned above may also be applied to a corresponding family of algebras of species $(n, 0)$, $n > 2$. The tediousness of the proofs, however, and their great similarity to O'Keefe's proofs do not warrant their publication here.

There is another more familiar class of primal algebras considered by logicians which involve 0-ary or constant operations, namely, the algebra of truth values $(\{0, \ldots, n-1\}, C\xi\eta = \max\{0, \eta - \xi\}, N\xi = n - 1 - \xi)$ of the Łukasiewicz-Tarski logics with a Słupecki T-function 1 added to its primitive operations. Subsequently, we shall call these, *Słupecki algebras*. For these algebras we have the

THEOREM 1.4. *The family of all Słupecki algebras,* $\mathfrak{A}_n = (\{0, \ldots, n-1\}, C, N, 1)$ *of species* (2, 1, 0), $2 \leqq n < \infty$, *is independent and therefore, forms a primal cluster.*

PROOF. Consider any finite subfamily $\mathfrak{A}_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$, of them. These algebras are strongly coframal with the frame operations defined by the expressions $\xi \cdot \eta = CC\xi\eta\eta$ and $\xi^{\frown} = KC1\xi N_k\xi$, where $K\xi\eta = NCCN\xi N\eta N\eta$ $\left(k > \max_i\{n_i - 2\}\right)$ and N_k is defined inductively as follows:

$$N_0\xi = N\xi$$
$$N_k\xi = C\,\xi\, N_{k-1}\xi.$$

It is easily verified that for all $\xi < n_i$, $i = 1, \ldots, m$,

$$0 \cdot \xi = \xi \cdot 0 = 0,$$
$$(n_i - 1) \cdot \xi = \xi \cdot (n_i - 1) = \xi.$$

Furthermore, it may be also shown that

$$N_k\xi = \max\{0, \max\{0, n_i - 1 - (k+1)\xi\}\}$$

so that by virtue of the choice of $k > \max_i \{n_i - 2\}$, then

$$N_k \xi = \begin{matrix} n_i - 1, & \text{if } \xi = 0, \\ 0, & \text{if } \xi \neq 0, \end{matrix} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

After verifying that $K\xi\eta = \max\{\xi, \eta\}$, it is seen without difficulty that then

$$\xi^{\frown} = KC1\,\xi\, N_k \xi = \begin{matrix} n_i - 1, & \text{if } \xi = 0, \\ \xi - 1, & \text{if } \xi \neq 0, \end{matrix}$$

$i = 1, \ldots, m$. These prove that the algebras are strongly coframal.

Consider now the expression $e_n(\xi) = \left(\left(\ldots (\xi \cdot \xi^{\frown}) \cdot \xi^{\frown\frown}\right) \ldots\right) \cdot \xi^{\frown n-1}\Big)$ and suppose that $n_i < n_j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Choosing $\Phi_{n_i}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\frown n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown n_j - 1}\right)^{\frown}$, it is easily shown that

$$\Phi_{n_i}(\xi) \equiv \begin{matrix} n_i - 1 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ 0 & (\mathfrak{A}_{n_j}). \end{matrix}$$

To arrive at a corresponding word $\Phi_{n_j}(\xi)$, we consider two cases:

Case I: n_i divides n_j.

In this case let $r = n_j - n_i > n_i$ and $d = r - n_i + 1$. Then it is easy to see that

$$\Phi_{n_j}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\frown n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown n_i + d}\right)^{\frown n_i} \equiv \begin{matrix} 0 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ n_j - 1 & (\mathfrak{A}_{n_j}). \end{matrix}$$

Case II: n_i does not divide n_j.

In this case, there is an h such that $0^{\frown h n_i} \geqq n_i - 1$. Let k be the integer such that

$$(0^{\frown h n_i})^{\frown k} \equiv n_i - 1 \ (\mathfrak{A}_{n_j}).$$

Whence,

$$\Phi_{n_j}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\smile n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown h n_i + k}\right)^{\frown n_i} \equiv \begin{matrix} 0 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ n_j - 1 & (\mathfrak{A}_{n_j}), \end{matrix}$$

where $^{\smile}$ is the inverse of $^{\frown}$. $^{\smile}$ is of course expressible in terms of $^{\frown}$ since the sets are finite.

The independence of the given finite subfamily and hence of the family now follows.

2. Immersed Primal Clusters. In a recent paper [4], FOSTER concerned himself with the problem of immersing algebras into algebras of a more comprehensive species. In this section, we shall be occupied with concrete results of that kind when the additional operations are 0-ary and the extended algebras are primal. For example, we get without too much difficulty from known results the following:

THEOREM 2.1. *If $(A, \cdot)$ is any finite algebra with one binary operation, $B \supset A$ with $\infty > \text{card}\,(B) \geqq \text{card}\,(A) + 2$, then there exists an extension $(B, \cdot, \beta)$ of the given algebra with one 0-ary operation β which is primal.*

PROOF. If $A=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ and $B-A=\{\beta_1, \ldots, \beta_m=\beta\}$, then we may define the extended operation $\cdot$ quite arbitrarily except for the fact that (1) $\xi \cdot \beta=\xi$ for all $\xi \neq \beta$, $\beta \cdot \beta=\beta_{m-1}$, (2) $\beta \cdot \xi$ is a cyclic permutation of B, and (3) $(\beta \cdot \beta) \cdot \xi$ permutes $\beta=\beta_m$ and β_{m-1}, but leaves all the rest fixed. By PICCARD'S Theorem, it is clear that the words or expressions $\beta \cdot \xi$, $(\beta \cdot \beta) \cdot \xi$, and $\xi \cdot \beta$ represent functions on B that generate the set of all unary functions on B. Since the $\cdot$-table of B obviously contain a row and a column with at least two distinct elements, it therefore follows by SŁUPECKI'S Theorem that $(B, \cdot, \beta)$ is primal.

REMARKS. For the case when card $(B)=$ card $(A)+1$, the theorem is true only when card $(A) \leqq 2$. It fails to hold for the first time when card $(A)=3$, as the following counter-example will show:

Consider the binary algebra $(\{0, 1, 2\}, \cdot)$ where $\xi \cdot \eta=0$ for all $\xi, \eta \in \{0, 1, 2\}$. In order that $(\{0, 1, 2, 3\}, \cdot, 3)$ be primal, it is necessary and sufficient that the three unary functions in PICCARD'S theorem be generable by composition from $\cdot$ and 3. Thus without loss of generality we may assume that $\xi \cdot 3$, $3 \cdot \xi$ are two permutations that generate all permutations of the set $\{0, 1, 2, 3\}$. This is without loss of generality because in order to generate all unary functions on any set it is necessary to generate all permutations and this cannot be effected by less than two permutations. The $\cdot$-table of the extended algebra may thus be assumed as

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	0	2
2	0	0	0	3
3	1	2	3	0

It is easy to see that the only unary functions on the given set of elements generated by $\cdot$ and 3 are all the permutations and their compositions with ξ, $\xi \cdot \xi$, $\xi \cdot 1$, $1 \cdot \xi=\xi \cdot 2$, and $2 \cdot \xi$. These give a total of only $5 \cdot 4!=120$ unary functions out of a possible $4^4=256$. Thus $(\{0, 1, 2, 3\}, \cdot, 3)$ cannot be defined in any way to be primal.

The more interesting immersions, of course, are those which preserves certain properties, e.g. primality and independence. We now consider this question.

DEFINITION 2.1. Let $\mathfrak{B}$ be an extension of $\mathfrak{A}$. An element $\beta \in B$ is *algebraic over* $\mathfrak{A}$ if and only if there exists an expression Φ of the species of $\mathfrak{A}$, $\Phi \not\equiv \alpha(\mathfrak{A})$ for each $\alpha \in A$, such that $\Phi(\beta) \in A$. Otherwise, β is *transcendental over* $\mathfrak{A}$. Similarly, $\mathfrak{B}$ is algebraic over $\mathfrak{A}$ if and only if every element of $\mathfrak{B}$ is algebraic over $\mathfrak{A}$. Otherwise, $\mathfrak{B}$ is *transcendental over* $\mathfrak{A}$.

THEOREM 2.2. *Let* $(A, \ldots, \cdot, {}^\circ)$ *be a primal algebra of species* s *with frame* $(A, \cdot, {}^\circ)$ *and distinguished elements* $0, 1 \in A$. *If* B *is an arbitrary finite set containing* A, *then there exists an extension* $(A, \ldots, \cdot, {}^\circ, \beta)$ *of species* $(s, 0)$ *which is primal and algebraic over* $(A, \ldots, \cdot, {}^\circ)$.

PROOF. Let $B-A=\{\beta_1=\beta, \ldots, \beta_n\}$. Define the extended operations such that $\beta_n^{\circ}=\beta_1$, $\beta_i^{\circ}=\beta_{i+1}$ for $i\neq n$, $\beta_i\cdot 1=1\cdot\beta_i=\beta_i$, $\beta_i\cdot\beta_i=1$, $\beta_i\cdot\beta_j=0$ if $i\neq j$, $\beta_i\cdot\alpha=\alpha\cdot\beta_i=0$ for all $\alpha\neq 1$, $\alpha\in A$, $i,j=1,\ldots,n$. For the rest of the operations, if there are any, say ω_k, if for some $\xi_i=\beta_j$, then set $\omega_k(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. The elements β_i are clearly algebraic, since $\beta_i\cdot\beta_i=1\in A$. Let k be an integer such that $1^{\circ k}=0$, $\delta_\alpha(\xi)$, $\alpha\in A$, expressions for the characteristic functions in $\mathfrak{A}$, and $\sigma(\xi)$ any expression which effects a cyclic permutation of the elements 0 and 1 of A. Then it is easily shown that the expressions

$$\delta'_{\beta_i}(\xi)=(\xi^{\circ k}\cdot\xi^{\circ k})\cdot\delta_1(\beta^{\circ n+i-1}\cdot\xi), \qquad i=1,\ldots,n,$$
$$\delta'_\alpha(\xi)=\delta_\alpha(\xi)\cdot[[\ldots[\sigma(\delta'_{\beta_1}(\xi))\cdot\sigma(\delta'_{\beta_2}(\xi))]\ldots]\cdot\sigma(\delta'_{\beta_n}(\xi))]$$

$\alpha\in A$, are characteristic functions on B.

The theorem then will follow from the following characterization of FOSTER [1]:

THEOREM (FOSTER). *A necessary and sufficient condition that an algebra $(A,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ be primal is that there exist expressions $\Phi(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta$, $\Psi(\xi)=\xi^{\circ}$ such that $(A;\cdot,^{\circ})$ with distinguished elements $0,1\in A$ is a strong frame and each of the characteristic functions*

$$\delta_\alpha(\xi)\equiv\begin{cases}1 & \text{if } \xi=\alpha,\\ 0 & \text{if } \xi\neq\alpha,\end{cases}$$

$\alpha\in A$, is generable by composition from $\omega_1,\ldots,\omega_n$.

REMARKS. Although the above result gives an example of an algebraic extension, certain primal extensions which involve the addition of 0-ary operations may also be transcendental. Consider, for example, the 3-field $(\{0,1,2\},\cdot,^{\circ})$ and the algebra $(\{0,1,2,\alpha,\beta\},\cdot,^{\circ},\beta)$ whose tables are given by

$\cdot$	0	1	2	β	α
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	β	α
2	0	2	1	0	1
β	0	β	0	α	β
α	0	α	1	2	α

$^{\circ}$	
0	1
1	2
2	0
α	α
β	β

Since $\alpha\cdot\alpha=\alpha$, $\alpha^{\circ}=\alpha$, no composition Φ of $\cdot$ and $^{\circ}$ can exist such that $\Phi(\alpha)\in\{0,1,2\}$. Hence the element α is transcendental over the 3-field. If $\sigma(\xi)$ denotes an expression which effects a cyclic permutation of 0 and 1 and $\delta_n(\xi)$, $n=0,1,2$, are expressions for the characteristic functions in the 3-field, then it is easily verified that

$$\delta'_\beta(\xi)=\delta_1[(\beta\cdot\xi)\cdot((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)]=\delta_1[(\beta\cdot\xi)\cdot 2],$$
$$\delta'_\alpha(\xi)=\delta_1[((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)\cdot(\xi\cdot\xi)]\cdot[\xi\cdot((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)]=\delta_1(2\cdot(\xi\cdot\xi))\cdot(\xi\cdot 2),$$
$$\delta'_n(\xi)=\delta_n(\xi)\cdot[\sigma(\delta'_\alpha(\xi))\cdot\sigma(\delta'_\beta(\xi))], \qquad n=0,1,2,$$

are expressions for the characteristic functions on the extended algebra. By FOSTER's characterization of primal algebras, it follows that $(\{0, 1, 2, \alpha, \beta\}, , ^\frown, \beta)$ is also primal.

For definiteness extensions of this kind and the kind mentioned in Theorem 2.2 will be called *primal framal 0-ary extensions*.

Now, we have the following

THEOREM 2.3. *If the family of algebras* $\{\mathfrak{A}_i = (A_i, \ldots, \cdot, ^\frown) : i \in \omega\}$ *forms a primal cluster with frames* $(A_i, \cdot, ^\frown)$ *whose distinguished elements are* 0_i, 1_i, *and if* $B_i > A_i$ *for each* $i \in \omega$, *then any family of primal framal 0-ary extensions* $\{\mathfrak{B}_i = (B_i, \ldots, \cdot, ^\frown, \beta, \ldots) : i \in \omega\}$ *of the given family with frames* $(B_i, \cdot, ^\frown)$ *forms also a primal cluster.*

PROOF. The family of extended algebras are obviously weakly coframal. By virtue of the primality and independence of the algebras in the original family and Lemma 1.7, there exists expressions Φ_{ij} corresponding to each pair of algebras $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$ such that

$$\Phi_{ij}(\xi) \equiv \begin{matrix} 1_i \ (\mathfrak{A}_i), \\ 0_j \ (\mathfrak{A}_j). \end{matrix}$$

Without too much difficulty it is easily verified that for the extended algebras $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i$ whatsoever,

$$\Phi_{ij}\big(\Phi_{ij}(\xi \cdot \Phi_{ij}(\xi))\big) \equiv \begin{matrix} 1_i \ (\mathfrak{B}_i), \\ 0_j \ (\mathfrak{B}_j). \end{matrix}$$

Thus by virtue of Lemma 1.7, it follows that the family of all algebras $\{\mathfrak{B}_i : i \in \omega\}$ is independent and hence, a primal cluster.

References

[1] FOSTER, A. L.: Generalized Boolean theory of universal algebras. I. Math. Z. **58**, 306–336 (1953).

[2] FOSTER, A. L.: The identities of – and unique factorization within – classes of universal algebras. Math. Z. **62**, 171–188 (1955).

[3] FOSTER, A. L.: The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras. Math. Z. **66**, 452–469 (1957).

[4] FOSTER, A. L.: On the imbeddability of universal algebras in relation to their set of identities. Math. Annalen **138**, 219–238 (1959).

[5] LUKASIEWICZ, J., u. A. TARSKI: Untersuchungen über den Aussagenkalkul. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie **33**, 1–21 (1930).

[6] O'KEEFE, EDWARD S.: On the independence of primal algebras. Math. Z. **73**, 79–94 (1960).

[7] PICCARD, SOPHIE: Sur les fonctions definies dans les ensembles finies quelconque. Fundamenta Math. **24**, 183–185 (1935).

[8] SŁUPECKI, JERZY: Kryterium pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie **32**, 102–110 (1939).

Dept. of Math., University of California, Berkeley, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 19. Mai 1960)

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 75, 211—214 (1961)

Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband

Von
OLAF TAMASCHKE

Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *subnormal* in $\mathfrak{G}$ oder *Subnormalteiler* von $\mathfrak{G}$, wenn eine endliche Normalkette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ existiert. Die Menge $s\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ bildet unter zusätzlichen Voraussetzungen einen Teilverband des Verbandes aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$, z.B. dann, wenn in $s\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist [WIELANDT *4*]. Wir zeigen:

SATZ 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. Genau dann ist der Verband $s\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ isomorph zum direkten Produkt zweier Verbände L_1 und L_2, wenn $\mathfrak{G}$ isomorph ist zum direkten Produkt zweier Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der Eigenschaft, daß keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Es gilt dann $L_1 \cong s\mathfrak{G}_1$ und $L_2 \cong s\mathfrak{G}_2$.*

Für auflösbare endliche Gruppen ist dieser Satz bekannt [CURZIO *1*, Theor. III]. Mit $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bezeichnen wir das Erzeugnis zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ihren Durchschnitt. Zwei Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ heißen *transponiert*, wenn ($\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{K} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$) oder ($\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$) gilt; sie heißen *projektiv*, wenn es eine Kette transponierter Kompositionsfaktorgruppen gibt, die von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ führt. Wir beachten, daß $s\mathfrak{G}$ ein submodularer längenendlicher Verband ist, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt ([*3*, (2.4)] und [?]). Zum Beweis unseres Satzes benützen wir den folgenden

HILFSSATZ. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(a) *Es gibt eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ zwischen [illegible] und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

(b) *Es gibt eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

(c) *Es gibt eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_a/\mathfrak{M}_a$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_b/\mathfrak{M}_b$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$.*

BEWEIS. 1. Wir setzen (a) voraus. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist abelsch [*3*, (3.5)]. Es existiert eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ [*2*, Satz 2]. $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ ist projektiv und daher auch isomorph zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$, d.h. es gilt (b).

2. Es sei (b) erfüllt. In jeder Kompositionskette von $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{A}$ gibt es eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$, und in jeder Kompositionskette von $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{B}$ gibt es eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ [2, Satz 2]. Wir wählen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ so, daß es keine Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$ gibt, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$. Ebenso bestimmen wir $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ so, daß zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ keine Kompositionsfaktorgruppe vorhanden ist, die zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ projektiv ist. Dann kann $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}$ weder in $\mathfrak{K}$ noch in $\mathfrak{M}$ enthalten sein ([2, Satz 2] angewandt auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ und auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, je nachdem ob $\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{K}$ vorausgesetzt wird). Daraus folgt $\mathfrak{H}=\mathfrak{D}\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}=\mathfrak{D}\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}\cong\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{K}$ ist transponiert zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}\cong\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{M}$ ist transponiert zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{M}$. Wenn $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{D}\cap\mathfrak{M}$, dann ist die Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ liegt, projektiv zu $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ und daher auch projektiv zu der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$, die zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ liegt. Gilt jedoch $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{K}\neq\mathfrak{D}\cap\mathfrak{M}$, dann ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{K}\cap\mathfrak{M}$ elementarabelsch vom Typ (p, p) und daher ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{K}$ projektiv zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\mathfrak{M}$ [3, (3.3)]. Auch hieraus folgt, daß $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ projektiv ist zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$. Es gilt (a).

3. Die Aussagen (b) und (c) sind gleichwertig [2, Satz 2].

BEWEIS VON SATZ 1. I. Wir setzen $s\mathfrak{G}\cong L_1\times L_2$ voraus. Jeder Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann eindeutig darstellbar als Erzeugnis zweier subnormaler Untergruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die Elementen $(a_1, 0_2)$ und $(0_1, a_2)$ entsprechen, wobei 0_i das kleinste Element von L_i und $a_j\in L_j$ ist. Die Verbandsverknüpfungen erfolgen komponentenweise: Aus $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2$ folgt $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{B}_1)\cup(\mathfrak{A}_2\cap\mathfrak{B}_2)$ und $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{B}_1)\cup(\mathfrak{A}_2\cup\mathfrak{B}_2)$. Die Abbildungen $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_i$ $(i=1, 2)$ sind daher Verbandshomomorphismen von $s\mathfrak{G}$ in sich. Entsprechen den Elementen $(I_1, 0_2)$ und $(0_1, I_2)$ [I_i das maximale Element von L_i] die Subnormalteiler $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, dann gilt $\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i$. Aus [2, Satz 3] folgt, daß keine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{G}_i$ projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}_i$. Weil $\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2=\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2=1$ gilt, so kann nach dem Hilfssatz keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ isomorph sein zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Es sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ elementweise vertauschbar [4, (19)]. $\mathfrak{G}$ ist isomorph zum direkten Produkt $\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2$.

II. Es sei $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2$ und keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ sei isomorph zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Wir identifizieren die Elemente von $(\mathfrak{G}_1, 1)$ mit denen von $\mathfrak{G}_1$ und die Elemente von $(1, \mathfrak{G}_2)$ mit denen von $\mathfrak{G}_2$. Aus dem Hilfssatz folgt, daß es keine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{G}_i$ gibt, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}_i$ $(i=1, 2)$. Daher liefern die Abbildungen $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i$ Verbandshomomorphismen von $s\mathfrak{G}$ in sich [2, Satz 3].

Wir zeigen, daß jeder Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ durch seine Komponenten $\mathfrak{A}_i$ eindeutig bestimmt ist. Angenommen, es gilt $\mathfrak{C}=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_1)\cup(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_2)<\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{G}_i$. Wir wählen einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N}\geqq\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$. Es gibt zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_i$ eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$,

die projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ $(i=1, 2)$, [2, Satz 2]. $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}_1$ ist projektiv zu $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M}_2$. Andererseits existiert eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{G}_1$, die projektiv ist zu $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M}_2$ ([2, Satz 2] angewandt auf $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2=1$). Die Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}_1$ oberhalb $\mathfrak{G}_1$ ist daher projektiv zur Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{G}_1$. Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_1)\cup(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_2)$ für alle subnormalen Untergruppen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$. Ferner ist $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})\cap\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i)\cap(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{G}_i)$ und, weil die Abbildungen $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i$ Verbandshomomorphismen sind, $(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})\cap\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i)\cup(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{G}_i)$ für alle Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$. Die Verbandsverknüpfungen werden demnach komponentenweise ausgeführt. $s\mathfrak{G}$ ist isomorph zum direkten Produkt $s\mathfrak{G}_1\times s\mathfrak{G}_2$.

Wir geben noch eine Anwendung unseres Hilfssatzes. Ein Element a eines Verbandes L heißt *neutral* in L, wenn für beliebige Elemente x, y aus L der von a, x, y erzeugte Teilverband distributiv ist.

SATZ 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. Der Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ ist genau dann neutral in $s\mathfrak{G}$, wenn für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gilt: Keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ (zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$) ist isomorph zu einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ (zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$). Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, dann ist jeder in $s\mathfrak{G}$ neutrale Subnormalteiler charakteristisch in $\mathfrak{G}$.*

M. CURZIO hat für auflösbare endliche Gruppen nachgewiesen, daß diese Bedingung notwendig ist, falls $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ normal ist in $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ [1, Theor. IV].

BEWEIS. 1. $\mathfrak{A}$ sei neutral in $s\mathfrak{G}$. Dann ist keine Kompositionsfaktorgruppe oberhalb $\mathfrak{A}$ projektiv zu einer Kompositionsfaktorgruppe unterhalb $\mathfrak{A}$ [2, Satz 3]. Unser Hilfssatz besagt, daß dann keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ existieren kann, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$.

2. Wir setzen umgekehrt diese Bedingung voraus. Angenommen, es gibt eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ oberhalb $\mathfrak{A}$, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ unterhalb $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist abelsch [3, (3.5)]. Wir betrachten eine Kette von Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{H}_0/\mathfrak{K}_0=\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r/\mathfrak{K}_r=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$, in der je zwei aufeinanderfolgende Kompositionsfaktorgruppen transponiert sind. Es gilt $\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_0\cap\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}_r\cap\mathfrak{A}\neq\mathfrak{K}_r\cap\mathfrak{A}$. Es sei i die kleinste der Zahlen $1, \ldots, r$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}\neq\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{K}_{i-1}$ und $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{K}_i$ transponiert sind, gilt $(\mathfrak{H}_{i-1}=\mathfrak{H}_i\cup\mathfrak{K}_{i-1}$ und $\mathfrak{K}_i=\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{K}_{i-1})$ oder $(\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}_{i-1}\cup\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{K}_i)$. Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Dann ist $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{K}_i$ enthalten. Daraus folgt $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$, also ein Widerspruch. Mithin gilt $\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}_{i-1}\cup\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{K}_i$. Weil $\mathfrak{K}_i$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}_i$ ist und $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}>\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ gilt, so ist $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{K}_i$ transponierte Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ und ist projektiv zur Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{K}_{i-1}$ zwischen $\mathfrak{H}_{i-1}$ und $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{K}_{i-1}$. Das widerspricht unserer

Voraussetzung. Folglich ist keine Kompositionsfaktorgruppe oberhalb $\mathfrak{A}$ projektiv zu einer Kompositionsfaktorgruppe unterhalb $\mathfrak{A}$. Daher ist $\mathfrak{A}$ neutral in $s\mathfrak{G}$ [2, Satz 3]. Die in Klammern gesetzte Aussage folgt aus dem Hilfssatz (c).

3. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und $\mathfrak{A}$ neutral in $s\mathfrak{G}$, dann ist $\mathfrak{A}$ als oberer Kern des Verbandshomomorphismus $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$ von $s\mathfrak{G}$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$ [3, (4.5)].

Literatur

[1] CURZIO, M.: Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti. Ricerche di Mat. **7**, 265–280 (1958).

[2] TAMASCHKE, O.: Submodulare Verbände. Math. Z. **74**, 186–190 (1960).

[3] TAMASCHKE, O.: Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler. Math. Z. **75**, 115–126 (1961).

[4] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. März 1960)

TACHIKAWA, H.
Math. Zeitschr. 75, 215–227 (1961)

On algebras of which every indecomposable representation has an irreducible one as the top or the bottom Loewy constituent

By

HIROYUKI TACHIKAWA

INTRODUCTION. Until the present time the problem how to obtain all indecomposable representations for a given algebra seems to be difficult except the following special types of algebras: semi-simple algebras, group algebras in which the groups have cyclic p-Sylow subgroups (cf. [2]), and generalized uni-serial algebras. In view of this situation the author [11] has recently investigated the class of algebras of strong right cyclic representation type (SRCRT-algebras), in which the class of generalized uniserial algebras is properly contained. But in this generalization the symmetry between left ideal structure and right ideal structure is missing. On the other hand MORITA [7] has established a characterization of QF-1 algebras, and he has shown by an example [7, 2.1] that there is no intimate connection between QF-1 algebras and QF-3 algebras. His example is not a SRCRT-algebra; hence, taking up an interesting property which is satisfied by the example, he has propounded to the author the following question: What structure has an algebra A in which for any indecomposable representation (in the ground field P) either the top constituent in the upper Loewy series or the bottom constituent in the lower Loewy series is irreducible? It may happen that for such an algebra an indecomposable left module L is not homomorphic to a primitive left ideal (an indecomposable direct summand of A), but when this is the case, the dual (representation) module $L^* = \mathrm{Hom}(L, P)$ is homomorphic to a primitive right ideal: that is to say, every indecomposable module is either epimorphic to an indecomposable projective module or monomorphic to an indecomposable injective module. So such an algebra will be called to be of cyclic-cocyclic representation type (abbreviated by cyclic-cocyclic type). The purpose of this paper is to determine the structure of algebras of cyclic-cocyclic type.

Let A be a finite dimensional associative algebra with a unit element 1, N the radical of A and $e_\varkappa$ (or e_λ, e_μ) the primitive idempotents of A. Then in order that A be of cyclic-cocyclic type it is necessary and sufficient that the following conditions are satisfied:

I. Each of $Ne_\varkappa$ and $e_\lambda N$ is either uni-serial (i.e. its composition series is unique) or a sum (not necessarily direct sum) of two uni-serial ideals.

II. In case $Ne_\varkappa$ is a sum of two uni-serial ideals, if $e_\mu N e_\varkappa \not\equiv 0 \bmod J$ for a simple subideal J of $Ne_\varkappa$, then $e_\mu A$ is uni-serial. And the same holds for a right ideal $e_\lambda N$ which is a sum of two uni-serial ideals.

In this characterization it seems of interest that there exists an intimate relation between left ideal structure and right ideal structure (cf. the condition II) and the notion "uni-serial" which is introduced by KOETHE [4] still plays an important role.

In §1 we shall consider the case where $N^2=0$. All necessary conditions for algebras of cyclic-cocyclic type are obtained in §2. Using the condition II stated above, §3 is devoted to a discussion of the problem whether any isomorphism between simple subideals of $Ae_\varkappa$ can be extendable or not. The sufficiency proof for the conditions is completed in §4.

Throughout this paper a unit element of A is assumed to act as the identity operator over all A-modules considered, N denotes the radical of A. The denominations and the notations used in [11] will retain the same significances and also knowledge of our paper [11] will be assumed.

§1. The case where $N^2=0$

Let $1=\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_{\varkappa,i}$ be a decomposition of a unit element of A into a sum of mutually orthogonal primitive idempotents, where $Ae_{\varkappa,i}\approx Ae_{\lambda,j}$, if and only if $\varkappa=\lambda$. Put $e=\sum_{\varkappa=1}^{n} e_{\varkappa,1}$; then eAe is the basic algebra of A, and it is known (cf. [6]) that there exist covariant functors between the category of A-modules and the category of eAe-modules, which are inverses of each other. Hence in order that A be of cyclic-cocyclic type it is necessary and sufficient that eAe be of the same type. By this reason hereafter we shall always assume that A is a self-basic algebra (i.e. $f(\varkappa)=1$ for all $\varkappa$).

Now we shall consider the case where $N^2=0$ (for the meaning of N cf. Introduction).

LEMMA 1.1. *Let A be an algebra of cyclic-cocyclic type with $N^2=0$. If $e_\varkappa N$ is not simple, then $e_\varkappa N=e_\varkappa u e_\lambda A\oplus e_\varkappa v e_\mu A$, and Ae_λ and Ae_μ are both uni-serial, where e_λ and e_μ are not necessarily different from each other.*

PROOF. Since $N^2=0$, $e_\varkappa N$ is completely reducible and we have a direct decomposition of $e_\varkappa N$: $e_\varkappa N=e_\varkappa u_1 e_\lambda A\oplus e_\varkappa u_2 e_\mu A\oplus\cdots$. Let M be an interlacing of Ae_λ and Ae_μ obtained by using a map ϑ: $xe_\varkappa u_1 e_\lambda\to xe_\varkappa u_2 e_\mu$ for all $x\in A$ as a lacing isomorphism. We shall show that M is directly indecomposable. Suppose that M is decomposed into $Ae_\lambda t_1$ and $Ae_\mu t_2$. Then we have $e_\lambda\alpha=e_\lambda x e_\lambda t_1+e_\lambda y e_\mu t_2$ and $e_\mu\beta=e_\mu x' e_\lambda t_1+e_\mu y' e_\mu t_2$, where α and β are injections of Ae_λ and Ae_μ into M respectively. Since $[M]=[Ae_\lambda]+[Ae_\mu]-1$, either a natural homomorphism: $Ae_\lambda\to Ae_\lambda t_1$ or a natural homomorphism: $Ae_\mu\to Ae_\mu t_2$ is an isomorphism. Suppose $Ae_\lambda\approx Ae_\lambda t_1$. Then, as $Ae_\mu t_2$ is not isomorphic to Ae_μ, $e_\lambda x e_\lambda$ must be a regular element of $e_\lambda Ae_\lambda$. From $u_1 e_\lambda\alpha=u_2 e_\mu\beta$ we obtain $u_1=u_2 e_\mu x' e_\lambda(e_\lambda x e_\lambda)^{-1}$, for $u_1 e_\lambda x e_\lambda=u_2 e_\mu x' e_\lambda$. But

this contradicts the direct decomposition of $e_\varkappa N$. Thus M is indecomposable. Now, if Ne_λ or Ne_μ is not simple, both the top Loewy constituent of M and the bottom Loewy constituent[1]) of M are not simple and this contradicts the assumption that A is of cyclic-cocyclic type. Hence Ae_λ, Ae_μ, ... are uni-serial. Then it follows from Propositions 3.1, 3.3 and 3.5 of [*11*] that the number of $u_1, u_2, \ldots$ is at most two, because otherwise A would not be of cyclic-cocyclic type. This completes the proof.

REMARK. In Lemma 1.1 the case where $e_\lambda = e_\mu$ does not happen, if P is an algebraically closed field. In fact, if $e_\lambda = e_\mu$, it follows by theorem 2.1 of [*3*] that A is of unbounded type, and A is, of course, not of cyclic-cocyclic type. (For the case where P is not algebraically closed, see [*12*].)

Then by the duality of modules we obtain

COROLLARY 1.2. *In Lemma* 1.1 *right A-modules $e_\varkappa A/e_\varkappa u e_\lambda A$ and $e_\varkappa A/e_\varkappa v e_\mu A$ are injective.*

COROLLARY 1.3. *Let A be an algebra of cyclic-cocyclic type with $N^2=0$. Then every indecomposable left (resp. right) A-module whose top constituent is not simple is obtained by interlacing of two uni-serial primitive ideals, and is injective.*

COROLLARY 1.4. *In Lemma* 1.1 *every isomorphism between simple submodules of $e_\varkappa A$ can be extendable to an automorphism which is induced by multiplication with a regular element of $e_\varkappa A e_\varkappa$ from the left hand.*

PROOF. Assume that ϑ is an isomorphism of $e_\varkappa u e_\lambda A$ onto $e_\varkappa u' e_\lambda A$ and $\vartheta(u) = u'$. Then by Lemma 1.1 Ae_λ is uni-serial, i.e. Ne_λ is simple, and $Ne_\lambda = Ae_\varkappa u e_\lambda$. Hence there exists a regular element $e_\varkappa r e_\varkappa$ such that $e_\varkappa r e_\varkappa u = u'$. Thus the conclusion is obvious.

PROPOSITION 1.5. *Let A be an algebra with $N^2=0$. A is of cyclic-cocyclic type if the following two conditions are satisfied*:

I. $Ne_\varkappa$ (resp. $e_\lambda N$) is isomorphic either to a simple module or to a direct sum of two simple modules.

II. If $Ne_\varkappa$ (resp. $e_\lambda N$) is not simple and $e_\mu N e_\varkappa$ (resp. $e_\lambda N e_\eta$) $\neq 0$, then $e_\mu A$ (resp. Ae_η) is uni-serial.

PROOF. Let M be a left A-module. We shall prove that every indecomposable direct summand of M has a simple module as the top Loewy constituent or the bottom Loewy constituent. Let $e_{\varkappa_i} g_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, be a system of generators of M such that any $Ae_{\varkappa_i} g_i$ is not contained in $\sum_{j \neq i} Ae_{\varkappa_j} g_j$. Assuming that for $n \leqq r$ every indecomposable direct summand of M has a simple module as the top constituent or the bottom constituent, we shall proceed to the proof by induction on n. If an $Ae_{\varkappa_1} g_1$ is simple or injective, then it must be a direct summand of M, and hence our conclusion follows readily from the assumption of induction. Therefore we may assume that all $Ae_{\varkappa_i} g_i$ are neither simple nor injective. Let us denote by U a sum of $Ae_{\varkappa_i} g_i$, $i \geqq 2$, and by D_j, $j = 2, 3, \ldots$, indecomposable direct summands of U,

[1]) The top (resp. bottom) Loewy constituent of a left A-module M means the top (resp. bottom) constituent of upper (resp. lower) Loewy Series.

i.e. $U=D_2\oplus D_3\oplus\cdots$. Then according to Corollary 1.3 we may assume that all D_j are quasi-primitive (for the definition cf. [11]), and hence $Ae_{\varkappa_1}g_1$ and D_j, $j=2, 3, \ldots$ are isomorphic to primitive ideals which are not injective. Now we shall distinguish two cases.

1. Suppose that $Ae_{\varkappa_1}g_1$ is isomorphic to a uni-serial primitive ideal which is not injective. Then every D_j is also isomorphic to uni-serial primitive ideal, for if certain D_j is not uni-serial, it follows from Corollary 1.2 that any simple submodule of D_j is not isomorphic to $Ne_{\varkappa_1}g_1$ (cf. Corollary 2.2 of [5]) and D_j must be a direct summand of M. Thus we may assume that M is a sum of uni-serial modules. On the other hand by Lemma 1.1 it is easily seen that the class of all uni-serial A-modules satisfies conditions III and IV of Theorem 5.4 of [11]. Hence M is decomposed into a sum of modules whose bottom constituents are simple.

2. Suppose that $Ae_{\varkappa_1}g_1$ is isomorphic to $Ae_{\varkappa_1}$ which is not uni-serial; then according to Corollary 1.2 all D_j are isomorphic to $Ae_{\varkappa_1}$, for otherwise at least one D_j would be a direct summand of M. Let σ_j be projections: $Ae_{\varkappa_1}g_1\cap U\to D_j$ and S a simple submodule of $Ae_{\varkappa_1}g_1\cap U$. Let σ_j be the restrictions of σ_j to S. Then by Corollary 1.4 every σ_j is extendable to a homomorphism τ_j: $Ae_{\varkappa_1}g_1\to D_j$. Let $Ae_{\varkappa_1}g_j'=\left\{x-\sum_{j\geq 2}\tau_j(x)\,\middle|\,x\in Ae_{\varkappa_1}g_1\right\}$. Then M is a sum of $Ae_{\varkappa_1}g_1'$ and U, and $Ae_{\varkappa_1}g_1'$ is injective or simple, for $Ae_{\varkappa_1}g_1$ is isomorphic to a proper homomorphic image of $Ae_{\varkappa_1}$. Since $Ae_{\varkappa_1}g_1'$ is not contained in U, $Ae_{\varkappa_1}g_1'$ must be a direct summand of M and the conclusion of this lemma is obtained from the assumption of induction.

§ 2. Necessary conditions

The following lemmas are essentially proved in Proposition 2.3 of [11].

LEMMA 2.1. *Let M_1 and M_2 be uni-serial left A-modules such that the composition length of M_2 equals to that of M_1, and M_1 and M_2 are homomorphic to uni-serial primitive ideals $Ae_\varkappa$ and Ae_λ respectively (here A is not assumed to be of cyclic-cocyclic type). Let ϑ be an isomorphism: $S^1(M_2)\to S^1(M_1)$. Then the interlacing module of M_1 and M_2 obtained by using ϑ as the lacing isomorphism is directly decomposable if and only if ϑ is extendable to a isomorphism $M_2\to M_1$.*

LEMMA 2.2. *In Lemma 2.1, if we assume that $e_\varkappa\neq e_\lambda$, in place of assuming that $Ae_\varkappa$ and Ae_λ is uni-serial, then the interlacing module is indecomposable.*

PROOF. Let L be an interlacing module obtained by using ϑ as the lacing isomorphism. Suppose that L is decomposed into L_1 and L_2. Then from the proof of Proposition 2.3 of [11] it will be seen that we have only to show that L_1 and L_2 are uni-serial. Denote by p_1 and p_2 the composition length of L_1 and L_2 respectively. If $p_1>p_2$, then $p_2=p-1$, where $p=[M_1]$ and we may assume that $M_1/N^{p-1}M_1\approx L_1/N^{p-1}L_1$ and $M_2/N^{p-1}M_2\approx L_2/N^{p-1}L_2$ for it holds that $L/N^{p-1}L\approx M_1/N^{p-1}M_1\oplus M_2/N^{p-1}M_2$.

Then by calculation of the composition length of L we obtain that $N^{p-1}L_2=0$, $N^{p-1}L_1$ is simple, and hence L_1 is uni-serial.

PROPOSITION 2.3. *Let A be an algebra of cyclic-cocyclic type with $N^3=0$. If $Ne_\varkappa=Ae_\lambda u+Ae_\eta v$, then $Ae_\lambda u$ and $Ae_\eta v$ are uni-serial.*

PROOF. Suppose that $Ne_\lambda u\approx\bar{A}\bar{e}_\mu\oplus\bar{A}\bar{e}_{\mu'}$, consequently $Ne_\lambda/N^2e_\lambda\approx\bar{A}\bar{e}_\mu\oplus\bar{A}\bar{e}_{\mu'}$, where $\bar{A}=A/N$. Then Lemma 1.1 implies that $e_\mu A$ and $e_{\mu'}A$ are both uni-serial, and hence from the assumption it follows that $S^2(e_\mu A)\approx S^2(e_{\mu'}A)\approx e_\lambda A/e_\lambda N^2$, where $S^2(e_\mu A)$ and $S^2(e_{\mu'}A)$ denote the annihilators of N^2 in $e_\mu A$ and $e_{\mu'}A$ respectively. Let Θ be an isomorphism: $S^2(e_\mu A)\to S^2(e_{\mu'}A)$ and ϑ the restriction of Θ to $S^1(e_\mu A)$. Then if we choose Θ suitably, the interlacing of $e_\mu A$ and $e_{\mu'}A$ obtained by using ϑ as lacing isomorphism is indecomposable. To prove this we shall distinguish two cases.

1. $e_\mu=e_{\mu'}$. Then it holds that

$$(e_\mu Ne_\lambda/e_\mu N^2e_\lambda:\bar{e}_\lambda\bar{A}\bar{e}_\lambda)=1\quad\text{and}\quad(e_\mu Ne_\lambda/e_\mu N^2e_\lambda:\bar{e}_\mu\bar{A}\bar{e}_\mu)=2.$$

Hence we can find an automorphism Θ: $S^2(e_\mu A)\to S^2(e_\mu A)$ such that it has no extension. Let ϑ be the restriction of Θ to $S^1(e_\mu A)$. Since $e_\mu A$ is uni-serial, it follows Lemma 2.1 that $\mathrm{Int}_\vartheta(e_\mu A, e_\mu A)$ is indecomposable.

2. $e_\mu\neq e_{\mu'}$. Then any isomorphism Θ: $S^2(e_\mu A)\to S^2(e_{\mu'}A)$ is not extendable. Hence from Lemma 2.2 $\mathrm{Int}_\vartheta(e_\mu A, e_{\mu'}A)$ is indecomposable, if ϑ is the restriction of Θ to $S^1(e_\mu A)$.

Now, in both cases Θ is an extension of ϑ and hence it follows from Lemma 1.3 of [*11*] that the bottom constituent of $\mathrm{Int}\,\vartheta(e_\mu A, e_{\mu'}A)$ is not simple. Thus $\mathrm{Int}_\vartheta(e_\mu A, e_{\mu'}A)$ has non-simple modules as the top constituent and the bottom constituent. This contradicts the hypothesis that A is of cyclic-cocyclic type.

PROPOSITION 2.4. *Let A be an algebra of cyclic-cocyclic type with $N^3=0$. If L is a left A-module such that L/N^2L is uni-serial, then L is itself uni-serial.*

PROOF. Let L be homomorphic to $Ae_\varkappa$. Suppose that L is not uni-serial. Then from Proposition 2.3 we may assume that $Ne_\varkappa/N^2e_\varkappa\approx\bar{A}\bar{e}_\lambda$ and $N^2e_\varkappa\approx\bar{A}\bar{e}_\mu\oplus\bar{A}\bar{e}_\nu$. Put $N^2e_\varkappa=Ae_\mu u\oplus Ae_\nu v$; then the dual representation modules M_1 and M_2 of $Ae_\varkappa/Ae_\mu u$ and $Ae_\varkappa/Ae_\nu v$ are uni-serial, and we have $M_1/M_1N\approx\bar{e}_\nu\bar{A}$, $M_2/M_2N\approx\bar{e}_\mu\bar{A}$ and $S^2(M_1)=M_1N\approx S^2(M_2)=M_2N\approx(Ae_\varkappa/N^2e_\varkappa)^*$, where $(Ae_\varkappa/N^2e_\varkappa)^*$ denotes the dual representation module of $Ae_\varkappa/N^2e_\varkappa$. Let us denote by Θ an isomorphism of $S^2(M_1)$ onto $S^2(M_2)$ and by ϑ the restriction of Θ to $S^1(M_1)$.

If $e_\mu\neq e_\nu$, it is clear that Θ has no extension. Hence by Lemma 2.2 $\mathrm{Int}_\vartheta(M_1, M_2)$ is indecomposable and further by Lemma 1.3 of [*11*] the bottom constituent of it is not simple. Since the top constituent of $\mathrm{Int}_\vartheta(M_1, M_2)$ is clearly non-simple, this leads us to a contradiction.

Next suppose that $e_\mu=e_\nu$. Then, since $Ne_\varkappa$ is homomorphic to Ae_λ and $(e_\mu Ne_\lambda/e_\mu N^2e_\lambda:\ \bar{e}_\mu\bar{A}\bar{e}_\mu)=2$, we have from Lemma 1.1 that $(e_\mu Ne_\lambda/e_\mu N^2e_\lambda:\ \bar{e}_\lambda\bar{A}\bar{e}_\lambda)=1$. Further it holds that

$$(e_\mu N^2e_\varkappa:\ \bar{e}_\varkappa\bar{A}\bar{e}_\varkappa)=1,$$

for if $(e_\mu N^2e_\varkappa:\bar{e}_\varkappa\bar{A}\bar{e}_\varkappa)\geqq 2$, then together with the condition $(e_\mu N^2e_\varkappa:\bar{e}_\mu\bar{A}\bar{e}_\mu)\geqq 2$

Theorem 2 of [12] implies that A is an algebra of unbounded representation type. Hence by Proposition 2.3 it holds that

$$(\bar{e}_\varkappa \bar{A} \bar{e}_\varkappa : P) = (\bar{e}_\lambda \bar{A} \bar{e}_\lambda : P) = 2(\bar{e}_\mu \bar{A} \bar{e}_\mu : P),$$

where P is the ground field of A. Now if $e_\mu A$ is not uni-serial, from the above equation it follows that $e_\mu N/e_\mu N^2 \approx \bar{e}_\lambda \bar{A}$, $e_\mu N^2 \approx \bar{e}_\varkappa \bar{A} \oplus \bar{e}_{\varkappa'} \bar{A}$, where $e_\varkappa \neq e_{\varkappa'}$. But as is shown in the first case, this leads us to a contradiction. Hence $e_\mu A$ is uni-serial, i.e. $e_\mu N/e_\mu N^2 \approx \bar{e}_\lambda \bar{A}$ and $e_\mu N^2 \approx \bar{e}_\varkappa \bar{A}$. Then again from the above equation, we can choose an automorphism T of $S^2(e_\mu A) = e_\mu N$ so that it is maximal, and by using τ, which is the restriction of T to $S^1(e_\mu A) = e_\mu N^2$, as the lacing isomorphism we obtain an indecomposable interlacing module of two copies of $e_\mu A$ such that its top constituent and bottom constituent are not simple. Hence we conclude that L is uni-serial.

In Proposition 2.4 the condition that $N^3 = 0$ can be released.

PROPOSITION 2.5. *Let A be of cyclic-cocyclic type. If L is a left A-module such that L/N^2L is uni-serial, then L is uni-serial.*

PROOF. Assume that $N^p L \neq 0$ and $L/N^p L$ is uni-serial; then $N^{p-2}L/N^p L$ is uni-serial. Hence it follows from Proposition 2.4 that $N^{p-2}L/N^{p-1}L$ is uni-serial and equivalently $N^p L/N^{p-1}L$ is simple. Thus by means of induction our conclusion is proved.

Then applying Proposition 2.5 to Proposition 2.3 the condition that $N^3 = 0$ can be also released from Proposition 2.3 and we have

PROPOSITION 2.6. *Let A be of cyclic-cocyclic type. If $Ne_\varkappa/N^2e_\varkappa$ is not simple, then $Ne_\varkappa$ is a sum of two uni-serial ideals.*

PROPOSITION 2.7. *In Proposition 2.6 let $Ne_\varkappa$ be a sum of two uni-serial ideals $Ae_\lambda u$ and $Ae_\mu v$. Then we can take $e_\lambda u$ and $e_\mu v$ such that the intersection of $Ae_\lambda u$ and $Ae_\mu v$ is either zero or simple (i.e. $Ae_\varkappa$ has a unique minimal subideal).*

PROOF. Assume that $Ne_\varkappa$ is indecomposable, then $S^1(Ne_\varkappa)$ is simple and by Proposition 2.4 $S^2(Ne_\varkappa)$ is not uni-serial. Let $(Ne_\varkappa)^* N = u'e_{\lambda'}A + v'e_{\mu'}A$, and put Annih $(u'e_{\lambda'}A : Ne_\varkappa) = Ae_\lambda u$ and Annih $(v'e_{\mu'}A : Ne_\varkappa) = Ae_\mu v$, then $Ae_\lambda u \cap Ae_\mu v$ is simple.

PROPOSITION 2.8. *In Proposition 2.7 assume that $e_\eta N^{p-1} e_\lambda u \not\equiv 0$ mod. $N^p e_\lambda u + Ne_\mu v$, $N^p e_\lambda u + Ne_\mu v \neq 0$ for $p \geqq 2$. Let us denote by s $(= e_\varkappa s)$ a generator of $Ae_\varkappa/N^p e_\lambda u + Ne_\mu v$ and by $Ae_\tau t$ a left A-module such that $Ne_\tau t$ is isomorphic to $\bar{A}\bar{e}_\eta$. Then any isomorphism ϑ: $Ne_\tau t \to N^{p-1}e_\varkappa s$ is extendable to a monomorphism: $Ae_\tau t \to Ae_\varkappa s$.*

PROOF. We shall first consider the case where $e_\tau = e_\varkappa$. Since $Ae_\tau t$ is considered as a residue class module of $Ae_\varkappa$, by Corollary 1.2 $Ae_\tau t$ as well as $N^{p-2}e_\lambda u e_\varkappa s$ is injective relative to N^2. Hence ϑ is extendable.

Hence we may assume $e_\tau \neq e_\varkappa$. Suppose that ϑ is maximal and let M be an interlacing of $Ae_\tau t$ and $Ae_\varkappa s$ obtained by using ϑ as the lacing isomorphism; then M is directly indecomposable. To prove this, suppose that M is decomposed into M_1 and M_2, where M_1 and M_2 is homomorphic to $Ae_\varkappa$ and Ae_τ respectively. A generator w of M_1 is expressed as follows:

$e_\varkappa w = e_\varkappa x_1 e_\tau t + e_\varkappa x_2 e_\varkappa s$, x_1 and $x_2 \in A$. Then $e_\varkappa x_2 e_\varkappa$ is a regular element of $e_\varkappa A e_\varkappa$, because $e_\tau \neq e_\varkappa$. Therefore

$$Nw = NM_1 = Ne_\varkappa x_2 e_\varkappa s.$$

Since $e_\varkappa x_2 e_\varkappa$ is a regular element, the right term of the above equations is the unique maximal submodule of $Ae_\varkappa s$, and at the same time Nw is a unique maximal submodule of M_1. Hence $S^1(M_1) = S^1(Ae_\varkappa s)$. On the other hand, since ϑ is maximal, $S^1(Ae_\varkappa s) = S^1(M)$. But this is a contradiction. Therefore $\operatorname{Im}\vartheta(Ae_\varkappa s, Ae_\tau t)$ is indecomposable. As the top constituent of M and the bottom constituent of it are not simple, this contradicts to the fact that A is of cyclic-cocyclic type. Thus ϑ must be extendable.

PROPOSITION 2.9. *In Proposition* 2.8 $e_\eta A$ *is a uni-serial* A*-module.*

PROOF. In the proof of Proposition 2.7 the image of an extension of ϑ is contained in the S^2-part of $Ae_\varkappa/N^\rho e_\lambda u + Ne_\mu v$. Let $N^{\rho-2}e_\lambda u/N^{\rho-1}e_\lambda u$ be isomorphic to $\bar{A}\bar{e}_\eta$. Since the S^2-part of $Ae_\varkappa/N^\rho e_\lambda u + Ne_\mu v$ is isomorphic to $N^{\rho-2}e_\lambda u/N^\rho e_\lambda u$, by Proposition 2.8 we have $e_\xi = e_\tau$. Hence every simple constituents of $e_\eta N/e_\eta N^2$ is isomorphic to $\bar{e}_\tau \bar{A}$ and the multiplicity of $\bar{e}_\zeta \bar{A}$ in $e_\eta N/e_\eta N^2$ is one, for if the multiplicity equals to two, we can choose ϑ so as to be a maximal homomorphism and this opposes to the result of Proposition 2.8. Then it follows from Proposition 2.5 that $e_\eta A$ is uni-serial.

Then combining Lemma 1.1, Proposition 2.6 and Proposition 2.8 we can easily prove

PROPOSITION 2.10. *Let* A *be of cyclic-cocyclic type. Let* $Ne_\varkappa$ *be a sum of two uni-serial ideals and* J *a simple subideal of* $Ne_\varkappa$. *If* $e_\eta Ne_\varkappa \not\equiv 0 \bmod J$, *then* $e_\eta A$ *is uni-serial.*

In concluding this section we sum up the results of this section.

PROPOSITION 2.11. *Let* A *be an algebra of cyclic-cocyclic type. Then the following conditions are satisfied*:

I. $Ne_\varkappa$ (*resp.* $e_\lambda N$) *is either uni-serial or a sum of two uni-serial ideals.*

II. In case $Ne_\varkappa$ *is a sum of two uni-serial ideals, if* $e_\eta Ne_\varkappa \not\equiv 0 \bmod J$ *for a simple subideal* J *of* $Ne_\varkappa$, *then* $e_\eta A$ *is uni-serial. And the same holds for* $e_\lambda N$ *which is a sum of two uni-serial ideals.*

§ 3. Preparations for the sufficiency proof

Let A be an algebra over a field P and with a unit element 1. We shall assume for all propositions in this section that A satisfies the conditions stated in Proposition 2.11.

PROPOSITION 3.1. *Let* $Ae_\varkappa$ *be a primitive left ideal of* A. *If* $Ne_\varkappa$ *is a sum of two uni-serial ideals, and if* $Ae_\varkappa$ *has a unique minimal subideal, then* $Ae_\varkappa$ *is injective.*

PROOF. Suppose $Ae_\varkappa$ is not injective; then for a primitive right ideal $e_\lambda A$, $Ae_\varkappa$ is isomorphic to a proper submodule of $(e_\lambda A)^*$, where $(e_\lambda A)^*$ denotes the dual (representation) module of $e_\lambda A$. Since by the condition II of Proposition 2.11 every proper submodule of $(e_\lambda A)^*$ with a simple top constituent

is uni-serial, $Ae_\varkappa$ must be uni-serial. But this contradicts to the assumption. Thus $Ae_\varkappa \approx (e_\lambda A)^*$ and $Ae_\varkappa$ is injective (cf. [8]).

PROPOSITION 3.2. *Let M be a homomorphic image of $Ae_\varkappa$ and S a simple submodule of M. If the S^1-part of M is non-simple, then we can take elements u and v of $Ne_\varkappa$ such that*

$$\operatorname{Ker}\vartheta = N^\rho u + N^\tau v, \quad \text{and} \quad \vartheta(N^{\rho-1}u + N^\tau v) = S,$$

where ϑ is the natural homomorphism of $Ae_\varkappa$ onto M.

PROOF. Let us denote by $e_\varkappa b$ a generator of M. $Ne_\varkappa b$ is an interlacing module of two uni-serial module and each of them is injective relative to a power of N (its exponent is equal to the composition length of it (cf. [11], p. 212 and the condition II of Proposition 2.11). Thus $Ne_\varkappa b$ is a direct sum of uni-serial modules $Ae_\lambda u'b$ and $Ae_\mu v'b$. Then it holds that $Ne_\varkappa = Ae_\lambda u' + Ae_\mu v'$, for $\operatorname{Ker}\vartheta \subseteqq N^2 e_\varkappa$ and $Au' + Av' + \operatorname{Ker}\vartheta = Ne_\varkappa$ and hence u' and v' are not contained in $N^2 e_\varkappa$ (cf. [14], Lemma 5). If $N^\rho e_\lambda u'b = 0$, $N^{\rho-1}e_\lambda u'b \neq 0$, $N^\tau e_\mu v'b = 0$, $N^{\tau-1}e_\mu v'b \neq 0$, then $\operatorname{Ker}(Ae_\varkappa \to Ae_\varkappa b) = N^\rho e_\lambda u' + N^\tau e_\mu v'$. This is the first conclusion.

Since $Ae_\lambda u'b$ and $Ae_\mu v'b$ are injective relative to N^ρ and N^τ. Hence we can alter generators u' and v' of $Ne_\varkappa b$ to u and v such that $N^{\rho-1}ub$ or $N^{\rho-1}vb$ is identical to S and $Ne_\varkappa b = Aub \oplus Avb$. This completes the proof.

Let M and M' be homomorphic to $Ae_\varkappa$ and Ae_λ respectively, and suppose that they have non-simple S^1-part. Let S and S' be simple submodules of M and M' respectively. Then according to Proposition 3.2 we can select elements $ue_\varkappa$, $ve_\varkappa$, ue_λ, ve_λ and obtain the following exact sequences:

$$0 \to N^m u + N^n v \to Ae_\varkappa \xrightarrow{\eta} M \to 0,$$
$$0 \to N^m u + N^n v \to N^{m-1}u + N^n v \xrightarrow{\eta} S \to 0,$$
$$0 \to N^{m'}u' + N^{n'}v' \to Ae_\lambda \xrightarrow{\eta} M \to 0,$$
$$0 \to N^{m'}u' + N^{n'}v' \to N^{m'-1}u' + N^{n'}v' \xrightarrow{\eta'} S' \to 0.$$

Assume that S and S' are isomorphic to each other. Then we have

PROPOSITION 3.3. *If $m < m'$, then every isomorphism of S onto S' can be extendable to a homomorphism of M into M'.*

PROOF. By $e_\varkappa a$ and $e_\lambda b$ let us denote images of $e_\varkappa$ and e_λ by natural homomorphisms η, η'. Since $Ne_\varkappa a = Aua \oplus Ava$ and $Ne_\lambda b = Au'b \oplus Av'b$, ϑ: $N^{m-1}ua\,(=S) \to N^{m'-1}u'b\,(=S')$ is considered as an isomorphism $N^{m-1}ua + Ava/Ava \to N^{m'-1}u'b$. Then ϑ is extendable to a monomorphism Θ: $Ae_\varkappa a/Ava \to Nu'b$, for $Nu'b$ is injective relative to $N^{m'-1}$ and $m < m'$. Hence by an obvious way we obtain a homomorphism of $Ae_\varkappa a$ into $Ae_\lambda b$ which is an extension of ϑ.

PROPOSITION 3.4. *If $m = m'$ and if $n \geqq n'$, then every isomorphism of S onto S' can be extendable to a homomorphism of M into M'.*

PROOF. We shall divide the proof into two parts.

(i) Assume $m \geqq n$. From the assumption $m = m'$ we obtain $e_\varkappa = e_\lambda$. Since $Nu \cap Av \subseteqq N^m u + N^n v$ and $Nu' \cap Av' \subseteqq N^{m'}u' + N^{n'}v'$, ϑ may be considered as

a map: $N^{m-1}u+Av/N^mu+Av\to N^{m'-1}u'+Av'/N^{m'}u'+Av'$. Then, since $Ae_\varkappa/N^mu\ Av$ and $Ae_\lambda/N^{m'}u'+Av'$ are injective relative to N^{m+1}, ϑ is extendable to an isomorphism ϑ': $Ae_\varkappa/N^mu+Au\to Ae_\varkappa/N^mu'+Av'$. Put

$$\vartheta'(e_\varkappa \bmod N^mu+Av)=e_\varkappa re_\varkappa \bmod N^mu'+Av',$$

then it holds that

$$ur\equiv au' \bmod N^{m'}u'+Av' \quad \text{and} \quad vr\equiv 0 \bmod N^{m'}u'+Av',$$

and au' is a generator of Au'. Now we shall consider a map Θ: $Ae_\varkappa/N^mu+N^nv\to Ae_\varkappa/N^{m'}u'+N^{n'}v'$, which is defined by

$$\Theta(xe_\varkappa \bmod N^mu+N^nv)=xe_\varkappa re_\varkappa \bmod N^{m'}u'+N^{n'}v'$$

for all $x\in A$. Θ is clearly an extension of ϑ, and we must verify that Θ is well defined. It follows however from the above equations that

$$N^mur\equiv N^mau' \bmod N^{2m}u'+N^mv'$$

and from $n'<n\leqq m$ we have $N^mur\leqq N^{m'}u'+N^{n'}v'$. On the other hand it holds $N^nvr\equiv 0 \bmod N^{m'+n}u'+N^nv'$, hence $N^nvr\leqq N^{m'}u'+N^{n'}v'$. Thus we obtain $(N^mu+N^nv)r\leqq N^{m'}u+N^{n'}v$. This completes the proof for this case.

(ii) Assume $m<n$. By the same reason as in the first case ϑ may be considered as a map: $N^{m-1}u+N^nv/N^mu+N^nv\to N^{m'-1}u'+N^{n'}v'/N^{m'}u'+N^{n'}v'$. Since $Au+N^nv/N^mu+N^nv$ and $Au'+N^{n'}v'/N^{m'}u'+N^{n'}v'$ are injective relative to N^m, ϑ is extendable to an isomorphism ϑ':

$$Au+N^nv/N^mu+N^nv\to Au'+N^{n'}v'/N^{m'}u'+N^{n'}v'.$$

Put $\vartheta'(u \bmod N^mu+N^nv)=au' \bmod N^{m'}u'+N^{n'}v'$, then a is a regular element of $e_\mu Ae_\mu$ when Au is a homomorphic image of Ae_μ. From the condition II of Proposition 2.11 it follows that $e_\mu A$ and consequently $e_\mu N$ are uni-serial right ideal, and au' and u are both generator of $e_\mu N$. Hence there exists a regular element r of $e_\varkappa Ae_\varkappa$ such that

$$au'=ur. \tag{1}$$

Then by using this r we can define a homomorphism Θ which is an extension of Θ' (consequently ϑ) as follows:

$$\Theta(xe_\varkappa \bmod N^mu+N^nv)=xe_\varkappa re_\varkappa \bmod N^{m'}u'+N^{n'}v'$$

for all $x\in A$. Therefore it will remain to prove that Θ is well defined. By (1) we obtain $N^mur=N^mau'=N^mu'$. On the other hand it follows from $n>m'$, n' and $N^nvr<N^{n+1}e_\varkappa$ that $N^nvr\leqq N^{m'}u'+N^{n'}v'$. Hence

$$(N^mu+N^nv)r=N^{m'}u+N^{n'}v.$$

Thus the proof is completed.

§ 4. Sufficiency proof

In this section we shall give a sufficiency proof of the conditions in our main theorem (cf. Introduction); we shall assume throughout this section that the conditions I and II of Proposition 2.11 are satisfied by an algebra A considered in the following. Then we have first

PROPOSITION 4.1. *The totality of uni-serial left A-modules satisfies the conditions II, III and IV of Theorem* 5.4 *of* [11].

PROOF. We have only to ascertain the validity of the condition II of Theorem 5.4 of [11]. Suppose it is not satisfied; then we can construct a left A-module M which is an interlacing of two uni-serial modules and has a uni-serial S^2-part. Then M^*/M^*N^2 is uni-serial but M^* is not uni-serial, and this contradicts the condition I of Proposition 2.11 (cf. also Proposition 2.5).

Let M be a left A-module such that the top Loewy constituent is isomorphic to a direct sum of simple left A-modules $\bar{A}\bar{e}_{\varkappa_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$, where $e_{\varkappa_i}$ is not necessarily different from the others. Now we shall prove that either the top Loewy constituent of any indecomposable direct summand of M or the bottom Loewy constituent is simple.

If all $Ae_{\varkappa_i}$ are uni-serial ideals, M is considered as an interlacing of uni-serial modules each of which is a homomorphic image of $Ae_{\varkappa_i}$, $i=1, 2, \ldots, s$, and then according to Proposition 4.1 every direct summand of M has a simple module as the bottom Loewy constituent. Hence we may assume that there exists a primitive idempotent, say $e_{\varkappa_1}$ for which $Ae_{\varkappa_1}$ is not uni-serial. Then the following proposition holds.

PROPOSITION 4.2. *Let M be a left A-module and let $M/NM \approx \sum_{i=1}^{s} \bar{A}\bar{e}_{\varkappa_i}$. If $s \geqq 2$ and if $Ae_{\varkappa_1}$ is neither uni-serial nor simple, then M is directly decomposable and has a direct summand whose top Loewy constituent is isomorphic to $\bar{A}\bar{e}_{\varkappa_1}$.*

If this proposition is proved, our pursose will be accomplished by Proposition 4.1.

PROOF. This is done by double induction. Let $N^{r+1}M$ be zero-module. We shall assume first that this proposition holds for all left A-module L such that $N^rL=0$. As was shown in § 2, this assumption is really satisfied for $r=2$.

Next we assume that this proposition holds for a left A-module L (and hence every directly indecomposable direct summand of L has a simple module as its top Loewy constituent or its bottom Loewy constituent), if L is annihilated by N^{r+1} and if the top Loewy constituent of L is a sum of at most $s-1$ simple left A-modules.

Denote by $\widetilde{M}$ the factor module of M by N^rM. According to the first assumption we have a system of generators $\{\tilde{e}_{\varkappa_1}f_1, \tilde{e}_{\varkappa_2}\tilde{f}_2, \ldots, \tilde{e}_{\varkappa_s}\tilde{f}_s\}$ of $\widetilde{M}$ and a direct decomposition of $\widetilde{M}$ as follows:

$$\widetilde{M} = A\tilde{e}_{\varkappa_1}\tilde{f}_1 \oplus \cdots.$$

Now choose an element $e_{\varkappa_i}f_i$ from each coset $\tilde{e}_{\varkappa_i}\tilde{f}_i$. Then the set $\{e_{\varkappa_1}f_1, e_{\varkappa_2}f_2, \ldots, e_{\varkappa_s}f_s\}$ can be taken as a system of generators of M (cf. [5], Corollary 2.2)

and $Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i \subset S^1(M)$. For let $x \in Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$, then $x \in N^r M$ and $N^{r+1}M = 0$. On the other hand from the second assumption we have a direct decomposition of $\sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$: $\sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_{s'}$, $s' \leqq s$, where D_j has a simple module as its top Loewy constituent or its bottom Loewy constituent. Let us denote by p_j the projection: $Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i \to D_j$ with respect to the above direct sum expression. We may assume $\mathrm{Im}\, p_j \neq 0$ for all j. For otherwise some D_j is a direct summand of M and our proposition follows from the second assumption. Next we may assume that the bottom Loewy constituent of $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is not simple. For otherwise unless $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is not uni-serial $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is isomorphic to $Ae_{\varkappa_1}$ and then since $Ae_{\varkappa_1}$ is not uni-serial it follows by Proposition 3.1 that $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is injective and becomes a direct summand of M. Then D_j is isomorphic to a submodule of uni-serial injective module, if the bottom constituent of D_j is simple. For $\mathrm{Im}\, p_j \approx \mathrm{Coim}\, p_j$, and $Ae_{\varkappa_1}$ is not uni-serial. Hence D_j is a homomorphic image of a uni-serial primitive ideal. Together with the second assumption this implies that all D_j are homomorphic images of primitive ideals and $s' = s$. Thus we shall denote D_j, $i = 2, \ldots, s$ again $Ae_{\varkappa_i}f_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ respectively and $Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$ by S. In this case without loss of generality we may assume $Ae_{\varkappa_i}$ is not uni-serial for $i \leqq k$ and uni-serial for $i > k$. Now we shall divide this proof into two parts.

1. S is simple. Then images of p_i, $i = 2, \ldots, s$ are simple and by Proposition 3.2 we can choose elements u_i and v_i of $Ne_{\varkappa_i}$ for $i \leqq k$ and obtain the following exact sequences:

$$0 \to N^{m_i}u_i + N^{n_i}v_i \to Ae_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i}f_i \to 0,$$
$$0 \to N^{m_i}u_i + N^{n_i}v_i \to N^{m_i-1}u_i + N^{n_i}v_i \to p_i(S) \to 0,$$

where $p_1(S) = S$. For $i > k$ we also obtain the following exact sequences:

$$0 \to N^{l_i}e_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i}f_i \to 0,$$
$$0 \to N^{l_i}e_{\varkappa_i} \to N^{l_i-1}e_{\varkappa_i} \to p_i(S) \to 0$$

we shall choose an integer i_0 among $\{1, 2, \ldots, s\}$, for which (according as $Ae_{\varkappa_{i_0}}$ is not uni-serial or uni-serial) m_{i_0} or l_{i_0} is minimum among $\{l_j, m_i\}$ and if $Ae_{\varkappa_{i_0}}$ is especially not uni-serial, $m_{i_0} < l_j$ for all $j > k$ and $n_{i_0} > n_i$ for all i such that $m_i = m_{i_0}$. In followings such $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ is called a minimum element of $\{Ae_{\varkappa_i}f_i\}$ with respect to S (in fact we can introduce a quasi-ordering into $\{Ae_{\varkappa_i}f_i\}$, for which $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ is minimum). Since S is simple and $\sum_{i\geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$ is a direct sum, we have that $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0} \cap \sum_{i\neq i_0} Ae_{\varkappa_i}f_i$ is simple and $\sum_{i\neq i_0} Ae_{\varkappa_i}f_i$ is a direct sum of $Ae_{\varkappa_i}f_i$, $i \neq i_0$. Let q_j be a projection: $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0} \cap \sum_{i\neq i_0} Ae_{\varkappa_j}f_j \to Ae_{\varkappa_j}f_j$ with respect to the above direct expression of $\sum_{i\neq i_0} Ae_{\varkappa_i}f_i$.

If $Ae_{\varkappa_{i_0}}$ is not uni-serial, it follows by Propositions 3.3 and 3.4 that q_j has an extension: $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0} \to Ae_{\varkappa_j}f_j$ and by Lemma 4.4 of [11] M is decomposed into $Ae_{\varkappa_j}f_j$, $j \neq i_0$ and a homomorphic image of $Ae_{\varkappa_{i_0}}$.

If $Ae_{\varkappa_{i_0}}$ is uni-serial, we have also the same conclusion because $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ is injective relative to $N^{l_{i_0}}$.

2. S is not simple. Let T be a simple submodule of S. Then similarly as before we can take elements u_i and v_i of $Ne_{\varkappa_i}$ and obtain with respect to T the following exact sequences:

$$0 \to N^{m_i}u_i + N^{n_i}v_i \to Ae_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i}f_i \to 0,$$
$$0 \to N^{m_i}u_i + N^{n_i}v_i \to N^{m_i-1}u_i + N^{n_i}v_i \to p_i(T) \to 0,$$

where we shall only consider i such that $p_i(T) \neq 0$ and $p_1(T) = T$, and for $i > k$ we also have

$$0 \to N^{l_i}e_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i} \to Ae_{\varkappa_i}f_i \to 0.$$

If $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is not a minimum element of $\{Ae_{\varkappa_i}f_i\}$ with respect to T, then choose a minimum element $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ (cf. the proof of case 1) and decompose $\sum_{i \neq i_0} Ae_{\varkappa_i}f_i$ into indecomposable summands, each of which, similarly as before, is assumed to be a homomorphic image of $Ae_{\varkappa_i}$, and say, can be denoted by $Ae_{\varkappa_i}f_i'$. In this case $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0} \cap \sum_{i \neq i_0} Ae_{\varkappa_i}f_i' = p_{i_0}(S)$ and $m_1 > \ldots$ or $m_1 = m_{i_0}$, $n_1 < n_{i_0}$.

If $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ is not a minimum element of $\{Ae_{\varkappa_i}f_i',\ i \neq i_0,$ and $Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}\}$ with respect to $P_{i_0}(T)$, then we shall apply the same process for $\{Ae_{\varkappa_{i_0}}f_{i_0}$ and $Ae_{\varkappa_i}f_i',\ i \neq i_0\}$. From the condition that $m_1 > m_{i_0}$ or $m_1 = m_{i_0}$, $n_1 < n_{i_0}$ it will be seen that by finite applications of this process we obtain a system of generators, denoting them again $e_{\varkappa_1}f_1, e_{\varkappa_2}f_2, \ldots, e_{\varkappa_s}f_s$, of M such that $Ae_{\varkappa_1}f_1$ is a minimum element of $\{Ae_{\varkappa_i}f_i\}$ with respect to a simple submodule T of $Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i \geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$ and $\sum_{i \geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i = Ae_{\varkappa_2}f_2 \oplus Ae_{\varkappa_3}f_3 \oplus \cdots \oplus Ae_{\varkappa_s}f_s$. Then it follows from Proposition 3.3 and 3.4 that projections $p_i\colon T \to Ae_{\varkappa_i}f_i$ have extensions $P_i\colon Ae_{\varkappa_1}f_1 \to Ae_{\varkappa_i}f_i$. Let us denote by $Ae_{\varkappa_1}f_1$ the left A-module consisting all elements $x - \sum_{i \geq 2} P_i(x)$, where the sum is taken over i with P_i is not zero, $x \in Ae_{\varkappa_1}f_1$. Then clearly $M = Ae_{\varkappa_1}f_1 + \sum_{i \geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$, and $Ae_{\varkappa_1}f_1 \cap \sum_{i \geq 2} Ae_{\varkappa_i}f_i$ is simple. Hence we arrive at the same situation as the beginning of case 1, and therefore the latter proof is deduced from that of case 1.

Thus we obtain

THEOREM 4.3. *An algebra A is of cyclic-cocyclic type if and only if the following conditions are satisfied.*

I. Each of $Ne_\varkappa$ and $e_\lambda N$ is either uni-serial (i.e. its composition series is unique) or a sum (not necessarily direct sum) of two uni-serial ideals.

II. In case $Ne_\varkappa$ is a sum of two uni-serial ideals, if $e_\mu Ne_\varkappa \neq 0 \bmod J$ for a simple subideal J of $Ne_\varkappa$, then $e_\mu A$ is uni-serial. And the same holds for a right ideal $e_\lambda N$ which is a sum of two uni-serial ideals.

Now we can prove

PROPOSITION 4.4.[2]) *Let A be a finite dimensional algebra with unit element. In order A is of SRCRT it is necessary and sufficient that the following conditions are satisfied*:

I. A is a left generalized uni-serial algebra.

II. Each $e_\varkappa N$ is either uni-serial or a direct sum of two uni-serial ideals.

PROOF. Suppose A is of SRCRT. It is clear that the condition I is satisfied for A. Since A is also of cyclic-cocyclic type, $e_\varkappa N$ is either uni-serial or a sum of two uni-serial ideals. In the latter case, if $e_\varkappa N$ is not a direct sum of two uni-serial ideals, $e_\varkappa N$ has a unique minimal subideal. Hence $e_\varkappa N$ is directly indecomposable, but the top Loewy constituent is not simple. Therefore the condition II is satisfied by SRCRT-algebras.

Next, suppose that the conditions I and II are satisfied. Then A is of cyclic-cocyclic type and from the proof of Theorem 4.1 we have only to prove that every interlacing of at least two uni-serial right A-modules is decomposed. But this follows from condition I, for by duality every uni-serial right A-module is injective relative to a power of the radical.

References

[1] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton University Press 1956.

[2] HIGMAN, D. G.: Indecomposable representations of characteristic p. Duke Math. J. **21**, 377–382 (1954).

[3] JANS, J. P.: On the indecomposable representations of algebras. Ann. of Math. **66**, 418–429 (1957).

[4] KOETHE, G.: Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. Math. Z. **39**, 31–44 (1935).

[5] MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA: On injective modules. Math. Z. **68**, 217–226 (1957).

[6] MORITA, K.: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku **6**, 83–142 (1958).

[7] MORITA, K.: On algebras for which every faithful representation is its own second commutator. Math. Z. **69**, 429–434 (1958).

[8] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the structur of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164–170 (1953).

[9] NAKAYAMA, T.: On Frobeniusean algebras II. Ann. of Math. **42**, 1–27 (1941).

[10] NAKAYAMA, T.: Note on uni-serial and generalized uni-serial rings. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 285–289 (1940).

[11] TACHIKAWA, H.: On rings for which every indecomposable right module has a unique maximal submodule. Math. Z. **71**, 200–222 (1959).

[12] TACHIKAWA, H.: A note on algebras of unbounded representation type. Proc. Japan. Acad. **36**, 59–61 (1960).

[13] THRALL, R. M.: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 173–183 (1948).

[14] YOSHII, T.: On algebras of left cyclic representation type. Osaka Math. J. **10**, 231–237 (1958).

[2]) This proposition is equivalent to Theorem 5.5 in [11] and is obtained independently by T. YOSHII [14]. But in his proofs there are some mistakes and gaps, for example Lemma 2 in [14] is incorrect.

Dept. of Math., Nara Gakugei University, Nara (Japan)

(Eingegangen am 9. Mai 1960)

HARTMAN, PH., and C. WILCOX
Math. Zeitschr. 75, 228–255 (1961)

On solutions of the Helmholtz equation in exterior domains

By

PHILIP HARTMAN and CALVIN WILCOX

1. Introduction. This paper deals with functions V that solve the Helmholtz equation $\Delta V + V = 0$ on an exterior domain in Euclidean space $E = E_p$ of dimension $p \geqq 2$ and satisfy the boundedness condition

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \int\limits_{\varrho \leqq |x| \leqq r} |V(x)|^2 \, dx < \infty,$$

where $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{1}{2}}$, and dx is the volume element in E.

The following notation and terminology is used. A domain is an open connected subset of E. A domain D is called an exterior domain if it contains a region $R_\varrho = \{x: |x| \geqq \varrho \geqq 0\}$. The letter D below always represents an exterior domain.

For $x \in E$, write $r = |x|$ and, if $x \neq 0$, $u = x/r$. Let $U = \{u: |u| = 1\}$ be the surface of the unit sphere in E with surface element du, so that $dx = r^{p-1} dr \, du$. Let $\omega_p = \int\limits_U du$ be the total surface area of U. $L^2(U)$ denotes the Hilbert space of functions $F(u)$ that are square-integrable with respect to du, with inner product and norm

$$(F, G) = \int\limits_U F(u) \, G^*(u) \, du \quad \text{and} \quad ||F|| = (F, F)^{\frac{1}{2}} \geqq 0,$$

where G^* is the complex conjugate of G. Below, l.i.m. always refers to a limit in the space $L^2(U)$.

Functions $V(x)$ on a domain D [or $F(u)$ on U] will be considered identical if they differ only on zero sets with respect to dx [or du]. Correspondingly, if $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_p^2$ is the (Euclidean) Laplacian on E, a complex-valued function $V = V(x)$ on D can be said to solve the Helmholtz wave equation

$$\Delta V + V = 0 \tag{1.1}$$

on D if it is a solution of (1.1) in the usual sense (i.e., of class C^2 on D) or if

The work of HARTMAN was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research under contract AF 18(603)-41; that of WILCOX by the United States Army through the Mathematics Research Center, U.S. Army, under contract DA-11-022-ORD-2059.

it is a solution in the weak L^2-sense (i.e., if it is locally of class L^2 and satisfies

$$\int_D V(x)\,[\Delta w(x) + w(x)]\,dx = 0$$

for all functions $w(x)$ of class C^∞ on D with compact support); cf., e.g., [16, p. 136]. Thus if $V(x)$ solves (1.1) on D, then its real and imaginary parts are (real) analytic on D.

The following notation will be convenient:

$$W(D) = \{V\colon V \text{ solves the Helmholtz equation on } D\},$$
$$W = \{V\colon V \in W(D) \text{ for some exterior domain } D\}.$$

By the Herglotz (boundedness) condition will be meant

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1} \int_{\varrho\le|x|\le r} |V(x)|^2\,dx < \infty \tag{1.2}$$

for some $\varrho \ge 0$. Let

$$W_H(D) = \{V\colon V \in W(D) \text{ and satisfies the Herglotz condition}\},$$
$$W_H = \{V\colon V \in W_H(D) \text{ for some } D\}.$$

Elements V of W_H will be called Herglotz wave functions.

This paper is concerned with a study of W_H. A result of HARTMAN [7, p. 254] shows that a $V \in W_H$ is determined by its behavior at infinity which is described by an element $[K^+(u), K^-(u)]$ of $L^2(U)\times L^2(U)$. In Section 2, it is shown that "lim sup" in (1.2) can be replaced by "lim" and this limit serves as a squared norm $\|V\|_H^2$ which makes W_H a pre-Hilbert space (but not a Hilbert space). Furthermore, the correspondence $V \leftrightarrow [K^+, K^-]$ is an isomorphism between W_H and a certain dense linear manifold W_H' of $L^2(U)\times L^2(U)$.

By using a theorem due to JOHN [8] (cf. WILCOX [21]), it is shown in Section 3 that W_H is the direct sum of its (non-orthogonal) linear manifolds $W_H(E)$ and W_S, where $W_H(E)$ is the set of entire Herglotz wave functions and W_S is the set of wave functions satisfying the Sommerfeld radiation condition. Thus a further study of W_H is reduced to a study of $W_H(E)$ and of W_S.

Sections 4 and 5 are concerned with $W_H(E)$. It turns out that under the norm $\|V\|_H$, $W_H(E)$ is a Hilbert space. For $V \in W_H(E)$, $K^+(u) = K^-(-u)$ and the correspondence $V \leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}} K^+(u)$ is an isomorphism between $W_H(E)$ and $L^2(U)$. An integral representation for V in terms of K^+ is given. Another explicit isomorphism between $W_H(E)$ and $L^2(U)$, suggested to us by a paper of OWENS [13], is given in Section 5.

In Section 6, several characterizations of elements $V \in W_S$ are given. In particular, there is given a short direct proof of a theorem of MÜLLER [11]. Section 7 deals with representation formulae, involving contour integrals, for elements of W_S.

Finally, Section 8 deals with a description of the manifold W_H' and a related manifold in $L^2(U)\times L^2(U)$.

Much of the analysis is based on expansions of functions in spherical harmonics. The space of spherical harmonics of degree n has dimension

$$(1.3)\quad N \equiv N(p;n) = (n+p-3)!\,(2n+p-2)/n!\,(p-2)! = O(n^{p-2})$$

for fixed $p \geqq 2$; [4, p. 237]. If $K_{nj}(u)$, $j=1,\dots,N$, is an orthonormal basis for this space, then the completeness in $L^2(U)$ of the spherical harmonics implies that every $V \in W$ has an expansion

$$(1.4)\quad r^{\frac{1}{2}(p-1)}\,V(ru) \sim (\tfrac{1}{2}\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} i^n [a_{nj}\,H_\mu^1(r) + b_{nj}\,H_\mu^2(r)]\,K_{nj}(u),$$

to be interpreted in the sense of l.i.m., for fixed $r \geqq \varrho$ for some $\varrho \geqq 0$. Here H_μ^1, H_μ^2 are Hankel functions of order

$$(1.5)\qquad \mu \equiv \mu(n,p) = n + \tfrac{1}{2}(p-2),$$

and a_{nj}, b_{nj} are constants. The form of the coefficient of K_{nj} is a consequence of (1.1). Actually, if $V \in W_H(D)$ and $D > R_\varrho$, then the series in (1.4) is uniformly convergent to $r^{\frac{1}{2}(p-1)}V(ru)$ on compact subsets of R_ϱ, but we shall not need this fact. (A proof for the case $V \in W_H(E)$ is included in the proof of Theorem 5.2.)

2. Herglotz wave functions. The correspondence between Herglotz wave functions $V \in W_H$ and certain elements $[K^+(u), K^-(u)]$ of $L^2(U) \times L^2(U)$ can be described as follows:

THEOREM 2.1a. *Let V be a Herglotz wave function*, i.e., *let $V \in W_H$. Then there exist functions K^+, K^- in $L^2(U)$ satisfying*

$$(2.1\pm)\quad K^{\pm}(u) = \underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,(2r)^{-1} \int_\varrho^r e^{\mp i(t+\frac{1}{2}\pi)}\,(\pm it)^{\frac{1}{2}(p-1)}\,[V_r(tu) \pm i\,V(tu)]\,dt,$$

where $V_r = \partial V/\partial r$.

The ordered pair $[K^+, K^-]$ will be called the far field pattern of V. Actually, Theorem 2.1a can be strengthened as follows:

THEOREM 2.1b. *Let $V \in W_H$. Then there exist unique functions K^+, K^- in $L^2(U)$ satisfying, as $r \to \infty$,*

$$(2.2\pm)\quad r^{-1} \int_\varrho^r \| e^{\mp i(t+\frac{1}{2}\pi)}\,(\pm it)^{\frac{1}{2}(p-1)}\,[V_r(tu) \pm i\,V(tu)] - 2K^{\pm}(u)\|^2\,dt \to 0,$$

and $[K^+, K^-]$ is the far field pattern of V.

That (2.2±) implies (2.1±) is clear from the fact that if $F(x)$ is defined on a domain $D > R_\varrho$ and is of class L^2 on compact subsets of D, then

$$(2.3)\qquad \left\| r^{-1} \int_\varrho^r F(tu)\,dt \right\|^2 \leqq r^{-1} \int_\varrho^r \|F(tu)\|^2\,dt.$$

For SCHWARZ's inequality gives

$$\left| r^{-1} \int_\varrho^r F(tu)\,dt \right|^2 \leqq r^{-1} \int_\varrho^r |F(tu)|^2\,dt.$$

If this inequality is integrated with respect to u over U, an application of FUBINI's theorem to the resulting integral on the right gives (2.3).

Theorem 2.1b is equivalent to the following theorem which was proved by HARTMAN [7, p. 254]:

THEOREM 2.1c. *Let $V \in W_H$. Then there exist unique functions K^+, K^- in $L^2(U)$ with the property that if*

$$X(r u) = i^{\frac{1}{2}(1-p)} K^+(u)\, e^{ir} + i^{\frac{1}{2}(p-1)} K^-(u)\, e^{-ir}, \tag{2.4}$$

then

$$r^{-1} \int_\varrho^r \| t^{\frac{1}{2}(p-1)} V(t u) - X(t u)\|^2 \, dt \to 0 \quad as \quad r \to \infty; \tag{2.5}$$

$$r^{-1} \int_\varrho^r \| t^{\frac{1}{2}(p-1)} V_r(t u) - X_r(t u)\|^2 \, dt \to 0 \quad as \quad r \to \infty. \tag{2.6}$$

The relations (2.2±) follow from (2.5), (2.6) by virtue of the identity

$$e^{\mp i(t+\frac{1}{2}\pi)} (\pm i)^{\frac{1}{2}(p-1)} [X_r(t u) \pm i\, X(t u)] = 2K^{\pm}(u)$$

and the inequality

$$\| F + G\|^2 \leqq 2(\| F\|^2 + \| G\|^2) \quad \text{for} \quad F, G \in L^2(U)$$

applied to

$$F(u) = e^{\mp i(t+\frac{1}{2}\pi)} (\pm i)^{\frac{1}{2}(p-1)} [t^{\frac{1}{2}(p-1)} V_r(t u) - X_r(t u)],$$
$$G(u) = \pm i\, e^{\pm i(t+\frac{1}{2}\pi)} (\pm i)^{\frac{1}{2}(p-1)} [t^{\frac{1}{2}(p-1)} V(t u) - X(t u)].$$

In a similar manner (2.5), (2.6) can be deduced from (2.2±).

In the proof of Theorem 2.1c in [7], it was noted that

$$V \in W_H \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} (|a_{nj}|^2 + |b_{nj}|^2) < \infty, \tag{2.7}$$

where a_{nj}, b_{nj} are the constants in (1.4). This remark goes back to MAGNUS [9] in the case $V \in W_H(E)$, where $a_{nj} = b_{nj}$. But his proof carries over to the case $V \in W_H$ as follows. By FUBINI's theorem,

$$r^{-1} \int_{\varrho \leqq |x| \leqq r} |V(x)|^2 \, dx = r^{-1} \int_\varrho^r t^{p-1} \| V(t u)\|^2 \, dt \tag{2.8}$$

which, by (1.4) and PARSEVAL's relation, is equal to

$$r^{-1} \int_\varrho^r \tfrac{1}{2} \pi t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} |a_{nj} H_\mu^1(t) + b_{nj} H_\mu^2(t)|^2 \, dt. \tag{2.9}$$

Standard asymptotic formulae [17, p. 197] for $H_\mu^1(t)$, $H_\mu^2(t)$ for large t show that

$$r^{-1} \int_\varrho^r \tfrac{1}{2} \pi t\, |a_{nj} H_\mu^1(t) + b_{nj} H_\mu^2(t)|^2 \, dt \to |a_{nj}|^2 + |b_{nj}|^2 \quad \text{as} \quad r \to \infty. \tag{2.10}$$

It follows from (1.2), from the equality of (2.8) and (2.9), and from (2.10) that the partial sums of the series in (2.7) are bounded from above by the limit superior in (1.2). This implies (2.7).

The functions $K^{\pm}$ in the proof of Theorem 2.1c are defined to be

$$K^{+}(u) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} a_{nj} K_{nj}(u), \qquad K^{-}(u) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} (-1)^n b_{nj} K_{nj}(u), \tag{2.11}$$

which is legitimate by (2.7) and the Fischer-Riesz theorem.

The next theorem states that it is possible to define, in a natural way, a scalar product $(V^1, V^2)_H$ for elements $V^1, V^2 \in W_H$ which makes W_H into a pre-Hilbert space. Furthermore, the map $T: W_H \to L^2(U) \times L^2(U)$ defined by

$$TV = [K^{+}, K^{-}] \quad \text{for} \quad V \in W_H, \tag{2.12}$$

where $[K^{+}, K^{-}]$ is the far field pattern of V is an isomorphism between W_H and the range $W_H' = T(W_H)$ of T. The linear manifold W_H' of $L^2(U) \times L^2(U)$ will be investigated in Section 8 below. It is shown there that W_H' is dense in (but not equal to) $L^2(U) \times L^2(U)$; so that W_H is a pre-Hilbert space, but not a Hilbert space. Also, the linear manifold $W_H(D)$ of W_H, for a fixed exterior domain D, is dense in W_H if and only if $D \neq E$. For $r^{\frac{1}{2}(2-p)} H_{\mu}^{m}(r) K_{nj}(u)$, where $m = 1, 2$, are elements of $W_H(D)$ if D does not contain $x = 0$. As will be clear from Sections 4 and 6, $W_H(D)$ is complete if and only if $D = E$.

THEOREM 2.2. *Let $V \in W$. Then the limit*

$$\|V\|_H^2 = \lim_{r \to \infty} r^{-1} \int_{\varrho \leq |x| \leq r} |V(x)|^2 \, dx \quad \textit{exists} \tag{2.13}$$

for every fixed sufficiently large ϱ if and only if $V \in W_H$. If $V \in W_H$ and $[K^{+}, K^{-}]$ is its far field pattern, then

$$\|V\|_H^2 = \|K^{+}\|^2 + \|K^{-}\|^2. \tag{2.14}$$

The usual polarization of (2.13) and (2.14) gives the following:

COROLLARY 2.1. *Let $V^j \in W_H$ have the far field pattern $[K_j^{+}, K_j^{-}]$ for $j = 1, 2$. Then*

$$(V^1, V^2)_H = \lim_{r \to \infty} r^{-1} \int_{\varrho \leq |x| \leq r} V^1(x) \, V^{2*}(x) \, dx \quad \textit{exists}$$

for every large ϱ and satisfies

$$(V^1, V^2)_H = (K_1^{+}, K_2^{+}) + (K_1^{-}, K_2^{-}).$$

Theorem 2.2 and its Corollary 2.1 will be deduced from (2.5). Similar arguments applied to (2.6) lead to

COROLLARY 2.2. *Under the hypotheses of Corollary 2.1,*

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \int_{\varrho \leq |x| \leq r} V_r^1(x) \, V_r^{2*}(x) \, dx \quad \textit{exists}$$

for every large fixed ϱ and equals $(V^1, V^2)_H$.

A norm similar to $\|V\|_H$, namely,

$$\|V\|_G^2 = \lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{2} r^{p-1}\{\|V(ru)\|^2 + \|V_r(ru)\|^2\} \tag{2.15}$$

had been defined by GARABEDIAN [5]. He did not discuss the subset W_G of elements $V \in W$ for which $\|V\|_G$ exists. It is clear that if $\|V\|_G$ exists, then $\|V\|_H$ exists (and $\|V\|_G = \|V\|_H$), so that $W_G \subset W_H$. It will be shown in Section 4 below that

$$W_G \neq W_H; \text{ in fact, } W_H(E) \not\subset W_G. \tag{2.16}$$

PROOF OF THEOREM 2.2. The condition $V \in W_H$ is obviously necessary for the existence of $\|V\|_H$. In order to show that it is sufficient, let $V \in W_H$ and let $[K^+, K^-]$ be its far field pattern. The definition (2.4) of $X(ru)$ shows that

$$\|X(tu)\|^2 = \|K^+\|^2 + \|K^-\|^2 + e^{2it} i^{1-p}(K^+, K^-) + e^{-2it} i^{p-1}(K^-, K^+);$$

hence

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \int_\varrho^r \|X(tu)\|^2 \, dt = \|K^+\|^2 + \|K^-\|^2. \tag{2.17}$$

If, $F, G \in L^2(U)$, then the inequality

$$|\|F\|^2 - \|G\|^2| \leq \{\|F\| + \|G\|\}\|F - G\| \tag{2.18}$$

follows from the identity $\|F\|^2 - \|G\|^2 = (F, F-G) + (F-G, G)$ and SCHWARZ's inequality. An integration of the inequality (2.18) with respect to t, where $F = t^{\frac{1}{2}(p-1)} V(tu)$ and $G = X(tu)$, implies that

$$\left| r^{-1} \int_\varrho^r \|V(tu)\|^2 t^{p-1} \, dt - r^{-1} \int_\varrho^r \|X(tu)\|^2 \, dt \right|$$

is majorized by

$$r^{-1} \int_\varrho^r \{\|V(tu)\| \, t^{\frac{1}{2}(p-1)} + \|X(tu)\|\} \|V(tu)\, t^{\frac{1}{2}(p-1)} - X(tu)\| \, dt,$$

which does not exceed

$$\left[2r^{-1} \int_\varrho^r (\|V(tu)\|^2 t^{p-1} + \|X(tu)\|^2) \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[r^{-1} \int_\varrho^r \|V(tu)\, t^{\frac{1}{2}(p-1)} - X(tu)\|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

The assertions (2.13), (2.14) follow from (2.8), (2.17), (1.2) and (2.5).

3. A decomposition theorem. The Sommerfeld radiation condition is

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{1}{2}(p-1)}[V_r(ru) - iV(ru)] = 0 \quad \text{uniformly for } u \in U. \tag{3.1}$$

Introduce the notation

$$W_S(D) = \{V\colon V \in W(D) \text{ and satisfies the Sommerfeld condition}\},$$
$$W_S = \{V\colon V \in W_S(D) \text{ for some exterior domain } D\}.$$

It is known that (3.1) is implied by weaker forms of the radiation condition; e.g., if the uniform limit in (3.1) is replaced by the ordinary limit (for every fixed u) (MAGNUS [9]) or by l.i.m. (WILCOX [20]). Also (3.1) implies that $r^{\frac{1}{2}(p-1)}V(ru)$ is uniformly bounded in u for large r; in particular, $W_S(D) \subset W_H$; cf. MAGNUS [9], ATKINSON [1], WILCOX [20].

In WILCOX [21], there was introduced a radiation condition, very different in appearance from (3.1), namely,

$$V_1(x) \equiv 0, \tag{3.2}$$

where

$$V_1(x) = (i\pi s^{p-1} H(s)^2/4C^2\omega_p) \int_U \partial/\partial r\,[V(x+su')/H(s)]\,du', \tag{3.3}$$

$V \in W(D)$, C is the normalizing constant $\pi(2\pi)^{\frac{1}{2}(p-1)}/\omega_p$ and

$$H(r) = C r^{-\frac{1}{2}(p-2)} H^1_{\frac{1}{2}(p-2)}(r). \tag{3.4}$$

$V_1(x)$ is defined for all x if s is fixed and greater than a sufficiently large constant $s_0(x)$ and $V_1(x)$ is independent of s. Straightforward differentiations show that $V_1 \in W(E)$. The function V_1 arises, for example, in the consideration of the spherical mean

$$\tilde{V}(x,s) = \omega_p^{-1} \int_U V(x+su')\,du'$$

defined for all x and $s > s_0(x)$. From (1.1), it is readily verified that

$$\tilde{V}_{ss} + (p-1)\,s^{-1}\,\tilde{V}_s + \tilde{V} = 0, \qquad s > s_0(x),$$

so that there exist unique functions $V_1(x)$, $V_2(x)$ satisfying

$$\tilde{V}(x,s) = V_1(x)\,H^*(s) + V_2(x)\,H(s), \qquad s > s_0(x). \tag{3.5}$$

Furthermore $V_1(x)$ is given by (3.3). An analogous formula is valid for $V_2(x)$ and shows that $V_2 \in W(E)$. The function V_1 can be considered to be defined implicitly by (3.5) or explicitly by (3.3). Introduce the notation

$$\widetilde{W}_S(D) = \{V:\ V \in W(D) \text{ and } V_1 \equiv 0\},$$

$$\widetilde{W}_S = \{V:\ V \in \widetilde{W}(D) \text{ for some exterior domain } D\}.$$

The relation

$$\widetilde{W}_S(D) = W_S(D) \tag{3.6}$$

was proved in WILCOX [21]; another proof is indicated in Section 6 below.

A basic fact needed below is the following theorem which does not involve the Herglotz condition (1.2).

THEOREM 3. *Let $V \in W(D)$. Then V has a unique decomposition*

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x) \quad \textit{for} \quad x \in D, \tag{3.7}$$

where $V_0 \in W_S(D)$ and $V_1 \in W(E)$.

This result was first stated by JOHN in [8]. A similar proof which, however, employs spherical means and the radiation condition (3.2) was given by WILCOX [21] for $p=3$. This proof is extendable for arbitrary p, and can be outlined briefly as follows: Let

$$G(x;x') = i\,H(R)/4C\,(2\pi)^{\frac{1}{2}(p-2)}, \qquad R=|x-x'|.$$

By a standard technique involving Green identities, one obtains a decomposition (3.7) for V, where V_1 is given by (3.3) and V_0 by

$$V_0(x) = \int_B \{G\,\partial V/\partial \nu - V\,\partial G/\partial \nu\}\,dB,$$

where B is a closed hypersurface surrounding the boundary of D, but not x. It is clear that $V_0 \in W(D)$. A simple calculation shows that

$$\tilde{V}_0(x,r) = \tilde{V}(x,r) - \tilde{V}_1(x,r) = [V_2(x) - V_1(x)]\,H(r), \qquad r > r_0(x),$$

so that, by (3.5), $V_0 \in \widetilde{W}_S(D)$. This gives a decomposition (3.7) of V into functions $V_1 \in W(E)$, $V_0 \in \widetilde{W}_S(D)$. It is easily verified that such a decomposition is unique.

In particular, there results the representation formula

$$V(x) = \int_B \{G(R)\,\partial V(x')/\partial \nu - V(x')\,G'(R)\,\partial R/\partial \nu\}\,dB \tag{3.8}$$

for $V \in \widetilde{W}_S(D)$. From this and the asymptotic formula for $G(R)$, $G'(R)$ as $R \to \infty$, one deduces

COROLLARY 3.1. *Let $V \in \widetilde{W}_S(D)$. Then, as $r \to \infty$,*

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)}\,V(r\,u) = i^{\frac{1}{2}(1-p)}\,K(u)\,e^{ir} + O(1/r), \tag{3.9}$$

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)}\,V_r(r\,u) = i^{\frac{1}{2}(3-p)}\,K(u)\,e^{ir} + O(1/r), \tag{3.10}$$

uniformly for $u \in U$,

$$K(u) = \tfrac{1}{2}\,i\,(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_B \{\partial V(x)/\partial \nu + i\,u\cdot\nu\,V(x)\}\,e^{-i\,x\cdot u}\,dB, \tag{3.11}$$

where B is a closed hypersurface surrounding the boundary of D and a dot denotes a (Euclidean) scalar product, $x\cdot u = x_1u_1 + \cdots + x_pu_p$.

The formula (3.9) shows that $|V(x)| = O(r^{-\frac{1}{2}(p-1)})$, $r \to \infty$, which implies the Herglotz condition (1.2). Also, (3.9) and (3.10) imply (3.1). Thus

COROLLARY 3.2. *If $V \in \widetilde{W}_S(D)$, then $V \in W_H(D)$*; i.e., *$\widetilde{W}_S(D) \subset W_H(D)$. Also $\widetilde{W}_S(D) \subset W_S(D)$.*

Finally, if $V \in W_H$, then $V_1 = V - V_0 \in W_H$ by the last corollary. Hence

COROLLARY 3.3. *$V \in W_H(D)$ if and only if V has a decomposition (3.7), which is necessarily unique, with $V_0 \in \widetilde{W}_S(D)$ and $V_1 \in W_H(E)$.*

The rest of the paper is concerned with the study of the classes $W_H(E)$ and $\widetilde{W}_S$.

4. Entire Herglotz wave functions. In this and the next section, we consider the class $W_H(E)$ of entire solutions of the Helmholtz equation which satisfy the Herglotz condition.

A function $V \in W_H(D)$ may, of course, have an extension to a function $V' \in W_H(D')$ where $D' > D$ and such an extension is unique, since solutions of $\Delta V + V = 0$ are analytic functions. For the case $D' = E$, we have

LEMMA 4.1. *Let $V \in W_H$ and let $[K^+, K^-]$ be its far field pattern. Then V has an extension $V' \in W_H(E)$ if and only if*

$$K^-(u) = K^+(-u) \quad \text{for} \quad u \in U. \tag{4.1}$$

PROOF. Let V have an extension $V' \in W_H(E)$. Then $[K^+, K^-]$ is also the far field pattern of V', so that V, V' have the same expansion into spherical harmonics. Since V' is regular at $r = 0$, the coefficient of K_{nj} in (1.2) must be finite there; whence $b_{nj} = a_{nj}$. Since $K_{nj}(-u) = (-1)^n K_{nj}(u)$ hold for all spherical harmonics, (4.1) follows. The converse proposition that (4.1) implies the existence of an extension $V' \in W_H(E)$ is a corollary of Theorem 4 below

Lemma 4.1 shows that to each $V \in W_H(E)$, there corresponds a function $K = K^+ \in L^2(U)$ which determines V uniquely. For brevity, we shall call K the far field pattern of V. The next result makes the correspondence explicit and shows that every $K \in L^2(U)$ is the far field pattern of a $V \in W_H(E)$.

THEOREM 4. *If $V \in W_H(E)$ and K is its far field pattern, then*

$$V(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_U e^{i x \cdot u'} K(u')\, du'. \tag{4.2}$$

Conversely, if $K \in L^2(U)$, then (4.2) defines a $V \in W_H(E)$ with far field pattern K.

The first part of this theorem was given by JOHN [8] in the case $p = 2$.

PROOF. We begin by proving the converse. Let $K \in L^2(U)$ and V be defined by (4.2). It is clear from LEBESGUE's theorem on dominated convergence (with a majorant of class $L(U)$) that $V(x) \in C^\infty$ and that its derivatives can be calculated formally by differentiation under the integral sign. Since $e^{i x \cdot u'} \in W(E)$ for fixed u' with $|u'| = 1$, it follows that $V \in W(E)$.

The addition formula [*10*, p. 258],

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} e^{i r u \cdot u'} \sim (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_\mu(r) [N(p; n)/\omega_p] P_n(p; u \cdot u'), \tag{4.3}$$

and the addition formula [*10*, p. 242] for the n-th Legendre polynomial $P_n(p; t)$ of $E = E_p$,

$$[N(p; n)/\omega_p] P_n(p; u \cdot u') = \sum_{j=1}^{N} K_{nj}^*(u') K_{nj}(u), \tag{4.4}$$

show that

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} e^{i r u \cdot u'} \sim (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} i^n K_{nj}^*(u') J_\mu(r) K_{nj}(u). \tag{4.5}$$

The coefficient of $K_{nj}(u)$ in the expansion of $r^{\frac{1}{2}(p-1)}V(ru)$ is, after an application of FUBINI's theorem,

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)}\int_U K(u')\Big[\int_U r^{\frac{1}{2}(p-1)}e^{ir u\cdot u'}K^*_{nj}(u)\,du\Big]\,du'.$$

This reduces, by virtue of (4.5) to

$$\int_U K(u')\,[i^n(2\pi r)^{\frac{1}{2}}J_\mu(r)\,K^*_{nj}(u')]\,du'.$$

Thus if

$$K(u)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}c_{nj}K_{nj}(u), \tag{4.6}$$

then

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)}V(ru)\sim(2\pi r)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}i^n c_{nj}J_\mu(r)\,K_{nj}(u). \tag{4.7}$$

As shown by MAGNUS [9, pp. 85–86], the condition $\sum\sum|c_{nj}|^2<\infty$ implies that V satisfies the Herglotz condition (1.2); so that $V\in W_H(E)$. That K is the far field pattern of V follows from Theorem 2.1a, (2.11) and $2J_\mu=H^1_\mu+H^2_\mu$.

In order to obtain the first part of Theorem 4, let $V\in W_H(E)$ and K be its far field pattern. By the part of the theorem just proved, the right side of (4.2) defines a function, say, $V'\in W_H(E)$ with a far field pattern K. But then (4.7) holds for $V=V$ or $V=V'$; so that $V\equiv V'$.

Theorems 2.2 and 4 give a complete characterization of $W_H(E)$ and of its image $W'_H=T\big(W_H(E)\big)$ under the map (2.12). The result can be stated as follows:

COROLLARY 4.1. *The correspondence* $2^{\frac{1}{2}}K\leftrightarrow V$ *defined by* (4.2) *and its inverse*

$$K(u)=\operatorname*{l.i.m.}_{r\to\infty}(2r)^{-1}\int_\varrho^r e^{-i(t+\frac{1}{2}\pi)}(i\,t)^{\frac{1}{2}(p-1)}\{V_r(t\,u)+i\,V(t\,u)\}\,dt \tag{4.8}$$

is an isomorphism of the Hilbert space $L^2(U)$ *onto* $W_H(E)$; i.e., *it is linear, one-to-one and preserves scalar products* $(V^1,V^2)_H=(2^{\frac{1}{2}}K^1,2^{\frac{1}{2}}K^2)$.

REMARK. This makes possible the following proof of the last part of (2.16). Let $V\in W_H(E)$ satisfy (4.7). Since (4.7) can be formally differentiated with respect to r, it follows that

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)}V_r(ru)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}i^n c_{nj}\{[(2\pi r)^{\frac{1}{2}}J_\mu]'-\tfrac{1}{2}(p-1)\,r^{-1}(2\pi r^{\frac{1}{2}})J_\mu\}K_{nj}(u).$$

Hence, PARSEVAL's relation gives

$$r^{(p-1)}\{\|V(ru)\|^2+\|V_r(ru)\|^2\}=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\,\alpha(n,r),$$

where

$$|c_n|^2=\sum_{j=1}^{N}|c_{nj}|^2,\qquad \alpha(n,r)=\big(|(2\pi r)^{\frac{1}{2}}J_\mu(r)|^2+|[(2\pi r)^{\frac{1}{2}}J_\mu(r)]'|^2\big)\big(1+o(1)\big)$$

and $o(1)\to0$ uniformly as $n,r\to\infty$.

The asymptotic formulas for $J_\mu(r)$ and its derivative for large r (and fixed μ) shows that $\alpha(n, r) \to 1$ as $r \to \infty$ for fixed n. By Corollary 4.1, $c_0, c_1, \ldots$ is arbitrary except for the requirement that $\sum |c_n|^2 < \infty$. It follows from TOEPLITZ's theorem ([22], p. 40) that the limit $\|V\|_G^2$ in (2.16) exists for all $V \in W_H(E)$ if and only if the set of functions $\alpha(n, r)$ are uniformly bounded for $r > r_0$ (r_0 is independent of n). But CAUCHY's formula [17, p. 231], $J_\mu(\mu) \sim c_0 \mu^{-\frac{1}{3}}$, as $\mu \to \infty$, where $c_0 > 0$, shows that this is not the case. Thus $W_H(E) \not\subset W_G$.

5. $W_H(E)$, continued. If $V \in W_H(E)$, it is more convenient to write the expansion (4.7) of V in the form

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} V(r u) \sim (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n c_n J_\mu(r) K_n(u), \tag{5.1}$$

where K_n is a normalized ($\|K_n\| = 1$) spherical harmonic of order n. Let

$$F(u) \sim \sum_{n=0}^{\infty} i^n c_n K_n(u). \tag{5.2}$$

OWENS [13], [14] has investigated conditions on F, with $p = 2$ and 3, to insure

$$\int_0^r t^{\frac{1}{2}(p-2)} V(t u)\, dt \to (2\pi)^{\frac{1}{2}} F(u), \qquad r \to \infty \tag{5.3}$$

uniformly for $u \in U$. Replacing uniform convergence by convergence in the sense of l.i.m., we prove the following analogue of Theorem 4 and Corollary 4.1.

THEOREM 5.1. *If $V \in W_H(E)$, then*

$$\text{l.i.m.}_{r \to \infty} \int_0^r t^{\frac{1}{2}(p-2)} V(t u)\, dt = (2\pi)^{\frac{1}{2}} F(u) \quad \textit{exists.} \tag{5.4}$$

The corresponding map $W_H(E) \to L^2(U)$ defined by $V \to 2^{\frac{1}{2}} F$ is an isomorphism onto; it is also given by (5.1)—(5.2).

PROOF. It is sufficient to prove (5.4) and the fact that (5.1) implies (5.2). For if this is granted, the other assertions of Theorem 5 follow from Corollary 4.1 and the fact that the map

$$A K(u) = F(u), \tag{5.5}$$

where

$$K(u) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n K_n(u), \qquad \|K_n\| = 1, \tag{5.6}$$

is a unitary map of $L^2(U)$ onto itself.

Let $V \in W_H(E)$ and satisfy (5.1). Then $\sum |c_n|^2 < \infty$ [cf. (2.7)] and so (5.2) defines a function $F(u)$ of class $L^2(U)$. Since (5.1) can be formally integrated over finite r-intervals, PARSEVAL's relation gives

$$\left\| \int_0^r t^{\frac{1}{2}(p-2)} V(t u)\, dt - (2\pi)^{\frac{1}{2}} F(u) \right\|^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \alpha(n, r)|^2, \tag{5.7}$$

where

$$\alpha(n,r)=\int_0^r J_\mu(t)\,dt-1. \tag{5.8}$$

Thus (5.4) is equivalent to

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\,\dot{\alpha}(n,r)\to 0,\qquad r\to\infty. \tag{5.9}$$

Since [17, p. 31]

$$\alpha(n,r)\to 0 \quad \text{as} \quad r\to\infty, \tag{5.10}$$

(5.9) holds if the series is uniformly convergent for $0\leqq r<\infty$. Consequently, Theorem 5.1 follows from $\sum|c_n|^2<\infty$ and the uniform boundedness of $\alpha(n,r)$. The latter fact is implied by

LEMMA 5.1. *There exists a constant C such that*

$$0\leqq\int_0^r J_\mu(t)\,dt\leqq C \quad \textit{for all } r\geqq 0 \textit{ and } \mu\geqq\tfrac{1}{2}. \tag{5.11}$$

The proof of this lemma will be given below.

Since a unitary operator A satisfies $(AF, AG)=(F,G)$ for $F,G\in L^2(U)$, Theorem 4 and the proof of Theorem 5.1 give the following representation for the inverse of the map (5.4) from V to F.

COROLLARY 5.1. *Let $k(x,u')=(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)}(Ae^{-ix\cdot u'})^*$, i.e.,*

$$k(x,u')=(2\pi)^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}(2-p)}\omega_p^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}J_\mu(r)\,N(p;n)\,P_n(p;u\cdot u'). \tag{5.12}$$

Then if $F(u)\in L^2(U)$, the function

$$V(x)=\int_U k(x,u')\,F(u')\,du' \tag{5.13}$$

is in $W_H(E)$ and satisfies (5.4).

OWENS [13], [14] considered the map $F\to V$ given by (5.13) for $p=2,3$ and for a more restricted class of functions F. In addition, he derived a simplified formula for the kernel (5.12).

Lemma 5.1 can also be used to prove

THEOREM 5.2. *If the expansion* (5.2) *for $F(u)$ converges absolutely at a point $u_0\in U$, then* (5.3) *holds for $u=u_0$; if the expansion* (5.2) *is uniformly absolutely convergent on some subset U_1 of U, then* (5.3) *holds uniformly for $u\in U_1$. In particular, one can choose $U_1=U$ if*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|n^{\frac{1}{2}(p-2)}<\infty. \tag{5.14}$$

In order to verify Theorem 5.2, note that the expansion (5.1) is uniformly absolutely convergent on compact subsets of E. This follows from the estimates $c_n=O(1)$, $J_\mu(r)=(\frac{1}{2}r)^\mu/\Gamma(1+\mu)\{1+o(1)\}$, $\mu\to\infty$ and [10, p. 242]

$$|K_n(u)|\leqq[N(p;n)/\omega_p]^{\frac{1}{2}} \quad \text{if} \quad \|K_n\|=1. \tag{5.15}$$

Hence for any $u \in U$,

$$\left| \int_0^r t^{\frac{1}{2}(p-2)} V(tu)\, dt - (2\pi)^{\frac{1}{2}} F(u) \right| \leqq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n K_n(u)|\, |\alpha(n,r)|.$$

This makes it clear that the first two statements of Theorem 5.2 follow from (5.10) and Lemma 5.1. The third depends, in addition, on the estimates (5.15) and (1.3).

Theorem 5.2 implies the result of OWENS [13] to the effect that if $p=2$ and $F(u)$, given by (5.2), is uniformly Hölder continuous of order $\lambda > \frac{1}{2}$, then (5.3) holds uniformly on U. In fact, $p=2$ means that (5.2) is a trigonometric Fourier series, so that (5.14) holds if, for example, $F(u)$ is uniformly Hölder continuous of order $\lambda > \frac{1}{2}$ or $F(u)$ is of bounded variation and uniformly Hölder continuous of some order $\lambda > 0$; cf. [22, pp. 135–137].

A corresponding result announced by OWENS [14] for $p=3$, where Hölder continuity is replaced by Lipschitz continuity ($\lambda = 1$) does not seem to be contained in Theorem 5.2. OWENS' proof is incomplete because he seems to assume that if $f(\vartheta)$ is uniformly Lipschitz continuous for $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, then $g(\xi) = f(\arccos \xi)$ is uniformly Lipschitz continuous for $-1 \leqq \xi \leqq 1$. For this reason, the theorem of OWENS will be proved below and extended to arbitrary $p \geqq 3$.

THEOREM 5.3. *Let $p \geqq 3$ and $j = \frac{1}{2}(p-1)$ or $j = \frac{1}{2}p - 1$ according as p is odd or even. Let the function $F(u)$ be defined on U: $|u| = 1$ and have the Laplace series (5.2). Assume that $F(u)$ is of class C^{j-1} on U and that the partial derivatives of order $j-1$ are uniformly Lipschitz condition on U. Let $V \in W_H(E)$ have the expansion (5.1). Then (5.3) holds uniformly on U.*

This will be deduced from the following three lemmas.

LEMMA 5.2. *Let $\tau \geqq 0$ and let $a_1, a_2, \ldots$ be complex numbers satisfying either*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \tag{5.16}$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ is convergent and } \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right|^2 < \infty. \tag{5.17}$$

Then

$$\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{2n+\tau}(r)\, dr \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{as} \quad R \to \infty. \tag{5.18}$$

The assertion (5.18) under the assumption (5.16) is clear from Lemma 5.1. The assumption (5.17) will be considered below.

LEMMA 5.3. *Let $p \geqq 3$ and let $j = j(p)$ be $\frac{1}{2}(p-1)$ or $\frac{1}{2}p - 1$ according as p is odd or even. Let $f(t)$ be defined for $-1 \leqq t \leqq 1$ and have the properties that $f(t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}$ is of class C^{j-1}, the derivatives of order $0, \ldots, j-1$ vanish at $t = \pm 1$, the derivative of order $j-1$ is absolutely continuous and*

$$|[f(t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}]^{(j)}| \leqq M(1-t^2)^{-\alpha} \tag{5.19}$$

holds almost everywhere, where M, α are positive constants and α is subject to $\alpha<\frac{3}{4}$ or $\alpha<\frac{1}{4}$ according as p is odd or even. Then the expansion of $f(t)$ in terms of the polynomials $P_n(p;t)$,

$$f(t)\sim(\omega_{p-1}/\omega_p)\sum_{n=0}^{\infty}N(p;n)\,f_n\,P_n(p;t), \tag{5.20}$$

where

$$f_n=\int_{-1}^{1}f(t)\,P_n(p;t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}\,dt, \tag{5.21}$$

is convergent to 0 at $t=1$ and the remainders

$$S_k=(\omega_{p-1}/\omega_p)\sum_{n=0}^{k}N(p;n)\,f_n=-(\omega_{p-1}/\omega_p)\sum_{n=k+1}^{\infty}N(p;n)\,f_n \tag{5.22}$$

satisfy

$$\sum_{k=0}^{\infty}|S_k|^2<\infty. \tag{5.23}$$

REMARK 1. If, in this lemma, p is odd, the speed of convergence of (5.23) can be estimated in terms of M, α, p. (This fact will be used below to obtain the uniformity of (5.3) in Theorem 5.3.)

REMARK 2. If p is even, the lemma remains correct if the assumption (5.19) is replaced by

$$\int_{-1}^{1}|g(t)|^2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt<\infty, \tag{5.24}$$

where

$$g(t)=[f(t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}]^{(j)}. \tag{5.25}$$

Further, suppose that $f=f(t;u)$ depends on parameters u varying on a compact set, say U: $|u|=1$, in such a way that the corresponding functions $g=g(t;u)$ in (5.25) satisfy

$$\int_{-1}^{1}|g(t;u^1)-g(t;u^2)|^2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt\to 0\quad\text{as}\quad u^1-u^2\to 0. \tag{5.26}$$

Then the proof of Lemma 5.3 will show that (5.23) holds uniformly in u.

The last lemma to be needed is

LEMMA 5.4. *Let the function (5.2) satisfy the conditions of Theorem 5.3. Then the Laplace series in (5.2) is uniformly convergent on U to $F(u)$ and the remainders*

$$S_k=\sum_{n=0}^{k}i^n\,c_n\,K_n(u)-F(u) \tag{5.27}$$

satisfy (5.23) uniformly on U.

In view of Lemma 5.4, applications of the case (5.17) of Lemma 5.2 to the series $\sum a_n$ representing the Laplace series for $F(u)+F(-u)$ and $F(u)-F(-u)$ give Theorem 5.3.

Lemmas 5.1–5.4 will now be proved.

PROOF OF LEMMA 5.1. Let $0=j_0<j_1<\cdots$ be the non-negative zeros of J_μ. We shall show that

$$\left|\int_{j_{n-1}}^{j_n} J_\mu(t)\,dt\right| \geqq \left|\int_{j_n}^{j_{n+1}} J_\mu(t)\,dt\right| \quad \text{for} \quad n=1,2,\ldots. \tag{5.28}$$

From this, the relation

$$\int_0^r J_\mu(t)\,dt = \sum_{n=1}^{M}\int_{j_{n-1}}^{j_n} J_\mu(t) + \int_{j_M}^{r} J_\mu(t)\,dt, \qquad j_M \leqq r < j_{M+1},$$

and the familiar "alternating series" argument, it follows that

$$0 \leqq \int_0^r J_\mu(t)\,dt \leqq \int_0^{j_1} J_\mu(t)\,dt.$$

The boundedness of the last integral for $\mu \geqq \frac{1}{2}$ is a consequence of the following known facts:

$$\int_0^\mu J_\mu(t)\,dt \to \tfrac{1}{3} \quad \text{as} \quad \mu\to\infty$$

(see [17, p. 259]); there exist positive constants C_1, C_2 such that $j_1-\mu \sim C_1\mu^{\frac{1}{3}}$ as $\mu\to\infty$ (see [17, p. 521]) and $J_\mu(r)\leqq C_2/\mu^{\frac{1}{3}}$ for $0\leqq r<j_1$ (see [18, p. 161 and 169]). Thus, the proof of Lemma 5.1 will be complete if (5.28) is verified.

The function $y(r)=r^{\frac{1}{2}}J_\mu(r)$ has the same zeros as J_μ and satisfies the differential equation

$$y''+[1+r^{-2}(\tfrac{1}{4}-\mu^2)]\,y=0,$$

where, for $\mu\geqq\frac{1}{2}$, the coefficient of y is non-decreasing. By a suitable application of STURM's second comparison theorem to the differential equations satisfied by

$$u(s)=|y(j_n+s)|, \qquad u(s)=|y(j_n-s)|$$

for $0\leqq s\leqq \min(j_{n+1}-j_n,\ j_n-j_{n-1})$, it is seen that

$$j_{n+1}-j_n \leqq j_n-j_{n-1} \quad \text{and} \quad |y(j_n+s)|\leqq|y(j_n-s)| \quad \text{for} \quad 0\leqq s\leqq j_{n+1}-j_n;$$

cf. [6, p. 531 and p. 538]. Since the factor $r^{\frac{1}{2}}$ in $y=r^{\frac{1}{2}}J_\mu(r)$ is increasing, the inequalities in the last formula line imply (5.28).

PROOF OF LEMMA 5.2. It only remains to consider the case (5.17) of Lemma 5.2. It is clear that the expression on the left of (5.18) can be integrated term-by-term to obtain

$$I(R)\equiv\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^R J_\gamma(r)\,dr, \quad \text{where} \quad \gamma=2n+\tau.$$

By ABEL's summation formula,

$$I(R)=\sum_{n=1}^{\infty} S_n\int_0^R (J_\gamma-J_{\gamma-2})\,dr + S_0\int_0^R J_\tau\,dr,$$

where $\gamma(n-1)=\gamma(n)-2$. Since $J_\gamma-J_{\gamma-2}=-2J'_{\gamma-1}$, it follows that

$$I(R)=-2\sum_{n=1}^{\infty} S_n J_{\gamma-1}(R)+S_0\int_0^R J_\tau\,dr.$$

The series on the right is majorized by

$$2\sum_{n=1}^{m}|S_n|\,|J_{\nu-1}(R)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|J_{\nu-1}(R)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=m}^{\infty}|S_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

The function $\sum|J_{\nu-1}(R)|^2$ is bounded for $0\leqq R<\infty$; [17, p. 152]. Hence, it follows from (5.8) and (5.10) that if m is fixed and large, then, for large R, $I(R)$ is close to S_0. This proves the lemma.

Proof of Lemma 5.3. By the first definition of S_k in (5.22),

$$\omega_p\,S_k/\omega_{p-1} = \int_{-1}^{1} f(t)\sum_{n=0}^{k} N(p;n)\,P_n(p;t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}\,dt. \tag{5.29}$$

Note that $P_n(p;1)=1$, so that [4, p. 243]

$$(p-2)\,N(p;n)\,P_n(p;t) = 2(n+\nu)\,C_n^{\nu}(t), \qquad \nu=\tfrac{1}{2}(p-2),$$

where $C_n^{\nu}(t)$ are the Gegenbauer (ultraspherical) polynomials. Hence the recursion formula ([4], p. 175) gives

$$(p-2)\sum_{n=0}^{k} N(p;n)\,P_n(p;t) = (1-t)^{-1}\,[(k+2\nu)\,C_k^{\nu} - (k+1)\,C_{k+1}^{\nu}]. \tag{5.30}$$

The differentiation formulae ([4], p. 176)

$$(k+2\nu)\,C_k^{\nu} = C_{k+1}^{\nu\prime} - t\,C_k^{\nu\prime}, \qquad (k+1)\,C_{k+1}^{\nu} = t\,C_{k+1}^{\nu\prime} - C_k^{\nu\prime}$$

show that the right side of (5.30) is $C_{k+1}^{\nu\prime}+C_k^{\nu\prime}$. Thus, by (5.29) and an integration by parts,

$$(p-2)\,\omega_p\,S_k/\omega_{p-1} = -\int_{-1}^{1}[f(t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}]'\,[C_{k+1}^{\nu}+C_k^{\nu}]\,dt.$$

The relation $C_n^{\nu\prime} = 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}$ (cf. [4], p. 176) and $j-1$ repeated integration by parts give

$$S_k = B_p\int_{-1}^{1} g(t)\,[C_{k+j}^{\delta}+C_{k+j-1}^{\delta}]\,dt, \tag{5.31}$$

where B_p is a constant depending only on p, $g(t)$ is defined by (5.25), and $\delta=\frac{1}{2}$ or $\delta=1$ according as p is odd or even.

Consider first the case that p is odd. Thus

$$|g(t)| \leqq M(1-t^2)^{-\alpha} \quad \text{for} \quad |t|<1 \tag{5.32}$$

and $0<\alpha<\frac{3}{4}$. Using the usual notation for the standard Legendre polynomials $P_n(t)=C_n^{\frac{1}{2}}(t)$, (5.31) can be written as

$$S_k = B_p\,[T_{k-1}+T_k], \quad \text{where} \quad T_k = \int_{-1}^{1} g(t)\,P_{k+j}(t)\,dt. \tag{5.33}$$

Let $0<\varepsilon<1$ and divide the integral defining T_k into three parts

$$T_k = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1} \equiv \alpha_k+\beta_k+\gamma_k. \tag{5.34}$$

From (5.32) and the classical inequality $|P_n(t)| \leqq 2(n\pi)^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{4}}$ (cf. [4], p. 197), it is seen that

$$|\alpha_k|, \quad |\gamma_k| \leqq M' k^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha}, \tag{5.35}$$

where M' is a constant depending only on M, α and p. Since the polynomials $(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(t)$ are orthonormal for $n = 0, 1, \ldots$ (with respect to Lebesgue measure) on $|t| \leqq 1$, BESSEL'S inequality implies

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 (k+j+\tfrac{1}{2}) \leqq \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} |g(t)|^2 \, dt.$$

Using (5.32),

$$2^m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} |\beta_k|^2 \leqq M'' \varepsilon^{1-2\alpha}, \tag{5.36}$$

where $M'' = M''(M, \alpha, p)$ and it is assumed, without loss of generality, that $\alpha > \frac{1}{2}$.

In (5.35) and (5.36), the quantities α_k, β_k, γ_k depend on ε. Let $2^m \leqq k < 2^{m+1}-1$ and choose $\varepsilon = \varepsilon(m)$ to be $2^{-m\eta}$, where $\eta > 0$ is so small that $(2\alpha-1)\eta < 1$. Then

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + |\gamma_k|^2\right) \leqq M'''(2^{-m\eta(\frac{1}{2}-\alpha)} + 2^{-m[1-(2\alpha-1)\eta]}),$$

$M''' = M'''(M, \alpha, p)$. By (5.34), $\sum |T_k|^2 < \infty$ and so, by (5.33), $\sum |S_k|^2 < \infty$. This completes the proof of Lemma 5.3 for odd p (and also the proof of Remark 1 following it).

Consider the case of even p. The polynomial $C_n^\delta = C_n^1(t)$ is the Tchebychef polynomial $U_n(t)$ of the second kind; so that $C_n^1(\cos\vartheta) = \sin(n+1)\vartheta / \sin\vartheta$. Thus (5.31) can be written as

$$S_k = -B_p \int_0^\pi g(\cos\vartheta) \left[\sin(k+j+1)\vartheta + \sin(k+j)\vartheta\right] d\vartheta. \tag{5.37}$$

It follows from BESSEL'S inequality that $\sum |S_k|^2 < \infty$ if $g(\cos\vartheta)$ is of class L^2 on $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$. This is certainly the case if (5.32) holds with $\alpha < \frac{1}{4}$, so that the proof of Lemma 5.3 is complete. This argument also makes the validity of Remark 2 clear.

PROOF OF LEMMA 5.4. The question of the convergence of a Laplace series (5.2) at a point u will be reduced in the standard way to the question of the convergence of a series (5.20) at $t = 1$.

In view of (4.4), the relation (5.2) can be written as

$$F(u) \sim \sum_{n=0}^{\infty} [N(p; n)/\omega_p] \int_U F(u') \, P_n(p; u \cdot u') \, du'. \tag{5.38}$$

Let u be fixed and let u^0 be a variable point of U satisfying $u \cdot u^0 = 0$; so that U^0: $|u^0| = 1$ is the boundary of a unit $(p-1)$-dimensional sphere. Writing

$u' = t\,u + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u^0$, the integral in (5.38) becomes

$$\int_{-1}^{1} P_n(p;t)\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)} \left\{ \int_{U^0} F\left(t\,u + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u^0\right) d\,u^0 \right\} dt.$$

Hence, the Laplace series (5.2) at u becomes the series (5.20) at $t=1$ where $f(t)$ is to be identified with

$$f_1(t) = (1/\omega_{p-1}) \int_{U^0} F\left(t\,u + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u^0\right) d\,u^0. \tag{5.39}$$

Instead of applying Lemma 5.3 to $f(t) = f_1(t)$, apply it to the function

$$f(t) = f_1(t) + L(t), \tag{5.40}$$

where $L(t)$ is a linear function in t chosen so that $f(\pm 1) = 0$. The analogue of the series (5.20) for $f(t)$ and for $f_1(t)$ differ only in the 0-th and 1-st terms.

If $F(u)$ is of class C^{j-1} on U, it is clear that $f(t)$ is of class C^{j-1} on $-1 < t < 1$. Furthermore, $d^k f/dt^k = O\left((1-t^2)^{-k+\frac{1}{2}}\right)$, $t \to \pm 1$, for $k = 0, \ldots, j-1$. Also, if the derivatives of order $j-1$ of $F(u)$ are uniformly Lipschitz continuous on U, then $d^{j-1} f/dt^{j-1}$ is uniformly Lipschitz continuous on closed subintervals of $-1 < t < 1$ and $d^j f/dt^j = O\left((1-t^2)^{-j+\frac{1}{2}}\right)$, $t \to \pm 1$. It follows that $f(t)$ $(1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}$ has $j-1$ continuous derivatives for $|t| \leqq 1$ vanishing at $t = \pm 1$. Furthermore, the function (5.25) satisfies (5.32) with $\alpha = \frac{1}{2}$ or $\alpha = 0$ according as p is odd or even.

Thus the convergence of the Laplace series (5.2) to $F(u)$ and the inequality (5.23) for (5.27) follows from Lemma 5.3. Furthermore, that (5.23) is uniform in u, when p is odd, follows from Remark 1 and the uniformity of the O-estimates of the last paragraph.

The uniformity of (5.23), when p is even, follows from Remark 2. In order to see this, it is sufficient to verify (5.26). Since $g(t;u)$ is uniformly bounded for $|t| < 1$ and $|u| = 1$, it is enough to verify the analogue of (5.26), say (5.26ε), in which the integral over $(-1, 1)$ is replaced by the integral over $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ for every fixed $\varepsilon > 0$. Suppose that coordinates in E are chosen so that $u^1 = (1, 0, \ldots, 0)$ and $u^2 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, \ldots, 0)$. If the function (5.39) is called $f_1(t;u)$, then

$$f_1(t;u^1) = (1/\omega_{p-1}) \int_{U^0} F(u)\,d\,u^0, \qquad f_2(t;u^2) = (1/\omega_{p-1}) \int_{U^0} F(\Omega\,u)\,d\,u^0,$$

where $u = \left(t, (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_2^0, \ldots, (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_n^0\right)$, $\Omega\,u = \left(t\cos\varphi - (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_2^0 \sin\varphi,\right.$ $\left. t\sin\varphi + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_2^0 \cos\varphi, (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_3^0, \ldots, (1-t^2)^{\frac{1}{2}} u_n^0\right)$ and $u^0 = (u_2^0, \ldots, u_n^0)$. Note that Ω is a rotation of the sphere U which tends to the identity as $u^1 - u^2 \to 0$. The sphere U^0 can be covered by a finite number of patches on each of which suitable local coordinates can be introduced. Suppose, for a moment, that F is of class C_1 on U. The functions $g(t;u^1)$, $g(t;u^2)$ can then be calculated formally from the last formula line interchanging differentiations and integration. This makes it clear that, for $|t| \leqq 1-\varepsilon$,

$$|g(t;u^1) - g(t;u^2)| \leqq M(\varepsilon) \left\{ |u^1 - u^2| + \sum{}' \int_{U^0} |G(u) - G(\Omega\,u)|\,d\,u^0 \right\}.$$

where $M(\varepsilon)$ is a constant depending only on ε and $\sum'$ denotes a sum over all partial derivatives G of F of order $k \leqq j$. By SCHWARZ's inequality

$$|g(t; u^1) - g(t; u^2)|^2 \leqq M'(\varepsilon) \left\{ |u^1 - u^2|^2 + \sum' \int_{U^\varepsilon} |G(u) - G(\Omega u)|^2 \, du^0 \right\}.$$

Hence $du = (1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)} \, dt \, du^0$ implies that

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} |g(t; u^1) - g(t; u^2)|^2 (1-t^2)^{\frac{1}{2}(p-3)} \, dt \leqq$$
$$\leqq M''(\varepsilon) \left\{ |u^1 - u^2|^2 + \sum' \int_U |G(u) - G(\Omega u)|^2 \, du \right\}.$$

It is clear that this inequality remains valid if F satisfies the assumptions of Lemma 5.4 (and is not necessarily of class C^j). In this case, the partial derivatives of F of order j are understood to exist only almost everywhere on U. Finally, the analogue (5.26ε) of (5.26) follows from the last inequality, since Ω tends to the identity as $u^1 - u^2 \to 0$ and all of the derivatives G are essentially bounded [hence of class $L^2(U)$]. This proves Lemma 5.4.

6. The class W_S. In this section, we consider the classes of radiation functions introduced in Section 3. To begin, we collect a number of equivalent forms of the radiation conditions.

LEMMA 6.1. *Let $V \in W$. Then the following properties are equivalent*:

(6.1) $V \in \widetilde{W}_S$, *i.e.*, $V_1 = 0$ [*cf.* (3.3) *or* (3.5)],

(6.2) $V \in W_S$, *i.e.*, V *satisfies* (3.1),

(6.3) $V \in W_H$ *and* $K^- = 0$,

(6.4) *In the expansion* (1.4), $b_{nj} = 0$, *i.e.*,

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} V(r u) \sim (\tfrac{1}{2}\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} i^n a_{nj} H_\mu^1(r) K_{nj}(u)$$

for large (fixed) r.

Note that it is not assumed that $V \in W_H$ in (6.4).

PROOF. We show (6.1) $\Rightarrow$ (6.2) $\Rightarrow$ (6.3) $\Rightarrow$ (6.4) $\Rightarrow$ (6.1). The implication (6.1) $\Rightarrow$ (6.2) has been noted in Corollary 3.2. It has already been mentioned after (3.1) that $W_S \subset W_H$. Also $V \in W_S \Rightarrow K^- = 0$, by (2.1). Hence (6.2) $\Rightarrow$ (6.3). The implication (6.3) $\Rightarrow$ (6.4) is obvious. In order to prove (6.4) $\Rightarrow$ (6.1), let $V \in W$ have the property (6.4). By Corollary 3.3, V has a unique decomposition $V = V_0 + V_1$, where $V_0 \in \widetilde{W}_S$, $V_1 \in W(E)$. Since (6.1) $\Rightarrow$ (6.4), it follows that V_0 has an expansion of the form

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} V_0(r u) \sim (\tfrac{1}{2}\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} i^n c_{nj} H_\mu^1(r) K_{nj}(u).$$

By the argument in the proof of Lemma 1, the entire wave function V_1 (which is not assumed to be in W_H) has an expansion of the form

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} V_1(r u) \sim (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} i^n d_{nj} J_\mu(r) K_{nj}(u).$$

Addition of these expansions and a comparison with (6.4) gives

$$a_{nj} H_\mu^1 = c_{nj} H_\mu^1 + 2 d_{nj} J_\mu = (c_{nj} + d_{nj}) H_\mu^1 + d_{nj} H_\mu^2,$$

so that $d_{nj} = 0$. Hence $V_1 = 0$

COROLLARY 6.1. *If $V \in W_S$, then K^+ is the function K defined by* (3.11) *in Corollary* 3.1.

This is clear from (2.1+) and (3.9)−(3.10).

This corollary means that each $V \in W_S$ is characterized by a single function $K = K^+ \in L^2(U)$. We shall call K the far field pattern of $V \in W_S$. Introduce the notation

$$H_\varrho = \{K\colon\ K \text{ is the far field pattern of a } V \in W_S(D_\varrho)\},$$

where $D_\varrho = \{x\colon\ |x| > \varrho\}$, and

$$H = \{K\colon\ K \in H_\varrho \text{ for some } \varrho \geqq 0\}.$$

The elements of the class H have been characterized by MÜLLER [*11*; *12*, pp. 93−94] for the case $p = 3$ as follows:

THEOREM 6a. *Let $K \in L^2(U)$ possess the expansion* (5.6). *Then $K \in H$ if and only if the harmonic function defined in $|x| < 1$ by*

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n K_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n K_n(x) \tag{6.5}$$

can be continued to an entire harmonic function satisfying

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log \| K(ru) \|^2 < \infty; \tag{6.6}$$

in fact, $K \in H_\varrho$ if and only if (6.5) *can be extended to an entire harmonic function satisfying*

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log \| K(ru) \|^2 \leqq \varrho. \tag{6.7}$$

Since $\| K(ru) \|^2 = \sum |c_n|^2 r^{2n}$, condition (6.7) is equivalent to

$$\limsup_{n \to \infty} 2 |n!\, c_n|^{1/n} \leqq \varrho. \tag{6.8}$$

In fact, (6.7) and (6.8) are well known equivalent conditions that the power series representing $\| K(ru) \|^2$ define an entire function of exponential type $\tau \leqq \varrho$; cf., e.g., [*2*, p. 8 and p. 11].

We now give a short direct proof of MÜLLER's theorem (for $p \geqq 2$) stated in the form

THEOREM 6b. *Let $K \in L^2(U)$ have the expansion* (5.6). *Then $K \in H_\varrho$ if and only if* (6.8) *holds.*

PROOF. We first show $K \in H_\varrho \Rightarrow$ (6.8). The assumption $K \in H_\varrho$ means that there exists a $V \in W_S(D_\varrho)$ with an expansion

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} V(ru) \sim (\tfrac{1}{2}\pi r)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n c_n H_\mu^1(r) K_n(u), \qquad r > \varrho. \tag{6.9}$$

By PARSEVAL'S relation, $r^{p-1}\|V(ru)\|^2=\frac{1}{2}\pi r\sum|c_nH_\mu^1(r)|^2$ for $r>\varrho$; in particular, $c_nH_\mu^1(r)=O(1)$, $n\to\infty$, for every fixed $r>\varrho$. Thus, since [17, p. 197]

$$\pi i\,H_\mu^1(r)=\Gamma(\mu)\,(2/r)^\mu\,\big(1+o(1)\big),\qquad \mu\to\infty, \tag{6.10}$$

we have, by $\mu=n+\frac{1}{2}(p-2)$, for large n,

$$|n!\,c_n|\leqq C\,(\tfrac{1}{2}r)^n\,\Gamma(n+1)/\Gamma\big(n+\tfrac{1}{2}(p-2)\big),$$

where C is a constant depending only on r (but not n). Thus

$$|n!\,c_n|^{1/n}\leqq (r/2)\,\big(1+o(1)\big),\qquad n\to\infty.$$

This proves (6.8).

To prove (6.8) $\Rightarrow K\in H_\varrho$, we show that the series in (6.9) is convergent and defines a $V\in W_S(D_\varrho)$. Note that if (6.8) holds, then for every $\varrho'>\varrho$, there is an $n_0(\varrho')$ such that

$$|c_n|\leqq(\tfrac{1}{2}\varrho')^n/n!\quad\text{for}\quad n\geqq n_0(\varrho'). \tag{6.11}$$

The $o(1)$ in (6.10) is uniform with respect to r if $0<\varrho'<r<\varrho''<\infty$. If the inequality (6.11) is combined with (6.10) and the estimate for $K_n(u)$ supplied by (5.15) and (1.3), it is seen that there exist constants $C=C(\varrho',\varrho'')$, $n_0=n_0(\varrho',\varrho'')$ such that for $\varrho'<r<\varrho''$,

$$|c_nH_\mu^1(r)\,K_n(u)|\leqq C(\varrho'/r)^n\,n^{p-2}\quad\text{for}\quad n\geqq n_0(\varrho',\varrho'').$$

Since $\varrho'>\varrho$ is arbitrary, it follows that the series in (6.9) is uniformly convergent on compact subsets of D_ϱ. Hence its sum represents a function of the form $r^{\frac{1}{2}(p-1)}V(ru)$, where $V(x)$ solves the Helmholtz equation on D_ϱ, i.e., $V\in W(D_\varrho)$. Since V satisfies (6.4) in Lemma 6.1, it follows that $V\in W_S(D_\varrho)$. That K is the far field pattern of V is clear from (6.9) and (5.6).

For the purpose of obtaining integral representations for a $V\in W_S$ in terms of its far field pattern K, we examine the possibility of extending $K(u)$ into an entire harmonic function $K(z)$ of the complex variables $(z_1,\dots,z_p)$ which satisfies a certain growth restriction. In this direction, we get the following analogue of MÜLLER'S Theorem 6a.

THEOREM 6c. *Let $K\in L^2(U)$ and $K(x)$ the harmonic function defined by (6.5). Then $K\in H_\varrho$ if and only if $K(x)$ can be extended to an entire harmonic function of the complex vector z which satisfies*

$$|K(z)|\leqq M\exp\{\tfrac{1}{2}(\varrho+\varepsilon)\,[a+(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\}\quad\textit{for every}\quad\varepsilon>0, \tag{6.12}$$

where $M=M(\varepsilon)$ is a constant, and

$$a=z\cdot z^*=|z_1|^2+\cdots+|z_p|^2,\qquad b=|z\cdot z|=|z_1^2+\cdots+z_p^2|. \tag{6.13}$$

Note that for complex vectors z and w, the dot product $z\cdot w$ is the sum $z_1w_1+\cdots+z_pw_p$, not the usual scalar product $z_1w_1^*+\cdots+z_pw_p^*$.

PROOF. If $P(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots$ is a polynomial, write $P(a,b)=b^nP(a/b)=a_0a^n+a_1a^{n-1}b+\cdots$. Then the addition theorem (4.4) implies

$$\sum_{j=1}^{N}K_{nj}(z)\,K_{nj}^*(z')=(N/\omega_p)\,P_n\big(\tfrac{p}{2};\,z\cdot z',\,[(z\cdot z)\,(z',z')]^{\frac{1}{2}}\big).$$

In particular, if $z' = z^*$,

$$\sum_{j=1}^{N} |K_{nj}(z)|^2 = (N/\omega_p)\, P_n(p; a, b).$$

Since it can be supposed that, say, $K_n = K_{n1}$, it follows that

$$|K_n(z)|^2 \leqq (N/\omega_p)\, P_n(p; a, b). \tag{6.14}$$

From the integral representation [*10*, p. 245] for $P_n(p; t)$,

$$P_n(p; t) = (\omega_{p-2}/\omega_{p-1}) \int_{-1}^{1} [t + i(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} s]^n (1 - s)^{\frac{1}{2}(p-4)}\, ds,$$

we have

$$P_n(p; a, b) = (\omega_{p-2}/\omega_{p-1}) \int_{-1}^{1} [a + i(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} s]^n (1 - s)^{\frac{1}{2}(p-4)}\, ds.$$

Since [*10*, p. 243]

$$\omega_{p-1} = \omega_{p-2} \int_{-1}^{1} (1 - s)^{\frac{1}{2}(p-4)}\, ds,$$

and, for $|s| \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq a$,

$$|a + i(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}| \leqq a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}},$$

we get

$$|P_n(p; a, b)| \leqq [a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}]^n \quad \text{for} \quad 0 \leqq b \leqq a. \tag{6.15}$$

From $N = O(n^{p-2})$, (6.8), (6.14) and (6.15), it follows that there is an $M = M(\varepsilon)$ satisfying

$$|c_n K_n(z)| \leqq M\{\tfrac{1}{2}(\varrho + \varepsilon)[a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}]\}^n / n! \quad \text{for} \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{6.16}$$

Consequently, if $K \in H_\varrho$, then $K(z) = \sum c_n K_n(z)$ is convergent for all complex z and defines an entire harmonic function of z satisfying (6.12).

To prove that (6.12) $\Rightarrow K \in H_\varrho$, note that if $z = x$ real, we have $a = b = r$. Hence (6.12) $\Rightarrow |K(ru)| \leqq M \exp[\frac{1}{2}(\varrho + \varepsilon) r]$ for every $\varepsilon > 0$ which, in turn, implies (6.7). Hence $K \in H_\varrho$ by Theorem 6a.

If $V \in W_S(D_\varrho)$ and $K \in H_\varrho$ is its far field pattern, then by Corollary 6.1,

$$K(u) = -\tfrac{1}{2} i (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_{B(\varrho')} [V_r(\varrho' u') + i\, u \cdot u'\, V(\varrho' u')]\, e^{-i\varrho' u \cdot u'}\, dB$$

for all real unit vectors u. Here $B(\varrho)$ is the hypersphere $\{x: |x| = \varrho\}$ and $\varrho' > \varrho$. The right side of this equation possesses an obvious extension to an analytic function of p complex variables $z = (z_1, \ldots, z_p)$, namely,

$$K'(z) = -\tfrac{1}{2} i (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_{B(\varrho')} [V_r(\varrho' u') + i\, z \cdot u'\, V(\varrho' u')]\, e^{-i\varrho' z \cdot u'}\, dB. \tag{6.17}$$

This function is not identical with the harmonic extension $K(z)$ of $K(u)$; e.g., they do not coincide at the origin $z = (0, \ldots, 0)$. We can prove, however, that $K(z) = K'(z)$ whenever $z_1^2 + \cdots + z_p^2 = 1$.

LEMMA 6.2. *If $K(u)$ is analytic on the real unit hypersphere $u_1^2+\cdots+u_p^2=1$, then any extension of $K(u)$ to an analytic function $K(z)$ on the complex hypersphere $z_1^2+\cdots+z_p^2=1$ is unique.*

PROOF. Consider two extensions $K(z)$, $K'(z)$ of $K(u)$ analytic on the complex hypersphere Σ: $z_1^2+\cdots+z_p^2=1$. Let $z^0\in\Sigma$. Then there is at least one component, say z_p, of z such that $\operatorname{Re} z_p^2>0$. If $z=(z_1,\ldots,z_{p-1},[1-(z_1^2+\cdots+z_{p-1}^2)]^{\frac12})$, and the square root is chosen so that $z_p^0=[1-(z_1^{02}+\cdots+z_{p-1}^{02})]^{\frac12}$, then K, K' become analytic functions, say K_1, K_1', of $(z_1,\ldots,z_{p-1})$ on the domain $Q=\{(z_1,\ldots,z_{p-1})\colon \operatorname{Re}[1-(z_1^2+\cdots+z_{p-1}^2)]>0\}$. This domain contains the point $(z_1^0,\ldots,z_{p-1}^0)$ and the real points $(u_1,\ldots,u_{p-1})$ satisfying $u_1^2+\cdots+u_{p-1}^2<1$. For such real points, $K_1=K_1'$. Thus, by a standard theorem on functions of several complex variables (cf. [2, p. 34]), $K_1\equiv K_1'$ on Q. The relation $K_1=K_1'$ at the point $(z_1^0,\ldots,z_{p-1}^0)$ of Q means that $K=K'$ at the point z^0. Since z^0 is an arbitrary point of Σ, the lemma is proved.

7. Integral representation for $V\in W_S$. One such representation,

$$V(r\,u)=\int_{1+i\,0}^{1+i\,\infty} e^{i\,r\,w}\,\varphi(u,w)\,dw,\qquad \text{where}\qquad \varphi=-i\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,P_n(w)\,K_n(u),$$

was proved by MÜLLER [11] for the case $p=3$. In this section, we derive two different integral representations which involve the extension $K(z)$ of $K(u)$, rather then the analogue of $\varphi(u,w)$. The first is given by

THEOREM 7.1. *Let $V\in W_S(D_\varrho)$ and $K\in H_\varrho$ its far field pattern. Then*

$$(2\pi)^{\frac12}\,(i\,r)^{\frac12(p-2)}\,V(r\,u)=\int_\Gamma e^{i\,r\cos\varphi+i\frac12(p-2)\varphi}\,K(e^{i\varphi}u)\,d\varphi,\qquad r>\varrho,$$

where $K(z)$, $z=e^{i\varphi}u$, is the (unique) harmonic extension of $K(u)$ defined in Theorem 6c and Γ is the oriented rectilinear path from $-\frac12\pi+i\infty$ to $-\frac12\pi$, to $\frac12\pi$, to $\frac12\pi-i\infty$ in the φ-plane.

PROOF. It is known that [17, p. 178]

$$H_\mu^1(r)=\pi^{-1}\,e^{-i\,\mu\,\pi}\int_\Gamma e^{i\,r\cos\varphi+i\,\mu\,\varphi}\,d\varphi.$$

If this is inserted into the expansion (6.9) for $V(r\,u)$ and the order of summation and integration reversed, we get

$$r^{\frac12(p-1)}\,V(r\,u)=(r/2\pi)^{\frac12}\,i^{\frac12(2-p)}\int_\Gamma e^{i\,r\cos\varphi+i\frac12(p-2)\varphi}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,e^{i\,n\,\varphi}\,K_n(u)\,d\varphi,\qquad r>\varrho.$$

This formula is equivalent to the assertion. The term-by-term integration can be justified by LEBESGUE's theorem on dominated convergence. To see this, note that

$$\Big|\sum_{n=0}^{m} c_n\,e^{i\,n\,\varphi}\,K_n(u)\Big|\leqq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n\,e^{i\,n\,\varphi}\,K_n(u)|\leqq M\exp[\tfrac12(\varrho+\varepsilon)e^{-\operatorname{Im}\varphi}]$$

by (6.12). Thus, on taking $\varphi=\pm(\frac12\pi-i\,s)$ and $s\geqq0$, we get

$$\Big|e^{i\,r\cos\varphi+i\frac12(p-1)\varphi}\sum_{n=0}^{m} c_n\,e^{i\,n\,\varphi}\,K_n(u)\Big|\leqq M'\exp\{\pm\tfrac12(p-2)\,s-\tfrac12[r\pm(\varrho+\varepsilon)]\,e^s\},$$

and the last function is integrable on $0 \leqq s < \infty$ for $r > \varrho + \varepsilon$. This gives Theorem 7.1.

Our second integral representation for elements $V \in W_S$ is closely related to the plane wave representation (4.2) for $V \in W_H(E)$. To state it, we introduce a domain of integration Γ_1 on the complex unit hypersphere $\{w\colon w$ complex, $w_1^2 + \cdots + w_p^2 = 1\}$ as follows: Every $u \in U$ can be written as $u = e_1 \cos\vartheta + u^0 \sin\vartheta$, where $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ and $u^0 \in U^0$, the boundary of the unit sphere in the $p-1$ dimensional space $x_1 = 0$. Moreover,

$$du = \sin^{p-2}\vartheta \, d\vartheta \, du^0, \tag{7.1}$$

where du^0 is the element of area on U^0. Let

$$\Gamma_1 = \{w\colon w = e_1 \cos\vartheta + u^0 \sin\vartheta,\ u^0 \in U^0 \text{ and } \vartheta \in M_1\}, \tag{7.2}$$

where M_1 is the rectilinear contour in the ϑ-plane

$$M_1\colon 0 \text{ to } \tfrac{1}{2}\pi, \text{ to } \tfrac{1}{2}\pi - i\infty. \tag{7.3}$$

On Γ_1 define the "element of volume" as

$$dw = \sin^{p-2}\vartheta \, d\vartheta \, du^0, \qquad \vartheta \in M_1. \tag{7.4}$$

THEOREM 7.2. *Let $V \in W_S(D_\varrho)$ and $K \in H_\varrho$ its far field pattern. Then*

$$V(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_{\Gamma_1} e^{ix\cdot w} K(w)\, dw \quad \text{for} \quad x_1 > \varrho, \tag{7.5}$$

where $K(w)$ is the unique analytic extension of $K(u)$ to the complex hypersphere $w_1^2 + \cdots + w_p^2 = 1$.

Equation (7.5) is to be interpreted to mean

$$V(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_{U^0} \int_{M_1} e^{i(x_1 w_1 + \cdots + x_p w_p)} K(e_1 \cos\vartheta + u^0 \sin\vartheta) \sin^{p-2}\vartheta \, d\vartheta \, du^0, \tag{7.6}$$

where

$$w_1 = \cos\vartheta; \qquad w_2 = u_2^0 \sin\vartheta, \ldots, w_p = u_p^0 \sin\vartheta; \qquad u^0 = (0, u_2^0, \ldots, u_p^0). \tag{7.7}$$

M_1 is defined relative to a fixed coordinate system. Obviously, by rotating the coordinate system, we can obtain a representation (7.5) valid in an arbitrary half-space which does not meet the hypersphere $B(\varrho)\colon r = \varrho$.

The proof of Theorem 7.2 will be broken into several parts. The first is

LEMMA 7.1. *The integral in (7.5) converges for $x_1 > \varrho$ and converges uniformly on any half-space $x_1 \geqq \varrho' > \varrho$.*

PROOF. Only the portion $\vartheta = \frac{1}{2}\pi - is$, $s \geqq 0$, of M_1 needs to be considered. Here $\cos\vartheta = i \sinh s$, $\sin\vartheta = \cosh s$. Thus

$$|e^{ix\cdot w}| = e^{-\operatorname{Im} x\cdot w} = e^{-x_1 \sinh s}.$$

In the notation of Theorem 6c, for $z = w$,

$$a = |w_1|^2 + \cdots + |w_p|^2 = \sinh^2 s + \cosh^2 s, \qquad b = 1.$$

Hence

$$[a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \leqq (2a)^{\frac{1}{2}} = (e^{2s} + e^{-2s})^{\frac{1}{2}} \leqq e^s (1 + \tfrac{1}{2} e^{-4s}),$$

and, by Theorem 6c,

$$|K(w)| \leqq M \exp[\tfrac{1}{2}(\varrho+\varepsilon)(e^s+\tfrac{1}{2}e^{-3s})] \leqq M' \exp[\tfrac{1}{2}(\varrho+\varepsilon)e^s].$$

It follows that, for $s \geqq 0$,

$$(7.8)\quad |e^{i x\cdot w} K(w) \sin^{p-2}\vartheta| \leqq M'' \exp[-\tfrac{1}{2}(x_1-\varrho-\varepsilon)e^s + (p-2)s],$$

which assures the uniform convergence of the integral in (7.5) on any half-space $x_1 \geqq \varrho' > \varrho$.

Next we prove Theorem 7.2 for the particular case $K=1$.

LEMMA 7.2. *For* $x_1 > 0$,

$$\int_{\Gamma_1} e^{i x\cdot w}\, dw = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}p} r^{\frac{1}{2}(2-p)} H^1_{\frac{1}{2}(p-2)}(r).$$

PROOF. When $x_2 = \cdots = x_p = 0$, so that $x_1 = r$, the lemma states that

$$\omega_{p-1}\int_{M_1} e^{i r\cos\vartheta}\sin^{p-2}\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}p} r^{\frac{1}{2}(p-2)} H^1_{\frac{1}{2}(p-2)}(r), \quad r>0.$$

This is easily verified by an induction on p. The general case can be reduced to this by a suitable rotation of coordinates. This has been carried out in detail by H. WEYL [*19*, pp. 481—482 and pp. 491—492] in the case $p=3$. His method is easily carried over to the general case $p \geqq 2$; we do not give details here.

The proof of Theorem 7.2 will now be given on the basis of these two lemmas and the integral representation (3.8) for V, taking for B the hypersphere $B(\varrho')$ with radius $\varrho' > \varrho$:

$$(7.9)\quad V(x) = \int_{B(\varrho')} [V(x')\, G_r(x-x') - V_r(x')\, G(x-x')]\, dB, \qquad r > \varrho'.$$

By the last lemma, the GREEN'S function G has the representation

$$G(x-x') = i\, 2^{-2}(2\pi R)^{\frac{1}{2}(2-p)} H^1_{\frac{1}{2}(p-2)}(R) = \pi\, i\,(2\pi)^{-p}\int_{\Gamma_1} e^{i(x-x')\cdot w}\, dw$$

in $x_1 - x_1' > 0$. Also, if $x' = r'u'$, then

$$G_{r'}(x-x') = -\,i(\pi i)(2\pi)^{-p}\int_{\Gamma_1} e^{i(x-x')\cdot w}(u'\cdot w)\, dw, \qquad x_1 - x_1' > 0.$$

Differentiation under the integral sign is easily justified by using FUBINI'S theorem and the absolute convergence of the last integral. These expressions for G and $G_{r'}$ can be substituted in (7.9) provided $x_1 - \varrho' > 0$. The order of integrations in the resulting expressions can be reversed because the integrand

$$e^{i(x-x')\cdot w}[i\, V(x')\, u'\cdot w + V_r(x')]\sin^{p-2}\vartheta$$

is dominated by a constant times

$$\exp[-\tfrac{1}{2}(x_1-\varrho')e^s + (p-1)s] \quad \text{for} \quad \vartheta = \tfrac{1}{2}\pi - i\,s, \qquad s \geqq 0.$$

Thus we have, for $x_1 > \varrho'$,

$$V(x) = -\,\pi\, i\,(2\pi)^{-p}\int_{\Gamma_1} e^{i x\cdot w}\int_{B(\varrho')}[V_r(x') + i\,u'\cdot w\, V(x')]\, e^{-i x'\cdot w}\, dB\, dw.$$

Since the function $K'(z)$ in (6.17) satisfies $K'(w)=K(w)$ on the complex unit hypersphere, the relation in (7.5) follows for $x_1>\varrho'$. As $\varrho'>\varrho$ is arbitrary, Theorem 7.2 is proved.

The estimate (7.8) for the contribution of the non-real $w\in\Gamma_1'$ to the integral representation (7.5) implies that, apart from an exponentially small error, $V(x)$ can be obtained directly from its far field pattern $K(u)$, $u\in U$. More precisely, we have

COROLLARY 7.1. *Let* $U_1=\{u\colon u\in U \text{ and } u_1>0\}$. *Then*

$$V(x)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(2-p)}\int_{U_1} e^{ix\cdot u}K(u)\,du+O(e^{-\frac{1}{2}(x_1-\varrho')}) \quad \text{for} \quad x_1>\varrho',$$

where $\varrho'>\varrho$ *is arbitrary. The constant implicit in the O-term depends on* ϱ', *but not on* x.

8. The class W_H' and $W_\pm$. In the first part of this section, we complete the discussion of the class of Herglotz wave functions by characterizing the class W_H' of far field patterns $[K^+, K^-]$. Our result which is an immediate corollary of Theorem 3 and 4 is as follows

THEOREM 8.1. *The element* $[K^+(u), K^-(u)]$ *of* $L^2(U)\times L^2(U)$ *is a far field pattern of a function* $V\in W_H(D_\varrho)$ *if and only if*

$$K^+(u)-K^-(-u)\in H_\varrho, \tag{8.1}$$

that is, if and only if

$$\limsup_{n\to\infty} 2\left|n!\left(\sum_{j=1}^{N}|a_{nj}-b_{nj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|^{1/n}\leqq\varrho. \tag{8.2}$$

PROOF. Every $V\in W_H(D_\varrho)$ has a unique decomposition $V=V_0+V_1$ with $V_0\in W_S(D_\varrho)$, $V_1\in W_H(E)$, by Corollary 3.3. Let $K_0\in H_\varrho$, $K_1\in L^2(U)$ be the far field pattern of V_0, V_1, respectively. Then

$$K^+(u)=K_0(u)+K_1(u), \qquad K^-(u)=K_1(-u), \tag{8.3}$$

whence

$$K_0(u)=K^+(u)-K^-(-u)\in H_\varrho. \tag{8.4}$$

Conversely, if (8.1) holds, define K_0, K_1 by (8.3). If $V_0\in W_S(D_\varrho)$, $V_1\in W_H(E)$ are the corresponding wave functions, then $V=V_0+V_1$ is an element of $W_H(D_\varrho)$ and has the far field pattern $[K^+, K^-]$. This completes the proof.

A corollary of Theorem 8.1 is the assertion

$$W_H'=\{[K^+, K^-]\colon K^\pm\in L^2(u),\ K^+(u)-K^-(-u)\in H\},$$

(cf. the definition of H before Theorem 6a) or in terms of the expansions (2.11) for $K^\pm\in L^2(U)$,

$$W_H'=\left\{[K^+, K^-]\colon \limsup_{n\to\infty}\left|n!\left(\sum_{j=1}^{N}|a_{nj}-b_{nj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|^{1/n}<\infty\right\}.$$

In conclusion we consider the question as to when a wave function V can be decomposed into a sum of "outgoing" and "incoming" waves, i.e., $V=V_1+V_2$ with V_1, $V_2^*\in W_S$. If such a decomposition exists, it is unique,

by Lemma 6.1. A solution to this problem follows at once from the results of Sections 2 and 6. In terms of the notation

$$W_\pm(D_\varrho) = \{V:\ V = V_1 + V_2 \quad \text{with} \quad V_1, V_2^* \quad \text{in} \quad W_S(D_\varrho)\},$$
$$W_\pm = \{V:\ V \in W_\pm(D_\varrho) \quad \text{for some} \quad \varrho > 0\},$$

we state it as follows

THEOREM 8.2. *$W_\pm \subset W_H$. Let $V \in W_H$ and $[K^+, K^-]$ be its far field pattern. Then $V \in W_\pm$ if and only if $K^+, K^- \in H$.*

PROOF. The assertion $W_\pm \subset W_H$ is contained in Corollary 3.2. If $V \in W_\pm$ and its corresponding summands V_1, V_2 have far field patterns K_1, K_2, then $K^+ = K_1$, $K^- = K_2$ are in H by Corollary 3.1. Conversely, if $K^- \in H$, let V_1 and V_2^* be the wave functions in W_S with far field patterns K^+, $(K^-)^*$, respectively. Then V, $V_1 + V_2 \in W_H$ and have the same far field pattern $[K^+, K^-]$. Hence $V = V_1 + V_2 \in W_\pm$.

Theorem 8.2 implies

COROLLARY 8.1. *Let $V \in W(D_\varrho)$ and have the expansion* (1.4). *Then $V \in W_\pm(D_\varrho)$ if and only if*

$$\limsup_{n\to\infty} 2\left[n!\left(\sum_{j=1}^{N} |a_{nj}|^2 + |b_{nj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1/n} \leqq \varrho \tag{8.5}$$

or equivalently, for $\varrho' > \varrho$,

$$\limsup_{n\to\infty} 2\left[n!\left(\lim_{r\to\infty} r^{-1} \int_{\varrho' \leqq |x| \leqq r} \left| \int_U V(ru')\, P_n(p; u\cdot u')\, du \right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1/n} \leqq \varrho. \tag{8.6}$$

PROOF. By (2.11) and Theorem 6b, $K^+ \in H_\varrho$ if and only if

$$\limsup_{n\to\infty} 2\left[n!\left(\sum_{j=1}^{N} |a_{nj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1/n} \leqq \varrho$$

and a similar remark, in which b_{nj} replaces a_{nj}, is valid for K^-. Since

$$\max\left[\sum_{j=1}^{N} |a_{nj}|^2,\ \sum_{j=1}^{N} |b_{nj}|^2\right] \leqq \sum_{j=1}^{N} \left(|a_{nj}|^2 + |b_{nj}|^2\right) \leqq 2\max\left[\sum_{j=1}^{N} |a_{nj}|^2,\ \sum_{j=1}^{N} |b_{nj}|^2\right],$$

the assertion concerning (8.5) is clear.

We have [*10*, p. 242]

$$r^{\frac{1}{2}(p-1)} \int_U V(ru')\, P_n(p; u\cdot u')\, du' = (\omega_p/N)\,(\tfrac{1}{2}\pi r)^{\frac{1}{2}}\, i^n \sum_{j=1}^{N} [a_{nj} H_\mu^1(r) + b_{nj} H_\mu^2(r)]\, K_{nj}(u),$$

whence

$$\int_U \left| \int_U V(ru')\, P_n(p; u\cdot u')\, du' \right|^2 r^{p-1}\, du = (\omega_p/N)^2 \sum_{j=1}^{N} (\tfrac{1}{2}\pi r)\, |a_{nj} H_\mu^1(r) + b_{nj} H_\mu^2(r)|^2.$$

Thus

$$r^{-1} \int_{\varrho' \leqq |x| \leqq r} \left| \int_U V(ru')\, P_n(p; u\cdot u')\, du' \right|^2 dx = (\omega_p/N)^2 \sum_{j=1}^{N} r^{-1} \int_{\varrho'}^{r} (\tfrac{1}{2}\pi t)\, |a_{nj} H_\mu^1(t) + b_{nj} H_\mu^2(t)|^2\, dt.$$

In view of the limit relations (2.10) and $(N/\omega_p)^{1/n} = (N(p; n)/\omega_p)^{1/n} \to 1$ as $n \to \infty$, condition (8.6) is equivalent to (8.5).

References

[1] Atkinson, F. V.: On Sommerfeld's radiation condition. Philosophical Magazine **40**, 645–651 (1949).

[2] Boas, R. P.: Entire Functions. New York: Academic Press 1954.

[3] Bochner, S., and W. T. Martin: Several Complex Variables. Princeton: Princeton University Press 1948.

[4] Erdélyi, A. (editor): Higher Transcendental Functions, vol. II. New York: McGraw-Hill 1953.

[5] Garabedian, P. R.: An integral equation governing electromagnetic waves. Quart. Appl. Math. **12**, 428–433 (1955).

[6] Hartman, P., and A. Wintner: On non-conservative linear oscillators of low frequency. Amer. J. Math. **70**, 529–539 (1948).

[7] Hartman, P.: On solutions of $\Delta V + V = 0$ in an exterior region. Math. Z. **71**, 251–257 (1959).

[8] John, F.: Seminar: Recent developments in the theory of wave propagation. Lectures given in 1949–1950, Sect. III, Appendix, New York University 1955, mimeographed notes.

[9] Magnus, W.: Fragen der Eindeutigkeit und des Verhaltens im unendlichen für Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$. Abhandl. Math. Sem. Hamburg. **16**, 77–94 (1949).

[10] Müller, C.: Über die ganzen Lösungen der Wellengleichung. (Nach einem Vortrag von G. Herglotz.) Math. Annalen **124**, 235–264 (1952).

[11] Müller, C.: Radiation patterns and radiation fields. J. Rat. Mech. Anal. **4**, 235–246 (1955).

[12] Müller, C.: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Berlin: Springer 1957.

[13] Owens, O. G.: A characterization of the everywhere regular solution of the reduced wave equation. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 388–399 (1958).

[14] Owens, O. G.: A characterization in E^3 of the everywhere regular solution of the reduced wave equation. Duke Math. J. **27**, 81–90 (1960).

[15] Rellich, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jahresber. Dtsch. Mathematiker-Verein. **53**, 57–65 (1943).

[16] Schwartz, L.: Théorie des distributions, vol. I. Paris: Hermann 1950.

[17] Watson, G. N.: Theory of Bessel functions, 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press 1944.

[18] Watson, G. N.: Bessel functions and Kapteyn series. Proc. London Math. Soc. (2) **16**, 150–174 (1917).

[19] Weyl, H.: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. Annalen d. Physik **60**, 481–500 (1919) (Selecta, pp. 193–210).

[20] Wilcox, C. H.: A generalization of theorems of Rellich and Atkinson. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 271–276 (1956).

[21] Wilcox, C. H.: Spherical means and radiation conditions. Arch. Rational Mech. Anal. **3**, 133–148 (1959).

[22] Zygmund, A.: Trigonometrical series. Warsaw 1935.

The Johns Hopkins University,

Mathematics Research Center, U. S. Army, and California Institute of Technology

(Eingegangen am 16. Mai 1960)

DEMBOWSKI, P.
Math. Zeitschr. 75, 256–270 (1961)

Kombinatorische Eigenschaften endlicher Inzidenzstrukturen

Von

PETER DEMBOWSKI

1. Einleitung. Unter einer *Inzidenzstruktur* soll hier — anders als bei PICKERT [8, S. 2] — eine Menge von „Punkten" und „Blöcken" (die manchmal irreführende Bezeichnung „Gerade" wird vermieden) mit beliebiger Inzidenzrelation verstanden werden; eine genaue Definition folgt in 2. Viele in der Literatur bisher untersuchte *endliche* Inzidenzstrukturen lassen sich zwanglos durch gewisse der folgenden Forderungen beschreiben:

(P_i) *Die Anzahl der mit jedem von i beliebigen Punkten inzidenten Blöcke ist von Null verschieden und nur von i abhängig* ($i=1, 2, \ldots$).

(B_j) *Die Anzahl der mit jedem von j beliebigen Blöcken inzidenten Punkte ist von Null verschieden und nur von j abhängig* ($j=1, 2, \ldots$).

Bezeichnet b_i die Anzahl der Blöcke durch je i Punkte und p_j die Anzahl der Punkte auf je j Blöcken, so sind z. B. die endlichen projektiven Ebenen gerade die (P_2) und (B_2) mit $b_2=p_2=1$ erfüllenden endlichen Inzidenzstrukturen, und die ausgearteten Ebenen lassen sich aus ihnen etwa durch die zusätzliche Forderung von (B_1) mit $p_1>2$ ausscheiden. Die von WITT [11] untersuchten *Steiner-Systeme* (vgl. auch PICKERT [8, S. 286]) sind genau die (B_1) und ein (P_n) mit $n>1=b_n$ erfüllenden endlichen Inzidenzstrukturen, und die in der Statistik auftretenden *Blockpläne* (PICKERT [8, S. 287], dasselbe wie balanced incomplete block design, vgl. z. B. BOSE [1]) erfüllen (B_1) und (P_2).

In der vorliegenden Arbeit werden die zwischen den (P_i) und (B_j) bestehenden logischen Abhängigkeiten und daraus sich ergebende Eigenschaften der zugehörigen Inzidenzstrukturen untersucht. Da (P_i) und (B_j) für $i>p_0$ und $j>b_0$ natürlich trivial erfüllt sind (p_0 und b_0 bezeichnen die Anzahlen aller Punkte bzw. aller Blöcke), kann man sich auf die Fälle $1\leqq i\leqq p_0$ und $1\leqq j\leqq b_0$ beschränken. Die Frage nach den Abhängigkeiten zwischen diesen (P_i) und (B_j) läßt sich nun bei Erfülltsein von wenigstens einem der Axiome (P_1), (B_1) befriedigend beantworten: man zeigt leicht, daß aus (B_1) und (P_n) immer (P_1), …, (P_{n-1}) folgen, und den dualen Sachverhalt (Satz 2). Also ist jedes Steiner-System ein Blockplan, und jeder Blockplan ist eine *taktische Konfiguration* (MOORE [7], CARMICHAEL [4, chapter 14]), d. h. eine endliche Inzidenzstruktur mit (P_1) und (B_1). Zu jeder solchen taktischen Konfiguration $\mathfrak{K}$ existiert ein durch sie eindeutig bestimmtes Paar (m, n) natürlicher Zahlen (ihr „Typ") mit folgenden Eigenschaften: $\mathfrak{K}$ erfüllt (B_1), …, (B_m) und (P_1), …, (P_n), aber kein (P_i) mit $n<i\leqq p_0$ und kein (B_j) mit $m<j\leqq b_0$. Es

liegt nun nahe zu fragen, welche Zahlenpaare wirklich als Typen von taktischen Konfigurationen auftreten können. Wir zeigen, daß [abgesehen vom Typ (b_0, p_0) — in diesem später immer ausgeschlossenen Fall inzidiert jeder Punkt mit jedem Block] genau die Typen $(1, n)$, $(n, 1)$ und (n, n) tatsächlich vorkommen (Satz 4). Für den Fall $n>1$ ist Typ $(1, n)$ mit $b_0>p_0$ äquivalent, dual dazu Typ $(n, 1)$ mit $p_0>b_0$, und folglich Typ (n, n) mit $b_0=p_0$ (Folgerung von Satz 3, man vergleiche hierzu FISHER [5], BOSE [2], RYSER [9]). Diese Klassifikation der taktischen Konfigurationen nach ihren Typen ist natürlich recht grob, z. B. hat die zur Zeit völlig unübersehbare Fülle der symmetrischen Blockpläne (PICKERT [8, S. 288]) mit $b_1-b_2>1$ (dazu gehören u. a. sämtliche endlichen projektiven Ebenen) den gemeinsamen Typ $(2, 2)$. Um so überraschender ist die Tatsache, daß diese Fülle schon für $n=3$ völlig verschwindet: Alle (nichttrivialen, s. o.) taktischen Konfigurationen vom Typ (n, n) mit $n>2$ sind isomorph zu der mit $n+1$ Punkten und den sämtlichen n-elementigen Punktmengen als Blöcken (Satz 5). Die ungleich schwierigere Frage, ob ein entsprechender Satz auch im unsymmetrischen Fall gilt, d. h. ob es eine natürliche Zahl k derart gibt, daß jede taktische Konfiguration vom Typ $(1, n)$ mit $n>k$ die Eigenschaft $b_1=n$ hat, bleibt offen. Nach WITT [11] müßte ein solches k jedenfalls $\geqq 5$ sein.

Die Beweise aller Sätze dieser Arbeit beruhen auf dem alten Gedanken, gewisse Mengen von inzidenten Paaren auf zwei verschiedene Weisen abzuzählen. Bei dieser Idee ist die Freiheit, die man in der Auswahl der abzuzählenden Mengen hat, anscheinend bisher nicht immer genügend beachtet worden. Hier ergeben sich aus dem für die ganze Arbeit fundamentalen Lemma 1 (S. 260) unter anderem auch einige überraschend einfache Herleitungen bekannter Resultate; es sei hier nur auf den kurzen Beweis der Folgerung aus dem Hilfssatz von S. 269 hingewiesen, ein Ergebnis, das auch von MAJUMDAR durch längere Operationen mit Inzidenzmatrizen gewonnen worden ist [6, theorem 1]. Die Inzidenzmatrizen werden hier nirgends herangezogen.

Außer den erwähnten Sätzen über taktische Konfigurationen hat das grundlegende Lemma 1 noch viele weitere Konsequenzen, von denen hier noch die Ungleichungen (3.6) für die Invarianten b_i, p_i einer beliebigen endlichen Inzidenzstruktur hervorgehoben seien [diese Invarianten werden in 2 ohne die Axiome (P_i), (B_i) so als Mittelwerte erklärt, daß sie im Falle der Gültigkeit dieser Axiome die oben erklärte Bedeutung erhalten]. Daß diese Ungleichungen genau bei Gültigkeit von (B_1) und (P_1) alle zu Gleichungen werden (Satz 1), macht die Sonderstellung dieser Axiome unter den übrigen (P_i), (B_i) deutlich, die sich auch aus den an die Sätze 2 und 3 anschließenden Bemerkungen ergibt und die der späteren Beschränkung der Untersuchung auf taktische Konfigurationen Natürlichkeit verleiht.

2. Endliche Inzidenzstrukturen. Eine *Inzidenzstruktur* ist ein Tripel $\mathfrak{I}=(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ von Mengen mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}=\emptyset \quad \text{und} \quad I\subseteq\mathfrak{P}\times\mathfrak{B}.$$

Die Elemente von $\mathscr{P}$ heißen *Punkte*, die von $\mathscr{B}$ *Blöcke*, und die von I *inzidente Paare*. In dieser Arbeit werden nur *endliche* Inzidenzstrukturen betrachtet, d.h. solche, bei denen sowohl $\mathscr{P}$ als auch $\mathscr{B}$, und deshalb auch I, endliche Mengen sind. Wir verabreden für alles weitere folgende Bezeichnungen: Punkte werden durch kleine, Blöcke durch große lateinische Buchstaben bezeichnet, Mengen von Punkten bzw. Mengen von Blöcken im allgemeinen durch kleine bzw. große deutsche Buchstaben; nur für die Mengen *aller* Punkte bzw. *aller* Blöcke behalten wir die Bezeichnungen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{B}$ bei. Striche bezeichnen Komplementärmengen:

$$\mathfrak{p}' = \mathscr{P} - \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{B}' = \mathscr{B} - \mathfrak{B}.$$

Statt $(p, B) \in I$ schreiben wir auch $p\,I\,B$ oder $B\,I\,p$, und für diesen Sachverhalt werden die üblichen Sprechweisen wie „p und B sind inzident", „p liegt auf B", „B geht durch p" benutzt. Weiter wird $\mathfrak{p}\,I\,\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}\,I\,\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{p} \times \mathfrak{B} \subseteqq I$ geschrieben, Absolutstriche bezeichnen wie üblich Mächtigkeiten von Mengen.

Ist $\mathfrak{B}$ eine beliebige Block- und $\mathfrak{p}$ eine beliebige Punktmenge, so bedeutet $[\mathfrak{B}, \mathfrak{p}]$ die Anzahl aller $B \in \mathfrak{B}$ mit $B\,I\,\mathfrak{p}$, und $[\mathfrak{p}, \mathfrak{B}]$ ist dual erklärt. Besonders häufig kommen die Zahlen $[\mathscr{B}, \mathfrak{p}]$ und $[\mathscr{P}, \mathfrak{B}]$ vor; dafür schreiben wir kürzer $[\mathfrak{p}]$ bzw. $[\mathfrak{B}]$, also:

$[\mathfrak{p}]$ = *Anzahl der mit jedem* $p \in \mathfrak{p}$ *inzidenten Blöcke.* | $[\mathfrak{B}]$ = *Anzahl der mit jedem* $B \in \mathfrak{B}$ *inzidenten Punkte.*

Diese Bezeichnungsweise ist insofern nicht ganz präzise, als das Symbol $[\emptyset]$ sowohl die Anzahl aller Punkte als auch die aller Blöcke bedeuten kann, je nachdem ob $[\mathscr{P}, \emptyset]$ oder $[\mathscr{B}, \emptyset]$ gemeint ist. Hieraus werden aber im späteren Text nirgends Unklarheiten entstehen.

Aus diesen Festsetzungen ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Beziehungen:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} [\mathfrak{B}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{B}', \mathfrak{p}] = [\mathfrak{p}], & [\mathfrak{p}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{p}', \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}], \\ [\mathfrak{B}, \emptyset] = |\mathfrak{B}|, & [\mathfrak{p}, \emptyset] = |\mathfrak{p}|, \qquad [\emptyset, \mathfrak{B}] = [\emptyset, \mathfrak{p}] = 0, \end{cases}$$

für beliebige $\mathfrak{B} \subseteqq \mathscr{B}$ und $\mathfrak{p} \subseteqq \mathscr{P}$.

Zu jeder endlichen Inzidenzstruktur $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{B}, I)$ definieren wir die folgenden *Invarianten* b_i *und* p_j $(i = 0, \ldots, |\mathscr{P}|,\ j = 0, \ldots, |\mathscr{B}|)$: b_i ist der Mittelwert der Zahlen $[\mathfrak{x}]$, wobei $\mathfrak{x}$ alle Punktmengen mit $|\mathfrak{x}| = i$ durchläuft, und p_j ist dual erklärt. Insbesondere ist $b_0 = |\mathscr{B}|$ die Anzahl aller Blöcke und $p_0 = |\mathscr{P}|$ die Anzahl aller Punkte, und

$$(2.2) \quad b_i = \binom{p_0}{i}^{-1} \sum_{|\mathfrak{x}| = i} [\mathfrak{x}], \quad i = 1, \ldots, p_0; \qquad p_j = \binom{b_0}{j}^{-1} \sum_{|\mathfrak{X}| = j} [\mathfrak{X}], \quad j = 1, \ldots, b_0.$$

Die zwischen den b_i und p_j bestehenden Beziehungen werden im nächsten Paragraphen behandelt.

Mit Hilfe der Zahlen b_i und p_j lassen sich die in der Einleitung ausgesprochenen Axiome (P_i) und (B_j) jetzt kürzer und präziser folgendermaßen formulieren:

(P_i) *Es ist* $b_i > 0$, *und für jedes* $\mathfrak{x}$ *mit* $\lvert\mathfrak{x}\rvert = i$ *gilt* $[\mathfrak{x}] = b_i$ $(i = 1, \ldots, p_0)$.	(B_j) *Es ist* $p_j > 0$, *und für jedes* $\mathfrak{X}$ *mit* $\lvert\mathfrak{X}\rvert = j$ *gilt* $[\mathfrak{X}] = p_j$ $(j = 1, \ldots, b_0)$.

Bei Gültigkeit von (P_i) bzw. (B_j) haben die Zahlen $[\mathfrak{x}]$ mit $\lvert\mathfrak{x}\rvert = i$ bzw. die Zahlen $[\mathfrak{X}]$ mit $\lvert\mathfrak{X}\rvert = j$ also die Streuung Null um ihren von Null verschiedenen Mittelwert. (P_0) und (B_0) bedeuten nur, daß die Mengen $\mathscr{B}$ bzw. $\mathscr{P}$ nicht leer sind; diese beinahe selbstverständliche Voraussetzung machen wir von jetzt an immer, ohne sie besonders zu erwähnen. Die möglichen Abhängigkeiten zwischen den (P_i) und den (B_j) werden in den Paragraphen 4 und 5 erörtert werden.

Für eine spätere Anwendung brauchen wir noch den folgenden Begriff. Jede endliche Inzidenzstruktur $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{B}, I)$ bestimmt in natürlicher Weise die folgenden *abgeleiteten Strukturen* $\mathscr{I}_{ij} = (\mathscr{P}_i, \mathscr{B}_j, I_{ij})$, $i = 1, \ldots, p_0$, $j = 1, \ldots, b_0$: $\mathscr{P}_i$ ist die Menge der i-elementigen Teilmengen von $\mathscr{P}$, weiter $\mathscr{B}_j$ die der j-elementigen Teilmengen von $\mathscr{B}$; und $\mathfrak{p} I_{ij} \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_i$ und $\mathfrak{B} \in \mathscr{B}_j$, bedeutet dasselbe wie $\mathfrak{p} I \mathfrak{B}$ (nämlich $\mathfrak{p} \times \mathfrak{B} \subseteq I$, vgl. S. 258). Natürlich ist $\mathscr{I}_{11}$ dasselbe wie die Ausgangsstruktur $\mathscr{I}$. Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_i$ wird die Anzahl der $\mathfrak{B} \in \mathscr{B}_j$ mit $\mathfrak{p} I_{ij} \mathfrak{B}$ durch $[\mathfrak{p}]_j$ bezeichnet, da wir die Bezeichnung $[\mathfrak{p}]$ für die Anzahl der $B \in \mathscr{B}$ mit $B I \mathfrak{p}$ beibehalten wollen, und $[\mathfrak{B}]_i$ wurd dual definiert. Natürlich ist $[\mathfrak{p}]_1 = [\mathfrak{p}]$ und $[\mathfrak{B}]_1 = [\mathfrak{B}]$, und allgemeiner gilt

$$[\mathfrak{p}]_j = \binom{[\mathfrak{p}]}{j}, \qquad [\mathfrak{B}]_i = \binom{[\mathfrak{B}]}{i}, \tag{2.3}$$

wie aus der Definition von $\mathscr{I}_{ij}$ sofort folgt.

3. Die Invarianten-Ungleichungen. In einer beliebigen endlichen Inzidenzstruktur seien eine Blockmenge $\mathfrak{B}$ und eine Punktmenge $\mathfrak{p}$ gegeben, die auch leer sein dürfen. Dann läßt sich die Anzahl der inzidenten Paare (x, X) mit $x I \mathfrak{B}$ und $X I \mathfrak{p}$ auf zwei verschiedene Weisen abzählen: Auf einem Block X, der mit jedem Punkt von $\mathfrak{p}$ inzidiert, liegen genau $[\mathfrak{B} \cup \{X\}]$ verschiedene mit jedem Block von $\mathfrak{B}$ inzidente Punkte. Also ist die fragliche Anzahl gleich

$$\sum_{X I \mathfrak{p}} [\mathfrak{B} \cup \{X\}].$$

Von den $[\mathfrak{p}]$ verschiedenen Summanden dieser Summe haben $[\mathfrak{B}, \mathfrak{p}]$, nämlich die mit $X \in \mathfrak{B}$, den Wert $[\mathfrak{B}]$, und deshalb ist die Summe gleich

$$[\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{p}] + \sum_{\mathfrak{p} I X \in \mathfrak{B}'} [\mathfrak{B} \cup \{X\}].$$

Die duale Abzählung liefert ein analoges Resultat, und damit ist der folgende wichtige Hilfssatz bewiesen:

Lemma 1. *Für jede Blockmenge $\mathfrak{B}$ und jede Punktmenge $\mathfrak{p}$ einer beliebigen endlichen Inzidenzstruktur gilt:*

$$(3.1)\qquad [\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{B},\mathfrak{p}]+\sum_{\mathfrak{p}\,I\,X\in\mathfrak{B}'}[\mathfrak{B}\cup\{X\}]=[\mathfrak{p}]\,[\mathfrak{p},\mathfrak{B}]+\sum_{\mathfrak{B}\,I\,x\in\mathfrak{p}'}[\mathfrak{p}\cup\{x\}].$$

Wie üblich sind dabei leere Summen gleich Null zu setzen.

Die fundamentale Gleichung (3.1) wird später — für verschiedene spezielle Auswahlen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{p}$ — mehrfach angewandt werden. Wir geben gleich einige Folgerungen. Für $\mathfrak{B}=\mathfrak{p}=\emptyset$ geht (3.1) in $\sum[X]=\sum[x]$ über, wobei über alle Blöcke X und alle Punkte x zu summieren ist. Faßt man diese Gleichung als eine Beziehung für die abgeleitete Struktur $\mathfrak{S}_{ij}$ anstatt für $\mathfrak{S}$ auf, so hat man $[X]$ nach (2.3) durch $\binom{[\mathfrak{X}]}{i}$ und $[x]$ durch $\binom{[\mathfrak{x}]}{j}$ zu ersetzen, mit $|\mathfrak{x}|=i$ und $|\dot{\mathfrak{X}}|=j$. Man erhält also die allgemeinere Beziehung

$$(3.2)\qquad \sum_{|\mathfrak{X}|=j}\binom{[\mathfrak{X}]}{i}=\sum_{|\mathfrak{x}|=i}\binom{[\mathfrak{x}]}{j}\qquad i=0,\dots,p_0,\quad j=0,\dots,b_0.$$

(Daß das auch für $i=0$ und $j=0$ richtig ist, folgt noch nicht aus dem vorhergehenden, läßt sich aber leicht direkt verifizieren.) Für $j=1$ bzw. $i=1$ erhält man aus (3.2) unter Beachtung der Definitionen (2.2) noch die für später wichtigen Gleichungen:

$$(3.3)\qquad \sum_{X\in\mathfrak{S}}\binom{[X]}{i}=\binom{p_0}{i}b_i,\quad i=0,\dots,p_0,\qquad \sum_{x\in\mathfrak{S}}\binom{[x]}{j}=\binom{b_0}{j}p_j,\quad j=0,\dots,b_0.$$

Ohne Zuhilfenahme der abgeleiteten Strukturen lassen sich (3.2) oder (3.3) nur mühsam aus Lemma 1 herleiten.

Als weitere Folgerung aus (3.1) beweisen wir noch die beiden nachstehenden Gleichungen, die wir später mit (3.3) kombinieren werden:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{X\in\mathfrak{S}}\binom{[X]}{i}[X]=\binom{p_0}{i}\,[(p_0-i)\,b_{i+1}+i\,b_i], & i=0,\dots,p_0-1,\\[2ex] \displaystyle\sum_{x\in\mathfrak{S}}\binom{[x]}{j}[x]=\binom{b_0}{j}\,[(b_0-j)\,p_{j+1}+j\,p_j], & j=0,\dots,b_0-1. \end{cases}$$

Beweis. Aus Dualitätsgründen genügt es, die Richtigkeit der ersten Gleichung (3.4) zu zeigen. Sei $\mathfrak{x}$ eine beliebige Punktmenge mit $0\leqq|\mathfrak{x}|=i<p_0$. Dann liefert (3.1) mit $\mathfrak{B}=\emptyset$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{x}$:

$$\sum_{X\,I\,\mathfrak{x}}[X]=i\,[\mathfrak{x}]+\sum_{x\in\mathfrak{x}'}[\mathfrak{x}\cup\{x\}].$$

Die $\binom{p_0}{i}$ verschiedenen solchen Gleichungen, die man für alle $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}|=i$ erhält, werden nun addiert. Da zunächst

$$\sum_{|\mathfrak{x}|=i}\Big(\sum_{X\,I\,\mathfrak{x}}[X]\Big)=\sum_{X\in\mathfrak{S}}\binom{[X]}{i}[X]$$

ist (jedes $[X]$ muß ebenso oft gezählt werden, wie es verschiedene $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| = i$ und $X I \mathfrak{x}$ gibt), da weiter nach (2.2)

$$\sum_{|\mathfrak{x}|=i} [\mathfrak{x}] = b_i \binom{p_0}{i}$$

ist, und da schließlich, wieder wegen (2.2),

$$\sum_{|\mathfrak{x}|=i} \Big(\sum_{x \in \mathfrak{x}} [\mathfrak{x} \cup \{x\}] \Big) = (i+1) \sum_{|\mathfrak{y}|=i+1} [\mathfrak{y}] = (i+1)\, b_{i+1} \binom{p_0}{i+1}$$

gilt (jedes $[\mathfrak{y}]$ mit $|\mathfrak{y}| = i+1$ muß ebenso oft gezählt werden, wie $\mathfrak{y}$ auf verschiedene Weisen in der Form $\mathfrak{x} \cup \{x\}$ darstellbar ist, also für jedes der $i+1$ verschiedenen $x \in \mathfrak{y}$ je einmal), ergibt die Summation:

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}} \binom{[X]}{i} [X] = i\, b_i \binom{p_0}{i} + (i+1)\, b_{i+1} \binom{p_0}{i+1}.$$

Hieraus ergibt sich nun (3.4) durch triviale Umformungen der rechten Seite.

Wir kommen jetzt zum eigentlichen Thema dieses Paragraphen, nämlich zu den zwischen den Invarianten b_i und p_j einer endlichen Inzidenzstruktur bestehenden Beziehungen. Wir zeigen zuerst: *Es gilt*

(3.5) $b_i \geqq b_{i+1}$ *für* $i = 0, \ldots, p_0 - 1$ *und* $p_j \geqq p_{j+1}$ *für* $j = 0, \ldots, b_0 - 1$,

und Gleichheit herrscht genau für diejenigen i bzw. j, für welche es keinen Block B mit $i \leqq [B] < p_0$ bzw. keinen Punkt p mit $j \leqq [p] < b_0$ gibt.

Beweis. Sei $0 \leqq i < p_0$ und $b_i \leqq b_{i+1}$. Dann folgt aus (3.4) und (3.3):

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}} \binom{[X]}{i} [X] = \binom{p_0}{i} [(p_0 - i)\, b_{i+1} + i\, b_i] \geqq \binom{p_0}{i} p_0 b_i = p_0 \sum_{X \in \mathfrak{B}} \binom{[X]}{i}.$$

Aber $p_0 \geqq [X]$ für alle $X \in \mathfrak{B}$, also kann nur Gleichheit herrschen. Daraus folgt die Unmöglichkeit von $b_i < b_{i+1}$, so daß die Richtigkeit der Behauptung $b_i \geqq b_{i+1}$ bewiesen ist. Weiter ergibt sich, daß bei $b_i = b_{i+1}$ die Gleichung

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}} (p_0 - [X]) \binom{[X]}{i} = 0$$

gelten muß; umgekehrt hat diese Gleichung, wieder wegen (3.3) und (3.4), die Gleichheit von b_i und b_{i+1} zur Folge. Da die Glieder dieser Summe alle nichtnegativ sind, müssen sie einzeln verschwinden; es gilt also: Genau dann ist $b_i = b_{i+1}$, wenn $p_0 = [X]$ oder $\binom{[X]}{i} = 0$ für jeden Block X gilt. Aber die zweite Alternative ist mit $[X] < i$ äquivalent. Damit (und durch duale Schlüsse) sind alle Behauptungen über (3.5) bewiesen.

Eine weitere, und für das spätere besonders wichtige, Kette von Ungleichungen liefert der folgende Satz:

Satz 1. *Die zu einer beliebigen endlichen Inzidenzstruktur gehörigen Invarianten b_i und p_j genügen den folgenden Ungleichungen:*

$$(3.6)\qquad \begin{cases} b_i(p_1 - i) \leqq b_{i+1}(p_0 - i), \\ i = 0, \ldots, p_0 - 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} p_j(b_1 - j) \leqq p_{j+1}(b_0 - j), \\ j = 0, \ldots, b_0 - 1. \end{cases}$$

Ist das Axiom (B_1) erfüllt, so gilt für alle i sogar Gleichheit. Ist (B_1) nicht erfüllt, so gilt Gleichheit genau für $i = 0$ und $i > \max\left([X], X \in \mathfrak{B}\right)$.

Ist das Axiom (P_1) erfüllt, so gilt für alle j sogar Gleichheit. Ist (P_1) nicht erfüllt, so gilt Gleichheit genau für $j = 0$ und $j > \max\left([x], x \in \mathfrak{P}\right)$.

Beweis. Aus Dualitätsgründen genügt es wieder, die Behauptungen über die erste der Ungleichungen (3.6) zu beweisen. Aus den Folgerungen (3.3) und (3.4) von Lemma 1 ergibt sich unmittelbar

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}} \binom{[X]}{i} ([X] - p_1) = \binom{p_0}{i} [(p_0 - i)\, b_{i+1} - (p_1 - i)\, b_i]$$

für jedes in Frage kommende i. Nun ist p_1 der Mittelwert der nicht negativen Zahlen $[X]$, und $\binom{[X]}{i}$ ist eine für alle $[X]$ erklärte und dort monoton steigende Funktion von $[X]$. Da $\binom{p_0}{i}$ positiv ist, ergibt sich die Behauptung also aus dem folgenden Hilfssatz, den wir der Vollständigkeit halber hier beweisen wollen, obwohl er gar nicht tief liegt und auch mit endlichen Inzidenzstrukturen nicht viel zu tun hat:

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen und f eine auf den x_i erklärte, dort nichtnegative und (schwach) monoton steigende reellwertige Funktion. Dann gilt:

$$(3.7)\qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - \bar{x}) \geqq 0,$$

wobei $\bar{x}$ den Mittelwert $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$ der x_i bedeutet; Gleichheit für (3.7) tritt genau in den folgenden Fällen ein:

(i) $x_i = \bar{x}$ *für alle* i, (ii) $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$.

Beweis. Daß (3.7) in den Fällen (i) und (ii) mit dem Gleichheitszeichen gilt, ist trivial. Also bleibt zu zeigen: Gilt weder (i) noch (ii), so ist der Ausdruck (3.7) positiv. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die x_i als der Größe nach geordnet angenommen werden:

$$x_1 \geqq \cdots \geqq x_n.$$

Da (i) nicht gilt, ist $n > 1$, und es gibt ein wohlbestimmtes r mit $1 \leqq r < n$ derart, daß $x_i \geqq \bar{x}$ für $i = 1, \ldots, r$ und $x_i < \bar{x}$ für $i = r+1, \ldots, n$ gilt. Die Summe in (3.7) ist dann gleich

$$(a)\qquad \sum_{i=1}^{r} f(x_i)\,(x_i - \bar{x}) - \sum_{i=r+1}^{n} f(x_i)\,(\bar{x} - x_i),$$

und diese beiden Summen haben nur nichtnegative Summanden. Wegen der Monotonie von f gilt $f(x_i) \geqq f(x_r)$ für $i = 1, \ldots, r$ und $f(x_{r+1}) \geqq f(x_i)$ für $i = r+1, \ldots, n$, und folglich ist der Ausdruck (a) jedenfalls nicht kleiner als

$$\text{(b)} \qquad f(x_r) \sum_{i=1}^{r} (x_i - \bar{x}) - f(x_{r+1}) \sum_{i=r+1}^{n} (\bar{x} - x_i).$$

Ist nun $f(x_r) = f(x_{r+1})$, so gilt sogar (a) > (b), da sonst der Fall (ii) vorläge. In diesem Falle sind wir also fertig. Ist aber $f(x_r) > f(x_{r+1})$, so ist der Ausdruck (b) größer als

$$f(x_{r+1}) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0,$$

und folglich ist die Behauptung auch dann richtig. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Also gelten die Ungleichungen (3.6) immer. Das Axiom (B_1) bedeutet gerade das Eintreten des Falles (i) des Hilfssatzes, und genau für $i = 0$ oder $i > \max\left([X], X \in \mathfrak{B}\right)$ sind alle $\binom{[X]}{i}$ gleich (nämlich $= 1$ bzw. $= 0$), d.h. genau für diese i tritt Fall (ii) ein. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Die Beziehungen (3.6) werden später vor allem für $i, j = 0, 1$ und bei Gültigkeit von (B_1) und (P_1) gebraucht. Wir notieren diese speziellen Gleichungen noch einmal gesondert: *Bei Gültigkeit von* (B_1) *und* (P_1) *ist*

$$\text{(3.8)} \qquad b_0 p_1 = b_1 p_0, \qquad b_1(p_1 - 1) = b_2(p_0 - 1), \qquad p_1(b_1 - 1) = p_2(b_0 - 1).$$

4. Die Axiome (P_i) und (B_j). Wir kommen jetzt zu der Frage nach den zwischen den Axiomen (P_i) und (B_j) bestehenden Abhängigkeiten. Für den Fall der Gültigkeit von (P_1) oder (B_1) gibt der folgende (im wesentlichen auch von SPROTT [*10*, S. 753] bewiesene) Satz eine befriedigende Antwort:

Satz 2. *Aus* (B_1) *und* (P_n), $0 < n \leqq p_0$, *folgen* $(P_1), \ldots, (P_{n-1})$. | *Aus* (P_1) *und* (B_m), $0 < m \leqq b_0$, *folgen* $(B_1), \ldots, (B_{m-1})$.

Es genügt wieder, die erste Behauptung zu beweisen, und dazu ist es nur notwendig zu zeigen, daß (P_k) aus (B_1) und (P_{k+1}) folgt $(k = n-1, \ldots, 1)$: Wegen $k+1 \leqq n \leqq p_0$ existiert sicher eine Punktmenge $\mathfrak{p}$ mit $|\mathfrak{p}| = k$. Für dieses $\mathfrak{p}$ und die leere Blockmenge $\mathfrak{B} = \emptyset$ liefert die Gleichung (3.1) von Lemma 1:

$$[\mathfrak{p}]\,(p_1 - k) = b_{k+1}(p_0 - k),$$

denn wegen (B_1) ist $[X] = p_1$ für jedes $X \in \mathfrak{B}$, und wegen (P_{k+1}) ist $[\mathfrak{p} \cup \{x\}] = b_{k+1}$ für jedes $x \in \mathfrak{p}'$. Da wegen (P_{k+1}) sicher $p_1 > k$ ist, ist $[\mathfrak{p}]$ durch diese Gleichung eindeutig bestimmt, größer als Null und nur von $|\mathfrak{p}| = k$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängig. Also gilt (P_k) mit $b_k = [\mathfrak{p}]$, entsprechend Satz 1. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Die ausgearteten endlichen projektiven Ebenen zeigen, daß die Voraussetzung der Gültigkeit von (B_1) nicht weggelassen oder etwa durch die eines (B_m) mit $m < n$ oder ähnliches ersetzt werden darf. Daß man in vielen

Fällen aber auch ohne die Voraussetzung von (B_1) oder (P_1) aus gewissen (P_i), (B_j) andere folgern kann, zeigen die folgenden Überlegungen.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine Blockmenge mit $|\mathfrak{B}| = m-1 \geqq 0$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{\mathfrak{x} \, I \, \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{x}|=n}} \Big(\sum_{\mathfrak{x} \, I \, X \in \mathfrak{B}'} [\mathfrak{B} \cup \{X\}] \Big) = \sum_{X \in \mathfrak{B}'} \binom{[\mathfrak{B} \cup \{X\}]}{n} [\mathfrak{B} \cup \{X\}], \tag{4.1}$$

denn für jedes $X \in \mathfrak{B}'$ muß $[\mathfrak{B} \cup \{X\}]$ ebenso oft gezählt werden, wie es verschiedene $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| = n$ und $\mathfrak{x} \, I \, \mathfrak{B}$ gibt, die außerdem $\mathfrak{x} \, I \, X$ erfüllen, also genau $\binom{[\mathfrak{B} \cup \{X\}]}{n}$ mal. Ist nun (B_m) erfüllt, so nimmt (4.1) die einfachere Gestalt

$$\sum_{\substack{\mathfrak{x} \, I \, \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{x}|=n}} ([\mathfrak{x}] - m + 1) = \binom{p_m}{n} (b_0 - m + 1) \tag{4.2}$$

an, wie aus den Beziehungen (2.1) wegen der vorausgesetzten Eigenschaften der $\mathfrak{x}$ folgt. Aus (4.2) sowie aus der dazu dualen Beziehung ergibt sich nun unmittelbar der folgende Satz:

Erfüllt eine endliche Inzidenzstruktur die Axiome (B_m) und (P_n), so gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{[\mathfrak{B}]}{n} (b_n - m + 1) = \binom{p_m}{n} (b_0 - m + 1) \\ \textit{und} \\ \binom{[\mathfrak{p}]}{m} (p_m - n + 1) = \binom{b_n}{m} (p_0 - n + 1) \end{array} \right. \tag{4.3}$$

für jede Blockmenge $\mathfrak{B}$ mit $|\mathfrak{B}| = m-1$ und jede Punktmenge $\mathfrak{p}$ mit $|\mathfrak{p}| = n-1$ $(m, n > 0)$.

Diese Beziehungen zeigen, daß die Zahlen $[\mathfrak{B}]$ bzw. $[\mathfrak{p}]$ mit $|\mathfrak{B}| = m-1$ und $|\mathfrak{p}| = n-1$ bei Gültigkeit von (B_m) und (P_n) gewissen Gleichungen n-ten bzw. m-ten Grades genügen müssen, also höchstens n bzw. m verschiedener Werte fähig sind [vorausgesetzt allerdings, daß die Koeffizienten $b_n - m + 1$ bzw. $p_m - n + 1$ nicht verschwinden; aus diesem Grund kann man z.B. Satz 2 nicht ohne weiteres aus (4.3) herleiten]. Da diese Zahlen natürlich außerdem positiv und ganz sein müssen, kann man in manchen Fällen zeigen, daß statt n bzw. m tatsächlich nur ein Wert für $[\mathfrak{B}]$ bzw. $[\mathfrak{p}]$ möglich ist, so daß die Gültigkeit von (B_{m-1}) bzw. (P_{n-1}) folgt. Wir zeigen dies noch für die Fälle $m = 2$ und $n = 2$.

Aus (B_2) und (P_n) mit $n < p_2 + 1$ und $b_n > 1$ folgen (B_1) und $(P_1), \ldots, (P_{n-1})$.

Aus (P_2) und (B_m) mit $m < b_2 + 1$ und $p_m > 1$ folgen (P_1) und $(B_1), \ldots, (B_{m-1})$.

Wir brauchen wieder nur die erste Behauptung zu beweisen. Aus der zweiten Gleichung (4.3) mit $m = 2$ folgt, daß alle die Zahlen $[\mathfrak{p}]$ für $|\mathfrak{p}| = n-1$ der quadratischen Gleichung

$$(p_2 - n + 1)(x^2 - x) = b_n (b_n - 1)(p_0 - n + 1) \tag{4.4}$$

genügen. Diese Gleichung hat die Wurzeln $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4K}\right)$, mit

$$K = b_n(b_n - 1)(p_0 - n + 1)(p_2 - n + 1)^{-1}.$$

Aus den Voraussetzungen über p_2 und b_n folgt, daß K wohldefiniert und positiv ist. Eine der Wurzeln von (4.4) fällt also immer negativ aus, und es folgt

$$[\mathfrak{p}] = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4K}\right) > 0$$

unabhängig von $\mathfrak{p}$, und daher gilt (P_{n-1}). Da mit $p_2 - n + 1$ natürlich auch alle $p_2 - j + 1$ positiv sind und da weiter aus $b_n > 1$ wegen (3.5) auch $b_j > 1$ folgt $(j = 0, \ldots, n-1)$, kann man dieselbe Schlußweise fortgesetzt weiter anwenden und erhält nacheinander $(P_{n-2}), \ldots, (P_1)$. Aus Satz 2 ergibt sich dann noch die Gültigkeit von (B_1), und damit ist alles bewiesen.

Man kann die Beziehung (4.1), kombiniert mit Lemma 1, noch zum Beweis eines weiteren Satzes benutzen, der eine teilweise Antwort auf die Frage liefert, wie die Axiome (P_i) und (B_j) das Verhältnis der Punkteanzahl p_0 zur Blöckeanzahl b_0 beeinflussen. Der in (4.1) auftretende Ausdruck $\sum_{\mathfrak{x} I X \in \mathfrak{B}'} [\mathfrak{B} \cup \{X\}]$ mit $\mathfrak{x} I \mathfrak{B}$ und $|\mathfrak{x}| = n$ ist nach Lemma 1 und (2.1) gleich

$$n[\mathfrak{x}] - |\mathfrak{B}|[\mathfrak{B}] + \sum_{\mathfrak{B} I x \in \mathfrak{x}'} [\mathfrak{x} \cup \{x\}]$$

(hier ist wieder $|\mathfrak{B}|$ statt $m-1$ geschrieben), so daß (4.1) jetzt

$$n \sum_{\substack{\mathfrak{x} I \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{x}| = n}} [\mathfrak{x}] - |\mathfrak{B}|[\mathfrak{B}] \binom{[\mathfrak{B}]}{n} + \sum_{\substack{\mathfrak{x} I \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{x}| = n}} \left(\sum_{\mathfrak{B} I x \in \mathfrak{x}'} [\mathfrak{x} \cup \{x\}] \right) = \sum_{X \in \mathfrak{B}'} \binom{[\mathfrak{B} \cup \{X\}]}{n} [\mathfrak{B} \cup \{X\}]$$

liefert. Diese komplizierte Beziehung geht *bei Gültigkeit von* (P_n) *und* (P_{n+1}) *in*

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}'} \binom{[\mathfrak{B} \cup \{X\}]}{n} [\mathfrak{B} \cup \{X\}] = \binom{[\mathfrak{B}]}{n} [n(b_n - b_{n+1}) + [\mathfrak{B}](b_{n+1} - |\mathfrak{B}|)] \tag{4.5}$$

über, und damit läßt sich der erwähnte Satz beweisen. Er lautet:

Satz 3. *Gegeben sei eine endliche Inzidenzstruktur mit* $1 < p_0 > p_1 > 0$ *und* $1 < b_0 > b_1 > 0$.

Gilt (B_1) *und ein* (P_n) *mit* $n > 1$, *so ist* $b_0 \geqq p_0$. *Gleichheit herrscht genau dann, wenn ein* (B_m) *mit* $m > 1$ *erfüllt ist.*

Gilt (P_1) *und ein* (B_m) *mit* $m > 1$, *so ist* $p_0 \geqq b_0$. *Gleichheit herrscht genau dann, wenn ein* (P_n) *mit* $n > 1$ *erfüllt ist.*

Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen. Andere Beweise dafür, oder für Teile davon, sind von FISHER [5], BOSE [2], RYSER [9] und MAJUMDAR [6] gegeben worden.

Es sei B ein zunächst beliebiger Block und $\mathfrak{B} = \{B\}$, also $|\mathfrak{B}| = 1$. Da nach Voraussetzung (B_1) gilt, ist dann $[\mathfrak{B}] = p_1$. Weiter folgt aus Satz 2 und der Voraussetzung $n > 1$ die Gültigkeit von (P_1) und (P_2), so daß (4.5) mit $n = 1$ anwendbar ist. Es ergibt sich

$$\sum_{X \neq B} [B, X]^2 = p_1[b_1 - b_2 + p_1(b_2 - 1)].$$

Außerdem liefert Lemma 1 mit $\mathfrak{p}=\emptyset$ wegen (P_1) sofort

$$\sum_{X \neq B} [B, X] = p_1(b_1 - 1),$$

und daher gilt

$$(4.6) \quad \sum_{X \neq B} ([B, X] - p_2)^2 = p_1[b_1 - b_2 + p_1(b_2 - 1)] - 2p_1 p_2 (b_1 - 1) + p_2^2 (b_0 - 1).$$

Die rechte Seite von (4.6) ist nun aber, wie man mit Hilfe der wegen (P_1) und (B_1) anwendbaren Gleichungen (3.8) nachrechnet, gleich dem Ausdruck

$$(4.7) \quad \frac{p_1 b_1 (p_0 - p_1)^2 (b_0 - p_0)}{p_0 (p_0 - 1)(b_0 - 1)};$$

die Einzelheiten dieser etwas langwierigen, aber nicht schwierigen Rechnung seien dem Leser überlassen. Also ist (4.7) gleich der Quadratsumme in (4.6) und daher nicht negativ. Daraus folgt aber sofort, daß $b_0 \geqq p_0$ sein muß.

Ist nun ein (B_m) mit $m > 1$ erfüllt, so wegen Satz 2 auch (B_2), und dann sind alle $[B, X] = p_2$ (für $X \neq B$), so daß die Quadratsumme in (4.6) und damit auch (4.7) verschwindet. Dann folgt aber wegen der Voraussetzung $1 < p_0 > p_1 > 0$, daß $b_0 = p_0$ sein muß. Gilt aber kein (B_m) mit $m > 1$, so auch nicht (B_2), und es existieren vier Blöcke S, T, U, V mit $[S, T] \neq [U, V]$. Ist $[S, T] \neq [S, U]$, so setzen wir $B = S$; und ist $[S, T] = [S, U]$, so muß $[S, U] \neq [U, V]$ sein, und dann setzen wir $B = U$. Also läßt sich dann B jedenfalls so wählen, daß die $[B, X]$ mit $X \neq B$ nicht alle gleich sind. Dann ist die Quadratsumme in (4.6) und damit (4.7) aber positiv, und es folgt $b_0 > p_0$. Damit ist alles bewiesen. Der Beweis liefert zusätzlich die folgende Aussage:

Gilt (B_1) *und* (P_n) *mit* $n > 1$, *und ist* p_2 *ganzzahlig, so ist* $p_0(p_0 - 1)(b_0 - 1)$ *ein Teiler von* $p_1 b_1 (p_0 - p_1)^2 (b_0 - p_0)$.

Gilt (P_1) *und* (B_m) *mit* $m > 1$, *und ist* b_2 *ganzzahlig, so ist* $b_0(b_0 - 1)(p_0 - 1)$ *ein Teiler von* $b_1 p_1 (b_0 - b_1)^2 (p_0 - b_0)$.

Denn dann ist die linke Seite von (4.6) und deshalb auch (4.7) eine ganze Zahl. Diese Aussage ist natürlich nur bei Nichterfülltsein von (B_2) bzw. (P_2) interessant, aber aus der Ganzzahligkeit von p_2 bzw. b_2 brauchen (B_2) bzw. (P_2) ja keineswegs zu folgen.

Daß die Voraussetzungen $n > 1$ bzw. $m > 1$ in Satz 3 unentbehrlich sind, zeigen viele bekannte Beispiele. Auch die Voraussetzung von (B_1) bzw. (P_1) ist notwendig: es gibt ausgeartete projektive Ebenen mit $p_0 \neq b_0$; bei diesen ist $[X] = 1$ für alle Blöcke X, mit höchstens einer Ausnahme. In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz von DE BRUIJN und ERDÖS [3] interessant: *Aus* (P_2) *mit* $b_2 = 1$ *und* $[X] > 1$ *für jeden Block* X *folgt* $b_0 \geqq p_0$, *und Gleichheit gilt genau bei Erfülltsein von* (B_2). Dieser Satz zeigt, daß man unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen das Ergebnis von Satz 3 auch ohne das Axiom (B_1) bzw. (P_1) gewinnen kann. Daß die Voraussetzung $b_2 = 1$ in dem De Bruijn-Erdösschen Resultat wesentlich ist, zeigt das folgende triviale Beispiel: $|\mathscr{P}| = n > 2$, $|\mathscr{B}| = 2$, $|I| = |\mathscr{P} \times \mathscr{B}| - 1$. Hier gilt weder (P_1) noch (B_1), aber (B_2) und (P_n) sind erfüllt, ohne daß $b_0 = p_0$ ist.

5. Taktische Konfigurationen. Die bisher bewiesenen Sätze haben gezeigt, daß die Axiome (B_1) und (P_1) unter den übrigen (B_i) und (P_j) eine besonders wichtige Stellung einnehmen. Eine endliche Inzidenzstruktur, die (B_1) und (P_1) genügt, heißt *taktische Konfiguration* (MOORE [7], CARMICHAEL [4, chapter 14]); auf diese beschränken wir uns in diesem letzten Paragraphen ausschließlich. Dabei soll noch der triviale Fall ausgeschlossen werden, bei dem jedes Element mit jedem andersartigen inzidiert; wir verlangen also

$$I \neq \mathscr{P} \times \mathscr{B}. \tag{5.1}$$

Aus Satz 2 folgt, daß es zu jeder taktischen Konfiguration $\mathscr{K}$ ein wohlbestimmtes Zahlenpaar (m, n) mit $0 < m < b_0$ und $0 < n < p_0$ derart gibt, daß (B_i) und (P_j) für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ erfüllt sind, aber nicht für $i = m+1, \ldots, b_0$ und $j = n+1, \ldots, p_0$. Dieses Zahlenpaar heißt der *Typ* von $\mathscr{K}$ *Ist (m, n) der Typ einer taktischen Konfiguration, so gilt für deren (sodann ganzzahlige) Invarianten:*

$$b_0 > b_1 > \cdots > b_n \quad \textit{und} \quad p_0 > p_1 > \cdots > p_m. \tag{5.2}$$

Beweis. Wegen (3.5) braucht nur die Unmöglichkeit von $b_i = b_{i+1}$ für $0 \leqq i < n$ gezeigt zu werden. Nach dem bei (3.5) bewiesenen folgt aus $b_i = b_{i+1}$, daß für jeden Block X entweder $[X] = p_0$ oder $[X] < i$ gilt. Da taktische Konfigurationen (B_1) genügen, heißt das also $p_1 = p_0$ oder $p_1 < i$. Aber $p_1 = p_0$ bedeutet, daß jeder Punkt mit jedem Block inzidiert, was (5.1) widerspricht, und $p_1 < i$ hat wegen der [nach Satz 1 hier mit dem Gleichheitszeichen anwendbaren] Beziehung (3.6), sowie wegen $b_i > 0$ und $b_{i+1} > 0$ [das folgt aus dem Erfülltsein von (P_i) und (P_{i+1})]

$$b_{i+1}(p_0 - i) = b_i(p_1 - i) < 0,$$

also $p_0 < i$ zur Folge, im Widerspruch zu $i < n < p_0$. Damit ist (5.2) bewiesen.

Nach Satz 1 genügen die b_i und p_j den Beziehungen (3.6) mit dem Gleichheitszeichen; im folgenden werden hauptsächlich die Spezialfälle (3.8) gebraucht. Nach Satz 3 ist $b_0 = p_0$ bei $m > 1$ und $n > 1$, und daraus beweist man mit Satz 1 sofort: *Für taktische Konfigurationen des Typs (m, n) mit $m > 1$ und $n > 1$ gilt $p_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, b_0$.* Im Laufe der folgenden Untersuchung werden wir hierfür einen kurzen neuen Beweis erhalten.

Die Frage nach den möglichen Typen taktischer Konfigurationen wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz 4. *Ein Paar (m, n) von natürlichen Zahlen ist genau dann der Typ einer taktischen Konfiguration, wenn $m = 1$ oder $n = 1$ oder $m = n$ ist.*

Wir zeigen zuerst, daß es zu allen $(1, n)$, $(n, 1)$, (n, n) mit $n = 1, 2, \ldots$ taktische Konfigurationen dieser Typen gibt. Es sei $\mathscr{P}$ eine Menge von N Elementen, $N > n$, und $\mathscr{B}$ die Menge aller n-elementigen Untermengen von $\mathscr{P}$. Weiter sei $p\,I\,B$ für $p \in \mathscr{P}$ und $B \in \mathscr{B}$ gleichbedeutend mit $p \in B$. Man überzeugt sich leicht, daß die so erklärte Inzidenzstruktur eine taktische Konfiguration vom Typ $(1, n)$ oder (n, n) ist, je nachdem, ob $n < N - 1$ oder $n = N - 1$ ist.

Für $n<N-1$ erhält man durch Dualisierung auch eine taktische Konfiguration vom Typ $(n, 1)$. Also sind die behaupteten Bedingungen für m, n hinreichend für die Existenz taktischer Konfigurationen vom Typ (m, n).

Die soeben konstruierten taktischen Konfigurationen sind natürlich nicht sehr interessant: jede von ihnen hat die volle symmetrische Gruppe von $\mathfrak{P}$ zur Automorphismengruppe (Automorphismen sind Blöcke auf Blöcke abbildende Punktpermutationen). Der folgende Satz zeigt, daß es im Falle des symmetrischen Typs (n, n) mit $n>2$ keine anderen taktischen Konfigurationen als diese geben kann:

Satz 5. *Für $n>2$ sind alle taktischen Konfigurationen des Typs (n, n) isomorph; es gilt $b_i=p_i=n-i+1$ $(i=0, \ldots, n)$.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, ebenso wie der für die Notwendigkeit der Bedingungen von Satz 4 für m und n aus dem folgenden Hilfssatz:

Lemma 2. *Die folgenden Eigenschaften einer taktischen Konfiguration $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ vom Typ (m, n) sind gleichbedeutend:*

(a) $m>1$ *und* $n>2$,

(b) $m>2$ *und* $n>1$,

(c) $m, n>1$, $|\mathfrak{B}|>3$, *und jeder Block inzidiert mit wenigstens einem von zwei beliebig vorgebbaren Punkten,*

(d) $m, n>1$, $|\mathfrak{P}|>3$, *und jeder Punkt inzidiert mit wenigstens einem von zwei beliebig vorgegbaren Blöcken,*

(e) $|\mathfrak{B}|>3$, $|\mathfrak{P}|>3$, *und zu jedem Element existiert genau ein nichtinzidentes.*

(f) $|\mathfrak{B}|=|\mathfrak{P}|>3$ *und* $m=n=|\mathfrak{P}|-1$.

Vor dem Beweis leiten wir aus Lemma 2 die Sätze 4 und 5 her. Eine taktische Konfiguration vom Typ (m, n) mit $m, n>1$ ist entweder vom Typ $(2, 2)$, oder eine der Bedingungen (a), (b) ist erfüllt. Aus der Äquivalenz von (a) und (b) mit (f) folgt dann $m=n=p_0-1=b_0-1$, und das beweist einerseits Satz 4, andererseits ergibt sich $b_i=p_i=n-i+1$ aus (5.2) und der Ganzzahligkeit der p_i, b_i $(i=1, \ldots, n)$, woraus Satz 5 folgt. Damit ist alles auf den Beweis von Lemma 2 zurückgeführt. Diesen Beweis führen wir nach dem Schema

$$(f) \nearrow (a) \longrightarrow (c) \searrow \quad (e) \longrightarrow (f).$$
$$(f) \searrow (b) \longrightarrow (d) \nearrow$$

Daß (a) und (b) aus (f) folgen, ist trivial, und daß (f) eine Folge von (e) ist, ergibt sich daraus, daß die Blöcke wegen (e) umkehrbar eindeutig den (p_0-1)-elementigen Punktmengen zugeordnet sind und die Konfiguration dadurch isomorph auf die beim Beweis des Hinreichens der Bedingungen von Satz 4 konstruierte Konfiguration vom Typ (n, n) mit $n=p_0-1$ und $N=p_0$ abgebildet wird, für die (f) natürlich gilt. Also bleibt (aus Dualitätsgründen) nur die Richtigkeit der Implikationen (a) $\rightarrow$ (c) und (c) $\rightarrow$ (e) zu zeigen. Diesen Beweisen schicken wir noch einen Hilfssatz voraus:

In einer taktischen Konfiguration vom Typ (m, n) *seien* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{p}$ *eine Block- und eine Punktmenge mit* $0<|\mathfrak{B}|<m$, $0<|\mathfrak{p}|<n$ *und* $(\mathfrak{p}\times\mathfrak{B})\cap I=\emptyset$. *Dann gilt*

$$b_i p_{j+1}=p_j b_{i+1} \quad \text{für} \quad 1\leqq i\leqq|\mathfrak{p}| \quad \text{und} \quad 1\leqq j\leqq|\mathfrak{B}|. \tag{5.3}$$

Beweis. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{p}$ mit den verlangten Eigenschaften seien vorgegeben. Ist dann $1\leqq i\leqq|\mathfrak{p}|$ und $1\leqq j\leqq|\mathfrak{B}|$, so enthält $\mathfrak{p}$ eine Untermenge $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}|=i$ und $\mathfrak{B}$ eine Untermenge $\mathfrak{X}$ mit $|\mathfrak{X}|=j$, und aus $(\mathfrak{p}\times\mathfrak{B})\cap I=\emptyset$ folgt auch $(\mathfrak{x}\times\mathfrak{X})\cap I=\emptyset$, d. h. kein Punkt von $\mathfrak{x}$ ist mit einem Block von $\mathfrak{X}$ inzident. Folglich ist $[\mathfrak{X}, \mathfrak{x}]=[\mathfrak{x}, \mathfrak{X}]=0$ (vgl. 2), und Lemma 1, angewandt auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, ergibt die Beziehung

$$\sum_{X\,I\,\mathfrak{x}}[\mathfrak{X}\cup\{X\}]=\sum_{x\,I\,\mathfrak{X}}[\mathfrak{x}\cup\{x\}].$$

Aber aus $|\mathfrak{X}|<m$ und $|\mathfrak{x}|<n$ folgt die Gültigkeit von (P_i) und (P_{i+1}) sowie von (B_j) und (B_{j+1}). Also ist jeder Summand links gleich p_{j+1} und rechts b_{i+1}, und die Behauptung (5.3) folgt.

(Zwischenbemerkung. Wegen (5.1) gibt es sicher ein nichtinzidentes Paar (p, B). Die Mengen $\mathfrak{p}=\{p\}$ und $\mathfrak{B}=\{B\}$ erfüllen sodann bei $m, n>1$ die Voraussetzungen des soeben bewiesenen Hilfssatzes mit $i=j=1$. Also liefert (5.3) für diesen Fall die Gleichung

$$b_1 p_2=p_1 b_2.$$

Substituiert man nun p_2 und b_2 gemäß (3.8), so ergibt sich nach trivialen Umformungen

$$b_0+p_1=b_1+p_0.$$

Das ist mit der ersten Formel (3.8) nur dann verträglich, wenn die Zahlenpaare (p_0, b_1) und (b_0, p_1) sich höchstens in der Reihenfolge unterscheiden. Aber $p_0=p_1$ widerspricht (5.2), also folgt $p_0=b_0$, daraus mit (3.8) weiter $p_1=b_1$, und nun ergibt sich aus den Formeln (3.6) [mit dem Gleichheitszeichen], daß $p_i=b_i$ für alle i ist. Dies ist der angekündigte zweite Beweis für die Tatsache, daß aus $m, n>1$ immer $p_i=b_i$ folgt. Man vergleiche hierzu MAJUMDAR [6, theorem 1].)

Wir führen jetzt den Beweis von Lemma 2 zu Ende.

Aus (a) *folgt* (c): Aus $n>2$ ergibt sich sofort $|\mathfrak{B}|>3$ wegen (5.1). Sei $\mathfrak{p}$ eine aus zwei Punkten bestehende Punktmenge. Gäbe es einen Block B derart, daß kein Punkt von $\mathfrak{p}$ auf B liegt, so würden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{B}=\{B\}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen. Also müßte (5.3) für die Indexpaare $(i, j)=(1, 1)$ und $(i, j)=(2, 1)$ gelten:

$$b_1 p_2=p_1 b_2 \quad \text{und} \quad b_2 p_2=p_1 b_3.$$

Hieraus folgt aber bei Anwendung von (3.6) [mit dem Gleichheitszeichen]

$$\frac{p_1-1}{p_0-1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{p_1-2}{p_0-2},$$

also würde sich $p_0 = p_1$ ergeben, im Widerspruch zu (5.2). Also gibt es keinen solchen Block B, und (c) ist bewiesen.

Aus (c) *folgt* (e): Durch zwei verschiedene Punkte gehen je b_1 Blöcke, und b_2 gehen durch beide Punkte. Da nach (c) jeder Block durch wenigstens einen der beiden Punkte geht, folgt also

$$b_0 = 2b_1 - b_2.$$

Substituiert man nun wieder b_2 gemäß (3.8) und ersetzt p_0 durch b_0 und p_1 durch b_1, was wegen der Voraussetzung $m, n > 1$ in (c) nach der obigen Zwischenbemerkung erlaubt ist, so ergibt sich nach leichten Umformungen

$$(b_0 - b_1)(b_0 - b_1 - 1) = 0,$$

und daraus folgt wegen (5.2), daß $b_0 = b_1 + 1$ sein muß. Also ist auch $p_0 = p_1 + 1$, und damit ist (e) bewiesen.

Literatur

[1] BOSE, R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. of Eugenics **9**, 353–399 (1939).

[2] BOSE, R. C.: A note on FISHER's inequality for balanced incomplete block designs. Ann. Math. Statistics **20**, 619–620 (1949).

[3] DE BRUIJN, N. G., and P. ERDÖS: On a combinatorial problem. Indagationes Math. **10**, 421–423 (1948).

[4] CARMICHAEL, R. D.: Introduction to the theory of groups of finite order. Boston 1937.

[5] FISHER, R. A.: An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks. Ann. of Eugenics **10**, 52–75 (1940).

[6] MAJUMDAR, K. N.: On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs. Ann. Math. Statistics **24**, 377–389 (1953).

[7] MOORE, E. H.: Tactical memoranda. Amer. J. Math. **18**, 264–303 (1896).

[8] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.

[9] RYSER, H. J.: A note on a combinatorial problem. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 422–424 (1950).

[10] SPROTT, D. A.: Balanced incomplete block designs and tactical configurations. Ann. Math. Statistics **26**, 752–758 (1955).

[11] WITT, E.: Über Steinersche Systeme. Abh. Hamburg **12**, 265–275 (1938).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 6. Juni 1960)

MENZEL, W.
Math. Zeitschr. 75, 271–276 (1961)

Ein Kriterium für die Distributivität des Untergruppenverbandes einer abelschen Operatorgruppe

Von

WOLFRAM MENZEL

Eine Gruppe heißt *D-Gruppe*, wenn der Verband ihrer Untergruppen distributiv ist. SUZUKI [4, Theorem 2] hat bewiesen:

A group G is a D-group, if and only if every finite set of elements in G generates a cyclic subgroup.

Andererseits habe ich gezeigt [3, §3, Satz 2]:

Sei g eine abelsche Gruppe mit einem Ringe Ω von Operatoren; Ω enthalte ein Einselement und dieses operiere identisch in g. Dann sind die folgenden Eigenschaften von (g, Ω) äquivalent:

(1) *Der Verband der Ω-Untergruppen von g ist distributiv.*

(2) *Für je zwei Ω-Untergruppen a, b von g und jedes Element $\gamma \in a \cup b$ gilt $(a:\gamma) \cup (b:\gamma) = \Omega$ (im Verband der Rechtsideale von Ω)*[1].

(3) *Zu beliebigem Ω-Untergruppenpaare a, b von g gibt es keinen nicht trivialen Homomorphismus zwischen $a-(a \cap b)$ und $b-(a \cap b)$.*

(4) *Für je zwei Ω-Untergruppen a, b von g gilt: Aus $a-(a \cap b) \cong b-(a \cap b)$ folgt $a=b$.*

In dieser Arbeit nun soll eine Verallgemeinerung des Distributivitätskriteriums von SUZUKI auf abelsche Operatorgruppen bewiesen werden (Satz 1); sie stellt sich den genannten vier äquivalenten Eigenschaften der Operatorgruppe (g, Ω) als fünfte an die Seite. Die Spezialisierung auf den Fall, daß g die additive Gruppe eines Ringes ist, ergibt in §2 ein Kriterium dafür, daß jeder zyklische Modul eines Ringes distributiven Untermodulverband besitzt.

§ 1. Gegeben sei eine additiv geschriebene abelsche Gruppe g mit einer Menge Ω von Rechtsoperatoren. Für die Faktorgruppe zweier Untergruppen a, b von g mit $a > b$ schreiben wir $a-b$. Ferner werde der Verband aller Ω-Untergruppen von g mit $V(g, \Omega)$ bezeichnet. Eine Ω-Gruppe z heiße *zyklisch*, wenn $z = \zeta\Omega$ für ein Element $\zeta \in z$ gilt.

[1]) $a:\gamma$ bezeichnet den „Quotienten" $\{\omega; \omega \in \Omega, \gamma\omega \in a\}$.

Ziel dieses Paragraphen ist der folgende

1.1. SATZ 1. *Der Verband $V(g,\Omega)$ ist genau dann distributiv, wenn gilt: Zu jedem Elementepaar $\alpha,\beta\in g$ ist die Faktorgruppe $(\alpha\Omega\cup\beta\Omega)-(\alpha\Omega\cap\beta\Omega)$ zyklisch mit der erzeugenden Restklasse $(\alpha+\beta)+(\alpha\Omega\cap\beta\Omega)$.*

Dem Beweise dienen die beiden Lemmata 1.3 und 1.5.

Wie SUZUKI in [4] erklären wir zunächst:

1.2. DEFINITION. Sei A ein Verband. Ein Elementepaar $a,b\in A$ heißt *distributives Paar in A*, wenn für alle $c\in A$ gilt $(a\cup b)\cap c=(a\cap c)\cup(b\cap c)$.

1.3. LEMMA. *Ein Untergruppenpaar $a,b\in V(g,\Omega)$ bildet genau dann ein distributives Paar in diesem Verbande, wenn es zu jedem Element $\gamma\in a\cup b$ ein Element $\mu\in\Omega$ gibt mit $\gamma\mu\in a$, $\gamma-\gamma\mu\in b$.*

BEWEIS. 1. a,b sei distributives Paar und $\gamma\in a\cup b$. Speziell für $c=\gamma\Omega$ gilt dann $\gamma\Omega=\gamma\Omega\cap(a\cup b)=(\gamma\Omega\cap a)\cup(\gamma\Omega\cap b)$. Also hat γ die Darstellung $\gamma=\gamma\mu+\gamma\mu^*$ mit $\gamma\mu\in\gamma\Omega\cap a$, $\gamma\mu^*\in\gamma\Omega\cap b$. Es folgt $\gamma\mu\in a$, $\gamma-\gamma\mu=\gamma\mu^*\in b$.

2. Die angegebene Bedingung sei für a,b aus A erfüllt. Für jedes $x\in A$, $x<a\cup b$, gilt dann $x=(x\cap a)\cup(x\cap b)$. Denn jedes $\xi\in x$ hat die Form $\xi=\xi\mu+\xi-\xi\mu$, mit $\xi\mu\in x\cap a$, $\xi-\xi\mu\in x\cap b$.

Ist $c\in A$ beliebig, so hat man also für $x=c\cap(a\cup b)$ die Beziehung

$$c\cap(a\cup b)=x=(x\cap a)\cup(x\cap b)=\big(c\cap(a\cup b)\cap a\big)\cup\big(c\cap(a\cup b)\cap b\big)=(c\cap a)\cup(c\cap b).$$

1.4. ZUSÄTZE. Offensichtlich lassen sich die Rollen von a und b in 1.3 vertauschen. Es ergibt sich so die Form des Distributivitätskriteriums „Zu jedem Element $\gamma\in a\cup b$ gibt es ein Element $\nu\in\Omega$ mit $\gamma\nu\in b$, $\gamma-\gamma\nu\in a$“; oder insgesamt die Form: *Zu jedem Element $\gamma\in a\cup b$ gibt es Elemente $\mu,\nu\in\Omega$ mit $\gamma\mu\in a$, $\gamma\nu\in b$; $\gamma-\gamma\mu\in b$, $\gamma-\gamma\nu\in a$.*

Ist z.B. Ω ein Ring mit identisch operierendem Einselement, so kann man für ν das Element $1-\mu$ nehmen.

Aus der Tatsache, daß die Elemente aus $a\cup b$ genau die Elemente der Gestalt $\alpha+\beta$ mit $\alpha\in a$, $\beta\in b$ sind, folgert man sofort, daß sich das Kriterium in 1.3 auch in die beiden Formen kleiden läßt:

Zu jedem Paar von Elementen $\alpha\in a$, $\beta\in b$ gibt es ein Element $\nu\in\Omega$ mit $\alpha\nu\in a\cap b$, $\beta-\beta\nu\in a\cap b$.

Zu jedem Paar von Elementen $\alpha\in a$, $\beta\in b$ gibt es Elemente $\mu,\nu\in\Omega$ mit $\alpha\nu\in b$, $\beta\mu\in a$, $\alpha-\alpha\mu\in b$, $\beta-\beta\nu\in a$.

Wird im Folgenden angenommen, daß Ω ein Ring mit Einselement ist, so sei stets vorausgesetzt, daß dieses in g identisch operiere.

1.5. LEMMA. *Sei $a=\alpha\Omega$, $b=\beta\Omega$ ein Paar zyklischer Ω-Untergruppen von g; sei $\bar g=g-(a\cap b)$, entsprechend $\bar a$, $\bar b$.*

(a) *Ist $\bar a$, $\bar b$ distributives Paar in $\bar g$, so ist $\bar a\cup\bar b=\overline{a\cup b}$ zyklisch mit der erzeugenden Restklasse $\overline{\alpha+\beta}$.*

(b) *Ω sei ein Ring mit Einselement und es sei in Ω jedes Rechtsideal zweiseitig. Ist dann $\bar{a} \cup \bar{b}$ zyklische Ω-Gruppe, so wird $\bar{a} \cup \bar{b}$ von der Restklasse $\overline{\alpha+\beta}$ erzeugt und die Gruppen a, b bilden ein distributives Paar in $V(g, \Omega)$.*

Beweis. Zu (a): Aus den Voraussetzungen folgt die Existenz von Elementen $\mu, \nu \in \Omega$ mit $\bar{\alpha}\nu \in \bar{a} \cap \bar{b} = \bar{0}$, $\bar{\beta} - \bar{\beta}\nu = \bar{0}$, $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\mu = \bar{0}$, $\bar{\beta}\mu = \bar{0}$. Also gilt $(\overline{\alpha+\beta})\mu = \bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}\mu = \bar{\alpha}$, $(\overline{\alpha+\beta})\nu = \bar{\beta}$; $\overline{\alpha+\beta}$ erzeugt ganz $\bar{a} \cup \bar{b}$.

Zu (b): $\bar{a} \cup \bar{b}$ sei zyklisch.

1. Wir zeigen zunächst, daß man als erzeugende Restklasse $\overline{\alpha+\beta}$ nehmen kann.

Sei $\bar{a} \cup \bar{b} = \bar{\gamma}\Omega$ mit $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}' + \bar{\beta}'$ $(\bar{\alpha}' \in \bar{\alpha}\Omega,\ \bar{\beta}' \in \bar{\beta}\Omega)$. Es ist also $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}\omega$ für ein $\omega \in \Omega$, andererseits $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'\iota + \bar{\beta}'\iota$ für ein $\iota \in \Omega$, woraus — da die Summe direkt ist — folgt $\bar{\beta}'\iota = \bar{0}$, also $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'\iota$. Analog erschließt man $\bar{\beta} = \bar{\beta}'\varkappa$ für ein $\varkappa \in \Omega$. Es folgt

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\omega\iota. \tag{1}$$

Weiter ist $\bar{\beta}\omega\iota = \bar{\beta}'\varkappa\omega\iota$. Das Rechtsideal $\iota\Omega$ ist zweiseitig; es gibt also ein $\xi \in \Omega$ mit $(\varkappa\omega)\iota = \iota\xi$. Hiermit hat man $\bar{\beta}\omega\iota = \bar{\beta}'\iota\xi = \bar{0}$ (da $\bar{\beta}'\iota = \bar{0}$), zusammen mit (1) also $(\overline{\alpha+\beta})\Omega \ni (\overline{\alpha+\beta})\omega\iota = \bar{\alpha}\omega\iota + \bar{\beta}\omega\iota = \bar{\alpha}$. Analog erschließt man $\bar{\beta} \in (\overline{\alpha+\beta})\Omega$.

2. Mit $\mu = \omega\iota$ ist also $(\overline{\alpha+\beta})\mu = \bar{\alpha}$, $(\overline{\alpha+\beta})(1-\mu) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\alpha}\mu - \bar{\beta}\mu = \bar{\beta}$, und so (wegen der Voraussetzung über Rechtsideale)

$$(\overline{a \cup b})\,\mu = (\overline{\alpha+\beta})\,\Omega\,\mu < (\overline{\alpha+\beta})\,\mu\,\Omega = \bar{a}$$

$$(\overline{a \cup b})\,(1-\mu) = (\overline{\alpha+\beta})\,\Omega\,(1-\mu) < (\overline{\alpha+\beta})\,(1-\mu)\,\Omega = \bar{b},$$

Man hat also

$$(a \cup b)\,\mu < a \cup (a \cap b) = a$$

$$(a \cup b)\,(1-\mu) < b \cup (a \cap b) = b,$$

woraus sich nach 1.4 die Behauptung ergibt.

Beweis von Satz 1.

1. Mit einem Verbande A ist auch jeder Teilverband von A distributiv, mit $V(g, \Omega)$ also auch $V\big(g - (\alpha\Omega \cap \beta\Omega), \Omega\big)$. Nach 1.5 (a) folgt, daß die in Satz 1 genannte Bedingung für die Distributivität von $V(g, \Omega)$ notwendig ist.

2. Sei umgekehrt $V(g, \Omega)$ nicht distributiv. Nach [3, Satz 2, (3.5)] enthält $V(g, \Omega)$ zwei verschiedene Untergruppen a, b von g mit $a - (a \cap b) \underset{\Omega}{\cong} b - (a \cap b)$[2]; sei σ ein Ω-Isomorphismus von $\bar{a} = a - (a \cap b)$ auf $\bar{b} = b - (a \cap b)$. Sei endlich α ein nicht in b gelegenes Element von a; es ist $\bar{\alpha}^\sigma \in \bar{b}$.

Angenommen, für ein $\omega \in \Omega$ gälte $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^\sigma)\omega$. Dann hätte man also $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\omega + (\bar{\alpha}\omega)^\sigma$ (da σ ein Ω-Isomorphismus ist), woraus wegen der Direktheit

[2]) Satz 2 in Menzel [3] ist noch unter der Voraussetzung formuliert, daß Ω ein Ring mit Einselement sei. Jedoch ist — wie sich aus dem Beweise sofort ergibt — dies für die hier verwendete Teilaussage nicht von Belang.

der Summe $\bar{\alpha}\Omega \cup \bar{\alpha}^{\sigma}\Omega$ folgt $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\omega$, $(\bar{\alpha}\omega)^{\sigma} = \bar{0}$. Aber σ ist Isomorphismus, und so folgt aus der letzten Beziehung $\bar{\alpha}\omega = \bar{0}$, $\bar{\alpha} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ entgegen $\alpha \notin b$. Es ist $\bar{\alpha} \neq (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^{\sigma})\omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Ist β ein Vertreter der Restklasse $\bar{\alpha}^{\sigma}$, so folgt für alle $\omega \in \Omega$, daß $(\alpha+\beta)\omega \not\equiv \alpha$ modulo $a \cap b$, also erst recht $(\alpha+\beta)\omega \not\equiv \alpha$ modulo $\alpha\Omega \cap \beta\Omega$ ist. Also ist es unmöglich, daß die Restklasse $(\alpha+\beta) + (\alpha\Omega \cap \beta\Omega)$ die ganze Gruppe $(\alpha\Omega \cup \beta\Omega) - (\alpha\Omega \cap \beta\Omega)$ erzeugt.

1.6. FOLGERUNG 1. *Ω sei ein Ring mit Einselement und in Ω sei jedes Rechtsideal zweiseitig. Dann ist die Distributivität des Verbandes $V(g, \Omega)$ aller Ω-Untergruppen der Gruppe g gleichbedeutend damit, daß zu je zwei Elementen $\alpha, \beta \in g$ die Faktorgruppe $(\alpha\Omega \cup \beta\Omega) - (\alpha\Omega \cap \beta\Omega)$ zyklisch ist.*

BEWEIS. Daß die Bedingung notwendig ist, ist klar. Umgekehrt sieht man leicht, daß der Untergruppenverband $V(g, \Omega)$ bereits dann distributiv ist, wenn je zwei *zyklische* Untergruppen a, b in $V(g, \Omega)$ ein distributives Paar bilden. Aus 1.5 folgt nun sofort, daß die Bedingung auch hinreicht.

Wir haben weiter (für abelsche Gruppen) die folgende leichte Verallgemeinerung des in der Einleitung genannten Distributivitätskriteriums von SUZUKI [4]:

1.7. FOLGERUNG 2. *Der Operatorbereich Ω der Gruppe g sei ein Hauptidealring mit Einselement, und in Ω sei jedes Rechtsideal zweiseitig. Dann ist die Distributivität von $V(g, \Omega)$ äquivalent damit, daß je endlich viele Elemente von g eine zyklische Untergruppe erzeugen.*

BEWEIS. 1. Aus 1.6 ergibt sich, daß die Bedingung hinreicht.

2. Sei $V(g, \Omega)$ distributiv. Da Ω Hauptidealring ist, ist jede endlich erzeugte Ω-Untergruppe von g direkte Summe endlich vieler zyklischer Ω-Untergruppen von g.

Angenommen, es gäbe eine nicht zyklische direkte Summe endlich vieler zyklischer Ω-Untergruppen. Dann ergibt sich sofort auch die Existenz einer nicht zyklischen direkten Summe zweier Summanden, etwa $\alpha\Omega \oplus \beta\Omega$. Nach 1.4 existiert ein Element $v \in \Omega$ mit $\alpha v = 0$, $\beta v = \beta$. Es folgt $(\alpha+\beta)v = \beta$, $(\alpha+\beta)(1-v) = \alpha$; α und β liegen in $(\alpha+\beta)\Omega$. Also ist $\alpha\Omega \oplus \beta\Omega$ zyklisch entgegen Annahme.

§ 2. Wir spezialisieren die Ergebnisse des § 1 auf den Fall, daß Ω ein Ring mit Einselement, g die additive Gruppe Ω^{+} des Ringes ist. $V(g, \Omega) = V(\Omega^{+}, \Omega)$ ist dann der Verband der Rechtsideale von Ω. Unter einem *Modul* des Ringes Ω verstehen wir stets einen *Rechtsmodul*.

Sei A ein Verband. Wie in [2] werde ein Element $i \in A$ *voll $\cup$-irreduzibel* genannt, wenn es nicht als Verbindung echt früherer Verbandselemente dargestellt werden kann. A heiße *glatt*, wenn jedes Element von A Verbindung voll $\cup$-irreduzibler Elemente ist. Weiter bezeichnen wir den Verband A als *$\uparrow$-atomar* (vgl. [1], S. 38), wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $b < a$, $b \neq a$, obere Nachbarn von b unter a gibt.

In [3, Satz 4] wurde bewiesen: *Der Verband $V(g, \Omega)$ der Ω-Untergruppen von g sei glatt, distributiv und $\uparrow$-atomar; ferner sei Ω ein Ring mit Einselement. Ist dann $a \in V(g, \Omega)$ und η ein Ω-Homomorphismus von a in g, so gilt $a^\eta < a$.*

Durch Spezialisierung der Gruppe g zur additiven Gruppe eines Ringes Ω mit Einselement folgt hieraus: *Ω sei ein Ring mit Einselement. Der Verband der Rechtsideale von Ω sei glatt, distributiv und $\uparrow$-atomar. Dann ist jedes Rechtsideal in Ω zweiseitig.*

Hiermit nun läßt sich beweisen

2.1. Satz 2. *Ω sei ein Ring mit Einselement, der Verband der Rechtsideale von Ω sei glatt und $\uparrow$-atomar. Dann sind die folgenden Eigenschaften von Ω äquivalent:*

(1) *Jeder zyklische Ω-Modul hat distributiven Untermodulverband.*

(2) *Der Verband der Rechtsideale von Ω ist distributiv.*

(3) *Es gilt*

(a) *Alle Rechtsideale in Ω sind zweiseitig.*

(b) *Zu jedem Paar P, Σ von (Rechts-)Hauptidealen in Ω ist $(\mathsf{P} \cup \Sigma)/(\mathsf{P} \cap \Sigma)$ im Restklassenring $\Omega/(\mathsf{P} \cap \Sigma)$ Hauptideal.*

Beweis. 1. Da Ω ein Einselement besitzt, stimmt die Gesamtheit der zyklischen Ω-Moduln überein mit der Gesamtheit der Ω-homomorphen Bilder von Ω^+. Die Distributivität des Verbandes $V(\Omega^+, \Omega)$ der Rechtsideale von Ω vererbt sich auf jeden Verband $V(\Omega^{+\eta}, \Omega)$ (wo η ein Ω-Homomorphismus ist); genau dann hat jeder zyklische Ω-Modul distributiven Untermodulverband, wenn $V(\Omega^+, \Omega)$ distributiv ist.

2. Seien P, Σ Rechtsideale in Ω. Wir bezeichnen durch Überstreichung Restklassen- bzw. Faktorgruppenbildung nach $\mathsf{P} \cap \Sigma$ in der Ω-Gruppe Ω^+.

Jedes Rechtsideal in Ω sei zweiseitig. Dann ist $\Omega/\mathsf{P} \cap \Sigma$ ein Ring, den wir mit $\bar{\Omega}$ bezeichnen wollen, und die Faktorgruppe $\overline{\Omega^+}$ ist $\bar{\Omega}$-Modul vermöge der Definition $\bar{\xi}\,\bar{\omega} = \overline{\xi\omega}$ ($\bar{\xi} \in \overline{\Omega^+}$, $\omega \in \Omega$, $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$); es ist $\overline{\Omega^+} = \bar{\Omega}^+$. Jedes Rechtsideal in $\bar{\Omega}$ ist zweiseitig. Die $\bar{\Omega}$-Gruppen in $\bar{\Omega}^+$ sind die Rechtsideale, also die Ideale, in $\bar{\Omega}$. Für ein Rechtsideal T in Ω folgt die Äquivalenz der Eigenschaften „$\overline{\mathsf{T}}$ ist zyklisch als Ω-Modul“, „$\overline{\mathsf{T}}$ ist Rechtshauptideal in $\bar{\Omega}$“ und „$\overline{\mathsf{T}}$ ist Hauptideal in $\bar{\Omega}$“.

3. Aus 2. ergibt sich, daß die Äquivalenz der Eigenschaften (2) und (3) in Satz 2 der folgenden Aussage gleichwertig ist:

Der Verband $V(\Omega^+, \Omega)$ ist genau dann distributiv, wenn gilt

(a′) Jedes Rechtsideal in Ω ist zweiseitig.

(b′) Zu je zwei zyklischen Ω-Untermoduln P, Σ des Ω-Moduls $\bar{\Omega}^+$ ist $(\mathsf{P} \cup \Sigma) - (\mathsf{P} \cap \Sigma)$ zyklisch.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen folgt sofort aus den zu Beginn dieses Paragraphen zitierten Ergebnissen von [3] und aus Satz 1. Aus 1.6 ergibt sich, daß sie auch hinreichend sind. Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

2.2. ZUSATZ. Aus dem Beweis ergibt sich, daß Satz 2 dadurch ein klein wenig verschärft werden kann, daß man Eigenschaft (3) (b) ersetzt durch die genauere Aussage

Für je zwei Hauptideale P, Σ *in* Ω *ist im Restklassenring* $\Omega/(\mathsf{P}\cap\Sigma)$ *das Ideal* $(\mathsf{P}\cup\Sigma)/(\mathsf{P}\cap\Sigma)$ *Hauptideal und wird von einer Restklasse* $\bar{\tau}\in\Omega/(\mathsf{P}\cap\Sigma)$ *in der Form* $\bar{\tau}(\Omega/\mathsf{P}\cap\Sigma)$ *erzeugt.*

Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. A.M.S. Coll. Publ. **25**, 2nd ed. (1948).

[2] MENZEL, W.: Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil I: m-Verbände. Math. Z. **74**, 39–51 (1960).

[3] MENZEL, W.: Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil II: Distributive und m-Verbände von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe. Math. Z. **74**, 52–65 (1960).

[4] SUZUKI, M.: Structure of a Group and its Lattice of Subgroups. Ergebn. d. Math., N.F. H. 10. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

Gernsheim a. Rh., Darmstädter Str. 24

(Eingegangen am 24. Juni 1960)

Kovács, L. G.
Math. Zeitschr. 75, 277–294 (1961)

Groups with regular automorphisms of order four

By
L. G. Kovács

1. Introduction

An automorphism of a group G is called regular if it moves every element of G except the identity. Burnside proved that a finite group G has a regular automorphism of order two if and only if G is an abelian group of odd order, and then the only such automorphism maps every element onto its inverse ([2], p. 230). More recently several authors considered the question: what groups can admit regular automorphisms of order a prime p? B. H. Neumann [8] and M. Nagata [7] extended the original theorem about the case $p=2$ to various classes of infinite groups. The case $p=3$ appeared in the second edition of Burnside's book ([3], pp. 90–91), and this theorem was also generalized by Neumann [9]. For arbitrary p, the results so far can be summarized as follows. If a locally finite or locally nilpotent group G has a regular automorphism of prime order p, then G is nilpotent and its class is bounded in terms of p (G. Higman [4] and J. Thompson [10]).

In this paper we consider groups which admit regular automorphisms of order four. For this case one cannot obtain results like those quoted above. Finite nilpotent groups of every class have regular automorphisms of order four; hence locally nilpotent but non-nilpotent groups have them too. There are also non-nilpotent finite soluble groups, both metabelian and non-metabelian ones, that admit such automorphisms. (Examples are given in the last section of the paper.) What we can prove is that *if G is either a locally nilpotent or a periodic locally soluble group, and if G has a regular automorphism of order four, then the second derived group of G is contained in the centre of G.**) The examples just mentioned show this conclusion to be in a sense the best possible.

An outline of the proof is the following.

Let G be an arbitrary group with a regular automorphism α of order four, and let us consider the action of α^2. It is clear that α^2 need not be regular: the elements of G fixed by α^2 form a subgroup $T(G)$. The restriction of α to this subgroup is a regular automorphism of order two and so, under any of the conditions that we later adopt, $T(G)$ is abelian and its elements are all inverted by α. It is more difficult to see what happens to the elements

*) [*Added in proof*, 31. 12. 1960.] Dr. B. Huppert has kindly informed me of a new theorem of D. Gorenstein and I. N. Herstein, according to which a finite group with a regular automorphism of order four is always soluble. Hence in our result the condition "periodic locally soluble" could be replaced by "locally finite".

on which α^2 acts as if it were regular, that is, which are inverted by α^2. The set $S(G)$ formed by these elements need not be a subgroup. However, if we assume that every element of G has a unique square root in G, then G is the product of $T(G)$ and $S(G)$. This then implies that the subgroup $H(G)$ generated by $S(G)$ contains the derived group of G.

Here we turn to the investigation of $H(G)$. Since $H(G)$ may coincide with G, and in any case α can be restricted to $H(G)$, we may consider $H(G)$ without further reference to G. Thus let H be an arbitrary group which has a regular automorphism α of order four, such that the elements inverted by α^2 generate H. Assuming that H is locally nilpotent, commutator computations give that H is nilpotent of class at most three. Then we prove (by induction on the order of H) that the same conclusion holds if instead of local nilpotency we assume finiteness and solubility, and hence also if H is taken to be only periodic and locally soluble.

Returning to G with the condition on roots, we show that if $H(G)$ is nilpotent, then the second derived group of G is contained in the centre of G. Here again some computational work is involved, but after this the main theorems follow immediately. Namely, let G be an arbitrary group with a regular automorphism α of order four. If G is periodic and locally soluble, then the condition on roots is automatically satisfied. If G is locally nilpotent, then it can be embedded in a locally nilpotent group which satisfies the condition on roots and admits an extension of α as a regular automorphism of order four. So the previous theorems can be applied, and in either case we get that the second derived group of G is contained in the centre of G.

The major part of this paper was presented to the University of Manchester for the degree of M. Sc. It is a great pleasure to record my gratitude to Dr. B. H. Neumann, both for suggesting this topic to me and for his generous advice and guidance throughout. I also thank the University College of North Staffordshire for the Research Studentship which enabled me to carry out this work.

2. Notations and quotations

We follow the terminology and notation of Kurosh [5], apart from the exceptions and with the additions given in the first part of this section.

Let G be any group; then $H \subseteq G$ means that H is a subset, and $H \leqq G$ means that H is a subgroup of G. When H is a normal subgroup of G and a, b are elements of G belonging to the same coset of H, then the congruence $a \equiv b \bmod H$ may be used as a convenient way of recording this situation. We need the usual abbreviations $a^b = b^{-1}ab$ and $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ in the following extended forms. For two subsets A, B of G, the symbol A^B denotes the set of all elements a^b with $a \in A$, $b \in B$. The n-th commutator $[h_1, \ldots, h_n]$ of the elements $h_1, \ldots, h_n$ of G is defined recursively by $[h_1, \ldots, h_n] = [[h_1, \ldots, h_{n-1}], h_n]$. If $H_1, \ldots, H_n$ are subsets of G, then $[H_1, \ldots, H_n]$ stands for the subgroup generated by all the commutators $[h_1, \ldots, h_n]$ with $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H$

The derived length of a soluble group G is the smallest integer n such that $G^{(n)}$ – the n-th derived group of G – is the unit subgroup E. Metabelian groups are the soluble groups of derived length two. We write the lower central chain of G as $G=\Gamma_1(G)\geqq\Gamma_2(G)\geqq\cdots$, and the upper central chain of G as $E=Z_0(G)\leqq Z_1(G)\leqq\cdots$.

In the course of computations, the following identities are used without further reference:

$$a^b=a\,[a,b],$$

$$[b,a]=[a,b]^{-1},$$

$$[a,b^{-1}]=[b,a]^{b^{-1}},$$

$$[a^{-1},b^{-1}]=[a,b]^{b^{-1}a^{-1}},$$

$$[a\,b,c\,d]=[a,d]^b\,[b,d]\,[a,c]^{b\,d}\,[b,c].$$

Another important identity is

$$[a,b^{-1},c]^b\,[b,c^{-1},a]^c\,[c,a^{-1},b]^a=1; \tag{2.1}$$

we make a point of quoting it by number whenever it is applied.

Next we collect some definitions and results on groups with unique square roots. We take most of them from BAUMSLAG's thesis [1], but our notation is slightly different and the quotations rarely verbatim: as we use only special cases of his concepts and results, we do not quote them in their full generality. The numbering of the statements follows that in [1]; for instance, (B.5.1) stands for (a possibly simplified form of) (5.1) in [1].

Let G be any group, and $g\in G$. If $x^2=g$ $(x\in G)$, we write $x=g\sigma$ and say that x is a square root of g. If σ is a single-valued function (on the subset of G where it is defined at all), then we call G a Π-group, or write for short that $G\in[\Pi]$. If $G\in[\Pi]$ and if σ is defined on the whole of G, then G is called a Σ-group; for short, $G\in[\Sigma]$.

(B.5.1) *A periodic group G is a Σ-group if and only if G has no element of order two.*

(B.5.3) *If $G\in[\Pi]$, if η is any endomorphism of G, and if g is any element of G such that $g\sigma$ exists, then $(g\eta)\sigma$ also exists and $(g\eta)\sigma=(g\sigma)\eta$.*

(B.5.6) *If $G\in[\Pi]$ and $g,h\in G$, then $[g^{2^n},h^{2^m}]=1$ (n, m non-negative integers) is equivalent to $[g,h]=1$.*

Again, let G be any group. A subset H of G is closed (in G) if $x^2\in H$ $(x\in G)$ implies that $x\in H$. (We usually omit the reference to G as it is always clear from the context which group plays its role.) The intersection of closed subsets is closed. Let $cl(H)$ be the intersection of all closed subgroups of G that contain H; this is the minimal closed subgroup that contains H, and it is called the closure of H in G. A constructive definition of $cl(H)$ is the following. Let H_1 be the subgroup generated by H, ..., let H_{i+1} be the subgroup generated by all x $(\in G)$ such that $x^2\in H_i$, ... Then $cl(H)$ is the union of

$H_1, \ldots, H_i, \ldots$. — If H is normal, characteristic in G, then $cl(H)$ is also normal, characteristic in G, respectively. We shall use $\Delta_i(G)$ to denote the closure of $\Gamma_i(G)$ in G.

Any closed subgroup of a Σ-group is itself a Σ-group.

An ideal is a normal subgroup N of G such that G/N is a Π-group. Every ideal is closed.

(B.9.1) *If H, K are subsets of a Π-group and if $[H, K]=E$, then also $[cl(H), cl(K)]=E$.*

(B.9.2) *All terms of the upper central chain of a Π-group are ideals.*

(B.9.4) *A locally nilpotent group is a Π-group if and only if it has no element of order two.*

(B.9.5) *Any closed normal subgroup of a locally nilpotent group is an ideal.*

(B.10.2) *If G is a Π-group, and if H is an ideal and K a subgroup of G such that $[H, K]=E$ and $cl(K)\geqq H$, then $cl(KH/H)=cl(K)/H$.*

M. LAZARD has proved the following statement (in a more general form; [6], pp. 180, 186):

(2.2) *If G is a locally nilpotent group without elements of order two, then there exists a locally nilpotent Σ-group G^* such that* (i) *G^* contains G,* (ii) *to every element g^* of G^* there is a number $n=n(g^*)$ for which $(g^*)^{2^n}$ belongs to G, and* (iii) *every automorphism of G can be extended in one and only one way to an automorphism of G^*.*

Now we turn to automorphisms. Let us repeat that an automorphism α of a group G is called regular if $g\alpha=g$ $(g\in G)$ implies that $g=1$. For brevity we shall say that G is an A_n-group if G has a regular automorphism whose order divides n; sometimes we shall write $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_n]$ to express that α is such an automorphism of G. We shall also use $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_n\Pi]$, $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_n\Sigma]$ if simultaneously $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_n]$ and $G\in[\Pi]$, $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_n]$ and $G\in[\Sigma]$, respectively.

We need a remark of G. ZAPPA [11]:

(2.3) *If α is a regular automorphism of a finite group G, then every element g of G can be written in the form $g=x^{-1}x\alpha$ with some $x\in G$.*

Again we repeat that if $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_4]$, then $T(G)$ is the set of all t $(\in G)$ such that $t\alpha^2=t$, and $S(G)$ is the set of all s $(\in G)$ such that $s\alpha^2=s^{-1}$. Clearly $T(G)\alpha=T(G)$, $S(G)\alpha=S(G)$; and $T(G)$ is a subgroup of G.

Finally, two of the results mentioned in the introduction have to be stated precisely for reference in the sequel.

(2.4) (NEUMANN [8]) *If $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_2\Sigma]$, then G is abelian and $g\alpha=g^{-1}$ for every g in G.*

(2.5) (NAGATA [7], HIGMAN [4]) *If G is a locally nilpotent group and if $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_2]$, then G is abelian and $g\alpha=g^{-1}$ for every g in G.*

3. Preparations

We start with a purely technical remark.

(3.1) *If α is a regular automorphism of a finite group G, then an equality of the form $a\alpha = a^g$ $(a, g \in G)$ can hold only for $a = 1$.* Indeed, according to (2.3), $a\alpha = a^g$ yields $a\alpha = a^{x^{-1}x\alpha}$ with some x in G, whence $(a^{x^{-1}})\alpha = a^{x^{-1}}$, and, as α is regular, this can only happen if $a^{x^{-1}} = 1$, $a = 1$.

Next we present four lemmas on A_4- and Σ-groups.

(3.2) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4]$ and G is locally finite, then G is a Σ-group.*

Proof. Take an arbitrary element g of G and consider its α-orbit, that is, the set consisting of the elements g, $g\alpha$, $g\alpha^2$, $g\alpha^3$. The subgroup K generated by these elements is finite and α-invariant; as such, it is the union of a finite number of disjoint α-orbits. Since the α-orbit of any non-identity element of G consists either of two or of four elements, it follows that the number of non-identity elements in K is even, the order of K is odd. Hence g itself is of odd order and, as g was arbitrary, the same holds for every element of G. Thus (B.5.1) proves the lemma.

(3.3) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4\Sigma]$, then $T(G)$ is abelian and $t\alpha = t^{-1}$ for every t in $T(G)$.*

Proof. If $t \in T(G)$ then, using (B.5.3), we see that $(t\sigma)\alpha^2 = (t\alpha^2)\sigma = t\sigma$, so $t\sigma$ also belongs to $T(G)$. This shows that $T(G)$ is a closed subgroup of G; as such, it is itself a Σ-group. If β denotes the restriction of α to $T(G)$, then $(T(G), \beta) \in [\mathsf{A}_2\Sigma]$, and so (2.4) implies the statement of the lemma.

(3.4) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4\Sigma]$, then every element g of G can be written, in one and only one way, as $g = ts$ with $t \in T(G)$, $s \in S(G)$.*

Proof. Let us first assume that $g = ts$, $t \in T(G)$, $s \in S(G)$. Then $g^{-1}\alpha^2 = (s^{-1}t^{-1})\alpha^2 = st^{-1}$, so $g^{-1}\alpha^2 g = s^2$, $s = (g^{-1}\alpha^2 g)\sigma$; $s^{-1} = (s^2)^{-1}\sigma = (g^{-1}g\sigma^2)\sigma$, $t = gs^{-1} = g(g^{-1}g\alpha^2)\sigma$. This shows that no element of G can be written in the form $g = ts$ in more than one way.

On the other hand, using again that $(x\sigma)^{-1} = (x^{-1})\sigma$ with $x = g^{-1}\alpha^2 g$, we always have that $g = g \cdot (g^{-1}g\alpha^2)\sigma \cdot (g^{-1}\alpha^2 g)\sigma$; so we have to prove only that $g(g^{-1}g\alpha^2)\sigma = t \in T(G)$ and $(g^{-1}\alpha^2 g)\sigma = s \in S(G)$ for every g in G. (B.5.3) enables us to argue that

$$\big((g^{-1}\alpha^2 g)\sigma\big)\alpha^2 = \big((g^{-1}\alpha^2 g)\alpha^2\big)\sigma = (g^{-1}g\alpha^2)\sigma = \big((g^{-1}\alpha^2 g)\sigma\big)^{-1},$$

so indeed $(g^{-1}\alpha^2 g)\sigma = s \in S(G)$; using this,

$$(gs^{-1})\alpha^2 (gs^{-1})^{-1} = g\alpha^2 s s g^{-1} = g\alpha^2 (g^{-1}\alpha^2 g) g^{-1} = 1,$$

so that $(gs^{-1})\alpha^2 = gs^{-1}$, $gs^{-1} = t \in T(G)$.

(3.5) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4\Sigma]$, then the subgroup $H(G)$ generated by $S(G)$ contains the derived group G' of G.*

Proof. First one shows that $H(G)$ is normal in G. If $s \in S(G)$ and $t \in T(G)$, then $(s^t)\alpha^2 = (s^{-1})^t = (s^t)^{-1}$, so that $s^t \in S(G)$; whence $S(G)^{T(G)} = S(G)$. As (3.4) gives $G = T(G)\,S(G)$, we have that $S(G)^G = S(G)^{T(G)\,S(G)} = S(G)^{S(G)} \subseteq H(G)$,

and so indeed $H(G)^G = H(G)$. From (3.4) it follows also that $G = T(G)H(G)$, whence

$$G/H(G) = T(G)H(G)/H(G) \cong T(G)/\big(T(G) \cap H(G)\big),$$

which is abelian according to (3.3). This proves that $H(G)$ contains G'.

On locally nilpotent A_4-groups we have two similar lemmas. The first of these can be proved in the same way as (3.3), except that one has to use (2.5) instead of (2.4).

(3.6) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4]$ and if G is locally nilpotent, then $T(G)$ is abelian and $t\alpha = t^{-1}$ for every t in $T(G)$.*

(3.7) Lemma. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4]$ and if G is locally nilpotent, then G has no element of order two.*

Proof. Take any element x of G such that $x^2 = 1$, and consider the subgroup K generated by x, $x\alpha$, $x\alpha^2$ and $x\alpha^3$. Then K is generated by a finite number of elements whose orders divide 2, therefore K is nilpotent, finite, and its order is a power of 2. On the other hand, α restricted to K is still a regular automorphism of order dividing 4, so that (3.2) and (B.5.1) imply that the order of K is odd. Hence the order of K can be only 2^0, proving that $x = 1$.

In the following two lemmas we turn to direct preparation for Section 4. There, in course of investigating a certain nilpotent A_4-group, we shall need homomorphic images of lower nilpotency class which admit regular automorphisms induced by the particular automorphism of the original group. Here we prove that such images are provided, for instance, by the homomorphisms corresponding to the closures $\Delta_i(G)$ of the members $\Gamma_i(G)$ of the lower central series of the group; also, that these closures $\Delta_i(G)$ form a central series of the group which inherits an analogue of the well-known property $[\Gamma_i(G), \Gamma_j(G)] \leqq \Gamma_{i+j}(G)$ of the lower central series of the group.

(3.8) Lemma. *If G is a nilpotent group without elements of order two, then $[\Delta_i(G), \Delta_j(G)] \leqq \Delta_{i+j}(G)$ (for every $i, j = 1, 2, \ldots$).*

Proof. This is done by induction on the nilpotency class c of G. For $c = 1$ the statement is obvious. If $c > 1$, we assume that the statement holds whenever the class of the group considered is less than c. — We have $G = Z_c(G)$, $\Gamma_{c+1}(G) = \Delta_{c+1}(G) = \Delta_{c+2}(G) = \cdots = E$, $\Gamma_c(G) \leqq Z_1(G)$. From (B.9.4) we know that $G \in [\Pi]$; by (B.9.2), $Z_1(G)$ is an ideal, so it is a fortiori closed. Hence $\Delta_c(G) = cl\big(\Gamma_c(G)\big) \leqq cl\big(Z_1(G)\big) = Z_1(G)$, so $[\Gamma_i(G), \Delta_c(G)] = E$; $\Delta_c(G)$ is closed and normal in G, so by (B.9.5) it is an ideal; finally, if $i \leqq c$ then $\Delta_i(G) = cl\big(\Gamma_i(G)\big) \geqq cl\big(\Gamma_c(G)\big) = \Delta_c(G)$. Thus (B.10.2) may be applied: $\Delta_i\big(G/\Delta_c(G)\big) = cl\big(\Gamma_i(G/\Delta_c(G))\big) = cl\big(\Gamma_i(G)\,\Delta_c(G)/\Delta_c(G)\big) = cl\big(\Gamma_i(G)\big)/\Delta_c(G) = \Delta_i(G)/\Delta_c(G)$ for $i \leqq c$, and this can be extended to any i by writing it in the form $\Delta_i\big(G/\Delta_c(G)\big) = \Delta_i(G)\,\Delta_c(G)/\Delta_c(G)$. Now $G/\Delta_c(G)$ is of class $c-1$, so the induction hypothesis gives that

$$[\Delta_i\big(G/\Delta_c(G)\big), \Delta_j\big(G/\Delta_c(G)\big)] \leqq \Delta_{i+j}\big(G/\Delta_c(G)\big),$$
$$[\Delta_i(G)\,\Delta_c(G)/\Delta_c(G), \Delta_j(G)\,\Delta_c(G)/\Delta_c(G)] \leqq \Delta_{i+j}(G)\,\Delta_c(G)/\Delta_c(G),$$
$$[\Delta_i(G)\,\Delta_c(G), \Delta_j(G)\,\Delta_c(G)] \leqq \Delta_{i+j}(G)\,\Delta_c(G);$$

whence, using that $\Delta_c(G) \leqq Z_1(G)$, one obtains that $[\Delta_i(G), \Delta_j(G)] \leqq \Delta_{i+j}(G)\Delta_c(G)$. For $i+j \leqq c$ the right hand side is simply $\Delta_{i+j}(G)$ (since $\Delta_{i+j}(G) \geqq \Delta_c(G)$), so for this case the statement is verified. If however $i+j > c$, then $\Delta_{i+j}(G) = E$, and from $[\Gamma_i(G), \Gamma_j(G)] \leqq \Gamma_{i+j}(G) = E$ it follows by (B.9.1) that also $[\Delta_i(G), \Delta_j(G)] = E$. This completes the proof.

(3.9) Lemma. *Assume that* $(G, \alpha) \in [\mathfrak{A}_4]$ *and that* G *is nilpotent. Then* α *induces regular automorphisms* α_i *on the* $G/\Delta_{i+1}(G)$, *for every* $i = 1, 2, \ldots$.

Proof. This again is done by induction on the nilpotency class c of G. If $c = 1$, we have nothing to prove: $G/\Delta_{i+1}(G) = G$, $\alpha_i = \alpha$ for all i. If $c > 1$, let us assume that the statement of the lemma is true whenever the class of the group considered is less than c. The cases $i = c, c+1, \ldots$ are again obvious.

Take first $G/\Delta_c(G)$; since $\Delta_c(G)$ is characteristic, the mapping α_{c-1} defined by $\big(g\Delta_c(G)\big)\alpha_{c-1} = (g\alpha)\Delta_c(G)$ is indeed an automorphism of $G/\Delta_c(G)$. If $(g\alpha)\Delta_c(G) = g\Delta_c(G)$, then $g\alpha = gd$ with some $d \in \Delta_c(G)$. (3.7) enables us to recall from the proof of (3.8) that $\Delta_c(G) \leqq Z_1(G)$. Thus $d \in Z_1(G)$, and so $(d\, d\alpha\, d\alpha^2\, d\alpha^3)\alpha = d\, d\alpha\, d\alpha^2\, d\alpha^3$; as α is regular, this means that $d\, d\alpha\, d\alpha^2 d\alpha^3 = 1$. Using this relation and the fact that also $d\alpha$, $d\alpha^2$, $d\alpha^3 \in Z_1(G)$, we get for $h = d^{-1}\alpha^2 \cdot d^{-2}\alpha \cdot d^{-3}$ that

$$h^{-1} h\alpha = d^3 d^2\alpha\, d\alpha^2 d^{-1} \alpha^3 d^{-2} \alpha^2 d^{-3} \alpha = d^4 (d\, d\alpha\, d\alpha^2\, d\alpha^3)^{-1} = d^4.$$

On the other hand, $g\alpha = gd$ and $d \in Z_1(G)$ yield $g^4\alpha = g^4 d^4$. Thus $d^4 = g^{-4} g^4 \alpha = h^{-1} h\alpha$, therefore $(hg^{-4})\alpha = hg^{-4}$; as α is regular, we have in fact that $g^4 = h \in \Delta_c(G)$. Since $\Delta_c(G)$ is closed, this can only hold if g is in $\Delta_c(G)$. So we have proved that α_{c-1} is regular on $G/\Delta_c(G)$.

For $i < c-1$ we refer to the induction hypothesis. This applies to $G/\Delta_c(G)$ and α_{c-1}: the automorphisms induced by α_{c-1} on the $G/\Delta_c(G)/\Delta_{i+1}\big(G/\Delta_c(G)\big)$ are regular. Recalling from the proof of (3.8) that $\Delta_{i+1}\big(G/\Delta_c(G)\big) = \Delta_{i+1}(G)/\Delta_c(G)$, one sees that these are in fact automorphisms of the $G/\Delta_c(G)/\Delta_{i+1}(G)/\Delta_c(G) \cong G/\Delta_{i+1}(G)$, induced by α through α_{c-1}, and this was to be proved.

4. A class of locally nilpotent $\mathfrak{A}_4$-groups

Following our set course, we now proceed with the study of an arbitrary group H which has a regular automorphism α of order four, such that the elements inverted by α^2 generate the whole of H. It seems natural to start by imposing strong conditions on H. For instance, if we assume that H is finite and nilpotent, can we get a bound for its nilpotency class? The answer is in the affirmative, and with the help of the lemmas presented in the previous section the whole argument carries over to the locally nilpotent case. We give it at once in this general form.

(4.0) Theorem. *If* H *is a locally nilpotent group, if* $(H, \alpha) \in [\mathfrak{A}_4]$, *and if the elements that are inverted by* α^2 *generate* H, *then* H *is nilpotent of class at most three.*

The proof splits into several steps and occupies the rest of the section, where we always assume that the premisses of the theorem hold.

(4.1.1) The first step is a reduction. Since H is generated by $S(H)$, $\Gamma_4(H)$ is generated by all commutators of the form $[s_1, \dots, s_4]$ $(s_1, \dots, s_4 \in S(H))$ together with their conjugates in H. So if we prove that $[s_1, \dots, s_4] = 1$ for any four elements $s_1, \dots, s_4$ of $S(H)$, then in fact we prove the theorem. To achieve this, we consider four arbitrary (but for the rest of the proof fixed) elements $s_1, \dots, s_4$ of $S(H)$, and then the subgroup K generated by $s_1, \dots, s_4, s_1\alpha, \dots, s_4\alpha$, and prove that K is nilpotent of class at most three.

(4.1.2) If β denotes the restriction of α to K, then $(K, \beta) \in [\mathsf{A}_4]$. As a finitely generated subgroup of H, K is nilpotent of some class c. Also, $S(K) = S(H) \cap K$, so K is generated by $S(K)$. From (3.7) and (B.9.4) it follows that K is a Π-group.

We want to prove that $c \leqq 3$; it is convenient to restrict ourselves to the case $c \geqq 3$ and then prove that $c = 3$.

(4.1.3) In the rest of the proof, we write briefly I_i, Δ_i, and Z_i for $\Gamma_i(K)$, $\Delta_i(K)$, and $Z_i(K)$. From (3.8) it follows that the Δ_i form a central series of K; as the length of such a series cannot be less than c, and as $\Delta_{c+1} = E$, all the $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{c+1}$ are distinct. According to (3.9), β induces regular automorphisms β_i on the factor groups $K_i = K/\Delta_{i+1}$ $(i \leqq c)$. Each K_i is nilpotent of class exactly i, and from (B.9.5) it follows that each K_i is a Π-group.

Almost all the steps that follow are concerned with the derivation of congruences between commutators of arbitrary elements of $S(K)$. We use throughout without further mention that congruences modulo Γ_i automatically hold modulo Δ_i, and also that the Δ_i are characteristic in K.

Let then x, y, u, v denote arbitrary elements of $S(K)$; in this case also $x\beta, y\beta, u\beta, v\beta \in S(K)$.

(4.2.1) $[x, y]\beta \equiv [x, y]^{-1} \bmod \Delta_3$.

Proof. Since $[x, y]\beta^2 = [x^{-1}, y^{-1}] \equiv [x, y] \bmod \Delta_3$, we have that $([x, y]\Delta_3)\beta_2^2 = [x, y]\Delta_3$; therefore $[x, y]\Delta_3 \in T(K_2)$. According to (4.1.3), (3.6) applies to $T(K_2)$ and gives that $([x, y]\Delta_3)\beta_2 = ([x, y]\Delta_3)^{-1}$, whence $([x, y]\beta)\Delta_3 = [x, y]^{-1}\Delta_3$ and so (4.2.1) holds.

(4.2.2) $[x, y\beta] \equiv [x\beta, y] \bmod \Delta_3$.

Proof. $[x, y\beta]\beta = [x\beta, y^{-1}] \equiv [x\beta, y]^{-1} \bmod \Delta_3$; on the other hand, by (4.2.1), $[x, y\beta]\beta \equiv [x, y\beta]^{-1}$. Comparing these we get that $[x, y\beta]^{-1} \equiv [x\beta, y]^{-1}$, so indeed $[x, y\beta] \equiv [x\beta, y] \bmod \Delta_3$.

(4.3.1) $[a, b, c] \equiv [a, c, b][b, c, a]^{-1} \bmod \Delta_4$, for every $a, b, c \in K$.

This follows from (2.1).

(4.3.2) $[x, y, u\beta] \equiv [x, u, y\beta][y, u, x\beta]^{-1} \bmod \Delta_4$.

Proof. Apply (4.3.1) with $a=x$, $b=y$, $c=u$, and map the result by β:

$$[[x, y]\beta, u\beta] \equiv [[x, u]\beta, y\beta]\,[[y, u]\beta, x\beta]^{-1} \bmod \Delta_4.$$

Now use (4.2.1) and (3.8):

$$[[x, y]^{-1}, u\beta] \equiv [[x, u]^{-1}, y\beta]\,[[y, u]^{-1}, x\beta]^{-1} \bmod \Delta_4,$$

$$[x, y, u\beta]^{-1} \equiv [x, u, y\beta]^{-1}\,[y, u, x\beta] \bmod \Delta_4.$$

Taking inverses on both sides, we obtain the statement.

Similar reasoning leads to the following three congruences:

(4.3.3) $[x, y, u\beta] \equiv [x, u\beta, v]\,[y, u\beta, x]^{-1} \bmod \Delta_4.$

(4.3.4) $[x, u, y\beta] \equiv [x, y\beta, u]\,[y, u\beta, x] \bmod \Delta_4.$

(4.3.5) $[y, u, x\beta] \equiv [x, y\beta, u]^{-1}\,[x, u\beta, y] \bmod \Delta_4.$

(4.3.6) $[x, y, u\beta] \equiv [x, y\beta, u] \bmod \Delta_4.$

Proof. By (4.3.2),

$$[x, y, u\beta]^2 \equiv [x, y, u\beta]\,[x, u, y\beta]\,[y, u, x\beta]^{-1} \bmod \Delta_4.$$

Substituting the terms on the right hand side from (4.3.3), (4.3.4), and (4.3.5), after cancellations one gets that $[x, y, u\beta]^2 \equiv [x, y\beta, u]^2 \bmod \Delta_4$. So

$$([x, y, u\beta]\,\Delta_4)^2 = ([x, y\beta, u]\,\Delta_4)^2$$

and, since $K_3 \in [\Pi]$, this implies that

$$[x, y, u\beta]\,\Delta_4 = [x, y\beta, u]\,\Delta_4.$$

(4.3.7) $[x, y\beta, u\beta]^{-1} \equiv [x, y, u] \bmod \Delta_4.$

This follows from (4.3.6), using (3.8).

(4.4.1) $[x, y, u, v] \equiv [x, y, v, u] \bmod \Delta_5.$

Proof. By (4.2.1), there exist $z, w \in \Delta_3$ such that $[x, y]\beta = [x, y]^{-1}z$ and $[u, v]\beta = [u, v]^{-1}w$. Using (3.8) we obtain that

$$[x, y, [u, v]]\,\beta = [[x, y]^{-1}z, [u, v]^{-1}w] \equiv [[x, y]^{-1}, [u, v]^{-1}] \equiv [x, y, [u, v]] \bmod \Delta_5.$$

Hence $([x, y, [u, v]]\,\Delta_5)\beta_4 = [x, y, [u, v]]\,\Delta_5$, and as β_4 is regular on K_4, this can only hold if $[x, y, [u, v]] \in \Delta_5$. Similarly one verifies that $[u, v^{-1}, [x, y]] \in \Delta_5$. Now apply (2.1) mod Δ_5 with $a=[x, y]$, $b=u$, $c=v$:

$$[x, y, u^{-1}, v]^u\,[u, v^{-1}, [x, y]]^v\,[v, [x, y]^{-1}, u]^{[x, y]} = 1$$

gives that

$$[x, y, u^{-1}, v]\,[v, [y, x], u] \equiv 1 \bmod \Delta_5,$$

whence

$$[x, y, u, v]^{-1}\,[y, x, v, u]^{-1} \equiv 1, \qquad [x, y, u, v]^{-1}\,[x, y, v, u] \equiv 1 \bmod \Delta_5.$$

(4.4.2) $[x, y, u, v] \in \Delta_5.$

Proof. $[x, y, u, v]\beta = [[x, y]\beta, u\beta, v\beta]$

$\equiv [x, y, u\beta, v\beta]^{-1} \bmod \Delta_5$, by (4.2.1) and (3.8),

$\equiv [x, y\beta, u, v\beta]^{-1} \bmod \Delta_5$, by (4.3.6) and (3.8),

$\equiv [x, y\beta, v\beta, u]^{-1} \bmod \Delta_5$, by (4.4.1),

$\equiv [x, y, v, u] \bmod \Delta_5$, by (4.3.7) and (3.8),

$\equiv [x, y, u, v] \bmod \Delta_5$, by (4.4.1).

So $([x, y, u, v]\Delta_5)\beta_4 = [x, y, u, v]\Delta_5$; as β_4 is regular on K_4, this can only hold if $[x, y, u, v]\Delta_5 = \Delta_5$.

(4.4.3) *K is nilpotent of class three.*

Proof. By (4.4.2), all the 4-th commutators of the generators $s_1, \ldots, s_4$, $s_1\alpha, \ldots, s_4\alpha$ of K belong to Δ_5; since Δ_5 is normal in K, it contains also their conjugates. Thus Δ_5 contains Γ_4, whence also $\Delta_4 = cl(\Gamma_4) \leqq \Delta_5$, so that in fact $\Delta_4 = \Delta_5$. As the central series $K = \Delta_1 > \cdots > \Delta_{c+1} = E$ was properly descending, this implies that $\Delta_4 = \Delta_5 = E$, a fortiori that $\Gamma_4 = E$, $c \leqq 3$. We assumed that $c \geqq 3$, so in fact $c = 3$.

In view of (4.4.1), this completes the proof of the theorem.

5. A class of (locally) finite and soluble A_4-groups

In the preceding section we started investigating a special class of A_4-groups: a group H belonged to this class if it had a regular automorphism α of order four, such that the elements that were inverted by α^2 generated the whole group H. There we worked under the additional assumption that H was locally nilpotent. Now we pursue the study of *finite* groups of this class, weakening the condition of nilpotency to solubility. Here we have to apply a very finite method: induction on the order of the group. Thus, though the problem is still of local character and admits a generalization in this direction, we cannot, as we did in the preceding section, deal with the generalized case at once.

Let us assume therefore, for the time being, that H is a finite group and that $(H, \alpha) \in [A_4]$. It will be convenient to write simply Γ_i instead of $\Gamma_i(H)$, and when it can be done without danger of ambiguity we shall also use T and S instead of $T(H)$ and $S(H)$. As usual, curly brackets denote (sub)-groups generated by the elements, or by the elements of the sets, listed between them. Let us recall the preparatory results concerning this case:

by (3.2) and (B.5.1), $H \in [\mathfrak{S}]$, and the order of H is odd; so,

by (3.3), T is abelian, and $t\alpha = t^{-1}$ for every t in T;

by (3.4), $H = TS$;

by (2.3), every element h of H can be written in the form $h = x^{-1}x\alpha$ with some x in H;

by (3.1), $h\alpha = h^x$ (for $h, x \in H$) can only hold if $h = 1$.

Then we need four lemmas.

(5.1) Lemma. $[s^t, s\alpha]=[t, s, s\alpha]=1$ *for every* $t\in T$, $s\in S$.

Proof. Let t, s be arbitrary elements of T, S, respectively. Then

$$[s^t, s\alpha]\alpha=[(s\alpha)^{t^{-1}}, s^{-1}]=[s, (s\alpha)^{t^{-1}}]^{s^{-1}}=[s^t, s\alpha]^{t^{-1}s^{-1}},$$

so by (3.1) we have $[s^t, s\alpha]=1$. In particular, $[s, s\alpha]=1$. Thus

$$1=[s^t, s\alpha]=[s[s, t], s\alpha]=[s, s\alpha]^{[s,t]}[s, t, s\alpha]=[[t, s]^{-1}, s\alpha],$$

but then also $[t, s, s\alpha]=1$.

(5.2) Lemma. $[t, s, s, s]=[t, s, s, s\alpha]=1$ *for every* $t\in T$, $s\in S$.

Proof. Take any t from T and any s from S. Define $H_1=\{s, s^t\}$, $H_2=H_1\alpha=\{s\alpha, (s\alpha)^{t^{-1}}\}$, $H_3=\{H_1, H_2\}$, $T_i=H_i\cap T$, $S_i=H_i\cap S$ $(i=1, 2, 3)$. Then $H_i\alpha^2=H_i$ for each i; since the order of H is odd, so is the order of H_i, and then $H_i\in[\Sigma]$. As in (3.4), one proves that $H_i=T_iS_i$. From (5.1) it follows that $[H_1, H_2]=E$, giving that $H_1\cap H_2\leqq Z_1(H_3)$. Since $T_1=T_1\alpha=T_2$, $T_1\leqq H_1\cap H_2\leqq Z_1(H_3)$; in particular, T_1 is normal in H_1. Consider now H_1/T_1. Define $(hT_1)\beta=(h\alpha^2)T_1$ for each h in H_1; since $T_1\alpha^2=T_1$ and $H_1\alpha^2=H_1$, β is an automorphism of H_1/T_1. Assume $(hT_1)\beta=hT_1$, that is, $h\alpha^2=ht$ for some $h\in H_1$, $t\in T_1$. Then $t=h^{-1}h\alpha^2$; but we have seen in the proof of (3.4) that elements of this form belong to S, so $t\in T\cap S=E$. It follows from this that $h\alpha^2=h$, $h\in T_1$, showing that β is regular. But then (3.2) and (2.4) imply that H_1/T_1 is abelian, $H_1'\leqq T_1$. Similarly $H_2'\leqq T_2=T_1$; as we have already seen that $[H_1, H_2]=E$ we get also that $H_3'=\{H_1', H_2'\}\leqq T_1\leqq Z_1(H_3)$. Now

$$[[t, s]^{-1}, s]=[s, t, s]=[s, s]^{[s,t]}[s, t, s]=[s[s, t], s]=[s^t, s]\in H_3'\leqq Z_1(H_3),$$

but then also $[t, s, s]\in Z_1(H_3)$, and our statement follows.

(5.3) Lemma. *Let N be any normal subgroup of H such that $T\cap Z_1(N)\neq E$. If s is an arbitrary element of S, and if $N_s=\{N, s, s\alpha\}$, then $Z_1(N_s)\neq E$.*

Proof. Take any nontrivial element t from $T\cap Z_1(N)$. As $Z_1(N)$ is normal in H, $[t, s, s]\in Z_1(N)$; further, by (5.2), $[t, s, s, s]=[t, s, s, s\alpha]=1$, so in fact $[t, s, s]\in Z_1(N_s)$. If $[t, s, s]=1$, then we consider $[t, s]$; this is also in $Z_1(N)$, and, by (5.1), $[t, s, s\alpha]=1$, so that $[t, s]\in Z_1(N_s)$. Finally, if $[t, s]=1$, then also $1=[t, s]\alpha=[t^{-1}, s\alpha]$, whence $[t, s\alpha]=1$, proving that $t\in Z_1(N_s)$. Therefore one of $[t, s, s]$, $[t, s]$, and t is a nontrivial element in $Z_1(N_s)$.

(5.4) Lemma. *If N is any subset of H such that $N^S\subseteq S$, then $[N, S]=E$.*

Proof. For any n in N and any s in S, $n^s\in S$, so that $(n^s)\alpha^2=(n^s)^{-1}$; on the other hand, $n=n^1\in S$ implies that $(n^s)\alpha^2=(n^{-1})^{s^{-1}}=(n^{s^{-1}})^{-1}$. So $(n^s)\alpha^2=(n^s)^{-1}=(n^{s^{-1}})^{-1}$, whence $n^s=n^{s^{-1}}$, so that $n^{s^2}=n$, $[n, s^2]=1$. Thus by (B.5.6) also $[n, s]=1$.

Now we are ready to prove the second theorem.

(5.5) Theorem. *Let H be a finite soluble group, $(H, \alpha)\in[\mathsf{A}_4]$, and assume that the elements that are inverted by α^2 generate H. Then H is nilpotent of class at most three.*

We prove this by induction on the order of H. The unit group provides a starting point, so we only have to give the inductive step. For this we assume that the order of H is greater than 1, and that the theorem holds whenever the order of the group considered is less than the order of H.

Again we split the proof into several steps.

(5.5.1) *If N is a normal subgroup of H such that $N\alpha = N$ and $N \neq E$, then $\Gamma_4(H)$ is contained in N.*

Proof. Define $(hN)\beta = (h\alpha)N$ for every $hN \in H/N$; clearly β is an automorphism of H/N. If $(hN)\beta = hN$, that is, if $h\alpha = hn$ for some h in H and n in N, then $h^{-1}h\alpha = n$. If γ means the restriction of α to N, then $(N, \gamma) \in [\mathsf{A}_4]$. According to (2.3), $n = m^{-1}m\alpha$ with some m in N; but then $n = h^{-1}h\alpha = m^{-1}m\alpha$, whence $(hm^{-1})\alpha = hm^{-1}$; as α is regular, this can only hold if $hm^{-1} = 1$, $h = m \in N$. Thus β is regular on H/N; further, $S(H/N) = S(H)N/N$ generates H/N, so that the inductive hypothesis applies to H/N: $\Gamma_4(H/N) = E$. But $\Gamma_4(H/N) = \Gamma_4(H)N/N$, so in fact $\Gamma_4(H) \leqq N$.

(5.5.2) *If $Z_1(H') = E$, then $H' = E$, so that $\Gamma_4(H) = E$.*

Proof. Suppose that, on the contrary, $H' \neq E$, but $Z_1(H') = E$. Then also $H'' \neq E$. As α can be restricted to H', and $T(H') = T(H) \cap H'$, $S(H') = S(H) \cap H'$, (3.4) gives that $H' = \big(T(H) \cap H'\big)\big(S(H) \cap H'\big)$. Since $T(H) \cap H'$ is abelian but H' is not, $S(H) \cap H' \neq E$. Also H'' is contained in $\{S(H) \cap H'\}$, by (3.5). Consider now $\{S(H) \cap H'\}$. This is a finite soluble group, in fact a proper subgroup of H (being contained in H'). Further, it is an α-invariant subgroup, and so α can be restricted to $\{S(H) \cap H'\}$ to show that it is an A_4-group. Finally, this group is generated by elements that are inverted by α^2. Hence the induction hypothesis implies that $\{S(H) \cap H'\}$ is nilpotent; since H'' is contained in $\{S(H) \cap H'\}$, it is nilpotent too, so that $Z_1(H'') \neq E$. As $Z_1(H'')$ is characteristic in H, (5.5.1) ensures that $\Gamma_4 = \Gamma_4(H)$ is contained in $Z_1(H'')$. On the other hand we know that $H'' \leqq \Gamma_4$, therefore $\Gamma_4 = Z_1(H'') = H'' \neq E$.

Now α can be restricted to Γ_4, so that Γ_4 is an A_4-group and $T(\Gamma_4) = T(H) \cap \Gamma_4$, $S(\Gamma_4) = S(H) \cap \Gamma_4$; therefore, by (3.4), $\Gamma_4 = \big(T(H) \cap \Gamma_4\big)\big(S(H) \cap \Gamma_4\big)$. If $T(H) \cap \Gamma_4 = E$, then $\Gamma_4 = S(H) \cap \Gamma_4 \leqq S(H)$; as Γ_4 is normal in H, $\Gamma_4^{S(H)} = \Gamma_4 \leqq S(H)$ too, so that (5.4) says that $[\Gamma_4, S(H)] = E$. Since $S(H)$ generates the whole of H, this means that $[\Gamma_4, H] = E$; a fortiori $[\Gamma_4, H'] = E$, whence $\Gamma_4 \leqq Z_1(H')$; but $\Gamma_4 \neq E$ while $Z_1(H') = E$, a contradiction. It follows therefore that $T(H) \cap \Gamma_4 \neq E$.

This is the same as saying that $Z_1(H'') \cap T(H) \neq E$. For any s in $S(H) \cap \Gamma_3$, the application of (5.3) with $N = H'' = \Gamma_4$ gives that $Z_1\big(\{\Gamma_4, s, s\alpha\}\big) \neq E$. Now $\{\Gamma_4, s, s\alpha\}$ is normal in H (because $s^h = s[s, h]$, $[s, h] \in \Gamma_4$ for any h in H, etc.), it is also α-invariant, and $Z_1\big(\{\Gamma_4, s, s\alpha\}\big)$ is characteristic in $\{\Gamma_4, s, s\alpha\}$; hence (5.5.1) can be applied to $Z_1\big(\{\Gamma_4, s, s\alpha\}\big)$ to conclude that $Z_1\big(\{\Gamma_4, s, s\alpha\}\big)$ must contain Γ_4. Of this we only need only that $[\Gamma_4, s] = E$ for any $s \in S(H) \cap \Gamma_3$, that is, that $[\Gamma_4, S(H) \cap \Gamma_3] = E$.

Consider next Γ_3. Again it follows that $\Gamma_3 = \big(T(H) \cap \Gamma_3\big)\big(S(H) \cap \Gamma_3\big)$. Since $[T(H) \cap \Gamma_4,\ T(H) \cap \Gamma_3] \leqq T(H)' = E$ and $[T(H) \cap \Gamma_4,\ S(H) \cap \Gamma_3] = E$, we know

that $[T(H)\cap\Gamma_4, \Gamma_3]=E$. This shows that $T(H)\cap Z_1(\Gamma_3)\geqq T(H)\cap\Gamma_4\neq E$. Choose now any s from $S(H)\cap H'$, and apply (5.3) with $N=\Gamma_3$ to obtain that $Z_1(\{\Gamma_3, s, s\alpha\})\neq E$. Again we see that $\{\Gamma_3, s, s\alpha\}$ is normal in H and so on, finally (5.5.1) can be applied to prove that $\Gamma_4\leqq Z_1(\{\Gamma_3, s, s\alpha\})$. This means that $[\Gamma_4, s]=E$ for any s in $S(H)\cap H'$, that is, $[\Gamma_4, S(H)\cap H']=E$. But we have seen that $H'=(T(H)\cap H')(S(H)\cap H')$, so the relations $[T(H)\cap\Gamma_4, T(H)\cap H']\leqq T(H)'=E$ and $[T(H)\cap\Gamma_4, S(H)\cap H']=E$ show that $[T(H)\cap\Gamma_4, H']=E$, $Z_1(H')\geqq T(H)\cap\Gamma_4\neq E$. Thus we have arrived at a statement contradicting the initial hypothesis, and therefore (5.5.2) must hold.

(5.5.3) *If* $Z_1(H')\neq E$, *then* $\Gamma_4(H)=E$.

Proof. As $Z_1(H')$ is characteristic in H, (5.5.1) implies at once that $\Gamma_4\leqq Z_1(H')$. Noting that α can be restricted to $Z_1(H')$, etc., one obtains that $Z_1(H')=(T(H)\cap Z_1(H'))(S(H)\cap Z_1(H'))$. If $T(H)\cap Z_1(H')=E$, then $Z_1(H')=S(H)\cap Z_1(H')\leqq S(H)$; since therefore also $Z_1(H')^{S(H)}=Z_1(H')\leqq S(H)$, (5.4) proves that $[Z_1(H'), S(H)]=E$. As $S(H)$ generates the whole of H, this means that $[Z_1(H'), H]=E$, whence $\Gamma_4\leqq Z_1(H')\leqq Z_1(H)$, $\Gamma_5=E$. — If on the other hand $T(H)\cap Z_1(H')\neq E$, then we can apply (5.3) to $N=H'$ and to any s in $S(H)$; thus $Z_1(\{H', s, s\alpha\})\neq E$. Now $\{H', s, s\alpha\}$ is obviously normal in H, so that also $Z_1(\{H', s, s\alpha\})$ is normal in H; further, it is easy to see that $Z_1(\{H', s, s\alpha\})$ is α-invariant, and then (5.5.1) implies that Γ_4 is contained in $Z_1(\{H', s, s\alpha\})$. Of this we only need that $[\Gamma_4, s]=E$ for every s in $S(H)$; since $S(H)$ generates the whole of H, this means that Γ_4 is in the centre of H, whence $\Gamma_5=E$. — In either case we found that $\Gamma_5=E$, but then (4.0) implies that also $\Gamma_4=E$.

So (5.5.2) and (5.5.3) prove that $\Gamma_4=E$, H is nilpotent of class at most three. This completes the proof of the theorem.

Now let us turn to the infinite case.

(5.6) Theorem. *Let H be a periodic locally soluble group, let $(H, \alpha)\in[\mathsf{A}_4]$, and assume that the elements that are inverted by α^2 generate H. Then H is nilpotent of class at most three.*

Using that a periodic locally soluble group is always locally finite, this theorem can be derived from (5.5) by a routine argument (similar to the one used in the reduction part of the proof of (4.0)).

6. The general case

Let us finally utilize the rather special results of the preceding two sections. Their usefulness is apparent in the light of the fact that if $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_4\Sigma]$ then G' is contained in the subgroup $H(G)$ generated by $S(G)$ and so G' inherits the nilpotency property of $H(G)$. This immediate consequence on G' is further improved in the following theorem.

(6.1) Theorem. *If $(G, \alpha)\in[\mathsf{A}_4\Sigma]$, and if the subgroup $H(G)$ generated by the elements of G which are inverted by α^2 is nilpotent, then the second derived group of G is contained in the centre of G.*

The proof takes several steps. Instead of $H(G)$ we write briefly H.

(6.1.1) $\Delta_4(H)=E$. This is true because α can be restricted to H, so that (4.0) proves that $\Gamma_4(H)=E$; square roots being unique in H, it follows that also $\Delta_4(H)=E$.

Let Δ be the closure of $\Gamma_3(H)$ in G. As a closed subgroup of the Σ-group G, Δ is itself a Σ-group. H is clearly α-invariant and, according to (3.5), H is normal in G; as $\Gamma_3(H)$ is characteristic in H, it is also normal and α-invariant in G, and then so is Δ.

(6.1.2) $[\Delta, H]=E$.

Proof. Take Δ as the union of the ascending chain of subgroups

$$\Delta^{(1)}\leqq\cdots\leqq\Delta^{(i)}\leqq\cdots$$

defined inductively as follows. Let $\Delta^{(1)}$ be $\Gamma_3(H)$; if $\Delta^{(i)}$ is already defined, then let $\Delta^{(i+1)}$ be the subgroup generated by all x in G such that $x^2\in\Delta^{(i)}$. Now (6.1.1) implies that $[\Delta^{(1)}, H]=E$, and if $[\Delta^{(i)}, H]=E$, then (B.5.6) implies that also $[\Delta^{(i+1)}, H]=E$. So we have that $[\Delta^{(i)}, H]=E$ for all i, and so in fact $[\Delta, H]=E$.

For the rest of the proof of the theorem, x, y, u, v denote arbitrary elements of $S(G)$, while t and t' are arbitrary elements of $T(G)$.

(6.1.3) $[x, y]\alpha\equiv[x, y]^{-1} \bmod \Delta$.

Proof. Let us work out $[x, y]\alpha^2$:

$$\begin{aligned}
[x, y]\alpha^2 &= [x^{-1}, y^{-1}] = [x, y]^{y^{-1}x^{-1}} = [x, y]\,[x, y, y^{-1}x^{-1}]\\
&= [x, y]\,[x, y, x^{-1}]\,[x, y, y^{-1}]^{x^{-1}}\\
&= [x, y]\left([x, y, x]^{-1}\right)^{x^{-1}}\left([x, y, y]^{-1}\right)^{y^{-1}x^{-1}}\\
&= [x, y]\,[x, y, x]^{-1}\,[x, y, y]^{-1} \qquad \text{by (6.1.2)},\\
&= [x, y]\left([x, y, y]\,[x, y, x]\right)^{-1};
\end{aligned}$$

with $d=\left([x, y, y]\,[x, y, x]\right)\sigma\in\Delta$ this can be written as $[x, y]\alpha^2=[x, y]d^2$. From the proof of (3.4) we know that $(g^{-1}g\alpha^2)\sigma\in S(G)$, $g(g^{-1}g\alpha^2)\sigma\in T(G)$ for every g in G. Applying this to $g=[x, y]$, we get that $d^{-1}\in S(G)$ and that $[x, y]d^{-1}\in T(G)$. Now (3.3) yields that $\left([x, y]d^{-1}\right)\alpha=\left([x, y]d^{-1}\right)^{-1}$, whence $[x, y]\alpha=d[x, y]^{-1}d\alpha$; using (6.1.2) we see that this is the same as $[x, y]\alpha=[x, y]^{-1}dd\alpha$, so that $[x, y]\alpha\equiv[x, y]^{-1} \bmod \Delta$.

(6.1.4) $[x, y\alpha]\equiv[x\alpha, y] \bmod \Delta$.

Proof. Since $y\alpha\in S(G)$, we may substitute $y\alpha$ for y in (6.1.3):

$$[x, y\alpha]\alpha\equiv[x, y\alpha]^{-1} \bmod \Delta.$$

But also

$$[x, y\alpha]\alpha=[x\alpha, y^{-1}]=\left([x\alpha, y]^{-1}\right)^{y^{-1}}=[x\alpha, y]^{-1}\left[[x\alpha, y]^{-1}, y^{-1}\right]\equiv[x\alpha, y]^{-1} \bmod \Delta,$$

so we have that $[x, y\alpha]^{-1} \equiv [x\alpha, y]^{-1} \bmod \Delta$. Taking inverses on both sides, we get the required congruence.

(6.1.5) $[a, b, c] = [a, c, b][c, b, a]$ *for every* $a, b, c \in H$.

This follows from (2.1) and (6.1.1).

Now one can work out relations similar to (4.3.2)—(4.3.7) using an exact analogue of the corresponding part of Section 4, consistently referring

to Δ	instead of Δ_3,
E	Δ_4,
equality	congruence mod Δ_4,
(6.1.2)	$[\Delta_3, K] \leqq \Delta_4$,
(6.1.3)	(4.2.1),
(6.1.4)	(4.2.2),
(6.1.5)	(4.3.1).

The relations so obtained, in particular those corresponding to (4.3.6) and (4.3.7), with further application of (6.1.2) and (6.1.4), yield the following line of equalities:

(6.1.6) $[x, y, u]\alpha = [x\alpha, y, u]^{-1} = [x, y\alpha, u]^{-1} = [x, y, u\alpha]^{-1}$.

(6.1.7) $[x^t, y^t, u] = [x, y, u]$.

Proof. While proving (6.1.3) we saw that, for a certain d in Δ, $[x, y]d^{-1} \in T(G)$. By (3.3), $T(G)$ is abelian and so $([x, y]d^{-1})^t = [x, y]d^{-1}$; whence $[x, y]^t = [x, y]d^{-1}d^t$. Put $d^{-1}d^t = d'$; as Δ is normal in G, this element belongs to Δ. Then, by (6.1.2),

$$[x^t, y^t, u] = [[x, y]^t, u] = [[x, y]d', u] = [x, y, u]^{d'}[d', u] = [x, y, u].$$

(6.1.8) $[x, y, u^t] = [x^t, y, u][x^{t^{-1}}, u, y][u, x, y^{t^{-1}}]$.

Proof. As $S(G)^{T(G)} = S(G)$ (see the proof of (3.5)), x^t, $x^{t^{-1}}$, $y^{t^{-1}}$, u^t all belong to $S(G)$. This makes it possible to apply the relations proved above:

$$\begin{aligned}
[x, y, u^t] &= [x, u^t, y][u^t, y, x], && \text{by (6.1.5)},\\
&= [x^{t^{-1}}, u, y][u, y^{-1}, x], && \text{by (6.1.7)},\\
&= [x^{t^{-1}}, u, y][u, x, y^{t^{-1}}][x, y^{t^{-1}}, u], && \text{by (6.1.5)},\\
&= [x^{t^{-1}}, u, y][u, x, y^{t^{-1}}][x^t, y, u], && \text{by (6.1.7)},\\
&= [x^t, y, u][x^{t^{-1}}, u, y][u, x, y^{t^{-1}}], && \text{by (6.1.1)}.
\end{aligned}$$

(6.1.9) $[x, y, u, t] = 1$.

Proof. Let us write down (6.1.8) with $u\alpha^{-1}$ $(\in S(G))$ in the place of u; mapping both sides by α, changing to inverses and using (6.1.6) we obtain that $[x, y, u^{t^{-1}}] = [x^t, y, u][x^{t^{-1}}, u, y][u, x, y^{t^{-1}}]$. Comparing this with the original form of (6.1.8) we get $[x, y, u^{t^{-1}}] = [x, y, u^t]$. Transform this equality by t and use (6.1.7) to obtain $[x, y, u] = [x, y, u^{t^2}]$. From (6.1.7) it follows

also that $[x, y, u]^{t^2} = [x, y, u^{t^2}]$. Comparison of the last two equalities shows that $[x, y, u]^{t^2} = [x, y, u]$, so that $[x, y, u, t^2] = 1$. Then (B.5.6) proves that also $[x, y, u, t] = 1$.

(6.1.10) $[\Delta, G] = E$.

Proof. As H is generated by $S(G)$, $\Gamma_3(H)$ is the normal closure (in H) of the subgroup generated by all commutators of the form $[x, y, u]$. From (6.1.2) and (6.1.9) we know that $[x, y, u]$ commutes with both of $S(G)$ and $T(G)$; as these two sets generate G, $[x, y, u]$ commutes with the whole of G. Consequently, the subgroup generated by the $[x, y, u]$ is in the centre of G, thus it is its own normal closure $\Gamma_3(H)$, whence $[\Gamma_3(H), G] = E$. Again (B.5.6) is needed to conclude that $[\Delta, G] = E$.

(6.1.11) $[x, y, t] = 1$.

Proof. In the course of proving (6.1.3) we saw that, with a suitable d $(\in \Delta)$, $[x, y]d^{-1} \in T(G)$. Since by (3.3) $T(G)$ is abelian, $[[x, y]d^{-1}, t] = 1$. But $[[x, y]d^{-1}, t] = [x, y, t]^{d^{-1}}[d^{-1}, t] = [x, y, t]$ by (6.1.10), and so $[x, y, t] = 1$.

(6.1.12) $[x, y, [u, t]] = 1$.

Proof.
$$\begin{aligned}[x, y, [u, t]] &= [x, y, u^{-1}t^{-1}ut] \\ &= [x, y, t][x, y, u]^t[x, y, t^{-1}]^{ut}[x, y, u^{-1}]^{t^{-1}ut} \\ &= [x, y, u]^t[x, y, u^{-1}]^{ut}, \quad \text{by (6.1.9) and (6.1.11)}, \\ &= [x, y, u]^t\left([x, y, u]^{-1}\right)^{u^{-1}ut} = 1.\end{aligned}$$

(6.1.13) $[u, t, [v, t'], T(G)] = E$.

Proof. Using (6.1.1), $[u, t, [v, t']] = [u^{-1}u^t, v^{-1}v^{t'}]$
$$\begin{aligned}&= [u^{-1}, v^{t'}]^{u^t}[u^t, v^{t'}][u^{-1}, v^{-1}]^{u^tv^{t'}}[u^t, v^{-1}]^{v^{t'}} \\ &= [u^{-1}, v^{t'}][u^{-1}, v^{t'}u^t][u^t, v^{t'}][u^{-1}, v^{-1}][u^{-1}, v^{-1}, v^{t'}][u^{-1}, v^{-1}, u^t] \times \\ &\quad \times [u^t, v^{-1}][u^t, v^{-1}, v^{t'}],\end{aligned}$$

as $u^t, v^{t'} \in S(G)$, this shows that $[u, t, [v, t']]$ is a product of commutators of the form $[x, y]$ and $[x, y, u]$. Since by (6.1.11) and (6.1.9) these all commute with $T(G)$, so does $[u, t, [v, t']]$.

(6.1.14) $[u, t, [v, t'], S(G)] = E$.

Proof. Take any x from $S(G)$ and expound $[u, t, [v, t'], x] = [u^{-1}u^t, v^{-1}v^{t'}, x]$ using (6.1.1); it becomes

$$[u, v, x][u, v^{t'}, x]^{-1}[u^t, v, x]^{-1}[u^t, v^{t'}, x].$$

Now if one splits up each term according to (6.1.5), uses (6.1.7) and (6.1.9), then after cancellations one is left with 1.

(6.1.15) *G' is generated by the commutators of the form $[u, v]$ together with those of the form $[u, t]$.*

Proof. (3.4) can be modified to show that any two elements g_1, g_2 of G can be written as $g_1 = ut$, $g_2 = vt'$ with some $u, v \in S(G)$, $t, t' \in T(G)$. Then

$$\begin{aligned}[g_1, g_2] &= [ut, vt'] = [u, t']^t [t, t'] [u, v]^{tt'} [t, v]^{t'} \\ &= [u^t, \dot{t}'] [u, v]^{tt'} [t, v^{t'}], \qquad \text{(since ,by (3.3), } T(G)' = E\text{)}, \\ &= [u^t, t'] [u^t, v] [v^{t'}, t]^{-1}, \qquad \text{by (6.1.11)};\end{aligned}$$

as u^t and $v^{t'}$ belong to $S(G)$, one can see that $[g_1, g_2]$ is a product of commutators of the required form. Since every element of G' is a product of commutators like $[g_1, g_2]$, this proves the statement.

(6.1.16) $G'' \leqq Z_1(G)$.

Proof. Let us consider the subgroup K generated by the (ordinary second) commutators formed from the generators of G' which are given in (6.1.15). Every $[x, y, [u, v]]$ is trivial by (6.1.1), and every $[x, y, [u, t]]$ is trivial by (6.1.12), so that in fact K is generated by the $[u, t, [v, t']]$. On the other hand, according to (6.1.13) and (6.1.14), all the $[u, t, [v, t']]$ commute with $T(G)$ and $S(G)$. Since these two sets generate G (see (3.4)), this means that K is central in G and a fortiori normal in G'. But the normal closure of K in G' is just G'', and so we have that $G'' = K \leqq Z_1(G)$.

Thus we arrive at the main results of the paper.

(6.2) Theorem. *If G is a locally nilpotent group, and if $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4]$, then the second derived group of G is contained in the centre of G.*

Proof. According to (3.7), we can apply (2.3). This says that there exists a locally nilpotent Σ-group G^* such that (i) G^* contains G, (ii) to every element g^* of G^* there is a number $n = n(g^*)$ for which $(g^*)^{2^n} \in G$, and (iii) α can be extended in a unique way to an automorphism β of G^*. It is easy to see that β is regular: if $g^*\beta = g^*$, then the equalities $(g^*\beta)^{2^n} = \big((g^*)^{2^n}\big)\beta = \big((g^*)^{2^n}\big)\alpha = (g^*)^{2^n}$ show that, since α itself is regular, $(g^*)^{2^n} = 1$; as G^* is a Σ-group, this means that $g^* = 1$. Further, we verify that the order of β divides 4: the relations $(g^*\beta^4)^{2^n} = \big((g^*)^{2^n}\big)\beta^4 = \big((g^*)^{2^n}\big)\alpha^4 = (g^*)^{2^n}$ give that $g^*\beta^4 = g^*$, for every $g^* \in G^*$. Finally, β can be restricted to $H(G^*)$ and then (4.0) proves that $H(G^*)$ is nilpotent. So we can apply (6.1) to G^*, and the conclusion is obviously inherited by G.

(6.3) Theorem. *If $(G, \alpha) \in [\mathsf{A}_4]$, and if G is periodic and locally soluble, then the second derived group of G is contained in the centre of G.*

Proof. As a periodic locally soluble group, G is locally finite, so that (3.2) shows that G is a Σ-group. Clearly $H(G)$ is also periodic and locally soluble, and α can be restricted to $H(G)$, so that (5.6) implies that $H(G)$ is nilpotent. Thus we can refer to (6.1), and the proof is complete.

7. Examples

In this last section we give some examples to show that the results presented in this paper are in a sense the best possible. We confine ourselves to the description of the examples, omitting the straightforward but sometimes tedious verifications.

(7.1) First we give the smallest non-metabelian A_4-group. Let us start with a free nilpotent-of-class-two group K_0 on the five generators $s_0, s_1, \ldots, s_4$. Imposing exponent three and the relations $[s_i, s_j][s_{j+k}, s_{i+k}]=1$ $(i, j, k=0, \ldots, 4;\ j+k$ and $i+k$ to be taken mod 5), we get a factor group K_1 of K_0. It can be seen that K_1' is generated by $[s_0, s_1]$ and $[s_0, s_2]$, and that these commutators are independent, so that the order of K_1 is 3^7. Now take an isomorphic copy K_2 of K_1 generated in a corresponding way by $r_0, r_1, \ldots, r_4$. Let H be the generalized direct product of K_1 and K_2 amalgamating $[s_0, s_1]$ with $[r_0, r_1]^{-1}$ and $[s_0, s_2]$ with $[r_0, r_2]^{-1}$. Then H is of order 3^{12}, and it can be seen that the mapping τ defined by $s_i\tau=s_{i+1}, r_i\tau=r_{i-1}$ is an automorphism of H of order 5. Finally, let us take the splitting extension G of H by an element t corresponding to τ, such that $t^5=1$, $s_i^t=s_{i+1}$ and $r_i^t=r_{i-1}$. Clearly G is of order $5\cdot 3^{12}$; further, it is soluble and has derived length three, but it is not nilpotent. A regular automorphism α of order four can be defined on G by $s_i\alpha=r_i$, $r_i\alpha=s_i^{-1}$, and $t\alpha=t^{-1}$.

(7.2) Repeating exactly the above construction but replacing 5 by some power of 3, one can get non-metabelian A_4-groups which are nilpotent of arbitrarily high class. The direct product of an infinity of such groups of increasing class provides a locally nilpotent but not nilpotent A_4-group.

References

[1] Baumslag, G.: Some aspects of groups with unique roots. Ph. D. thesis, University of Manchester, 1958. (To appear in Acta Math.)

[2] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 1st ed. Cambridge 1897.

[3] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. Cambridge 1911.

[4] Higman, G.: Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements. J. London Math. Soc. **32**, 321–334 (1957).

[5] Kurosh, A. G.: Theory of groups. New York 1955—1956.

[6] Lazard, M.: Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **71**, 101–190 (1954).

[7] Nagata, M.: Note on groups with involutions. Proc. Japan Acad. **28**, 564–566 (1952).

[8] Neumann, B. H.: On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. **15**, 203–208 (1940).

[9] Neumann, B. H.: Groups with automorphisms that leave only the unit element fixed. Arch. Math. **7**, 1–5 (1956).

[10] Thompson, J.: Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45**, 578–581 (1959).

[11] Zappa, G.: Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch. Ricerche di Mat. **7**, 3–13 (1958).

University College of North Staffordshire, Keele, Staffs. (England)

(Eingegangen am 1. Juli 1960)

HOFMANN, K. H.
Math. Zeitschr. 75, 295–298 (1961)

Ein komplexer Neokörper ohne reellen Unterneokörper

Von
KARL HEINRICH HOFMANN

Unter einem *komplexen Neokörper* versteht man eine topologische Doppelloop $(K, +, \cdot)$, deren multiplikative Struktur $(K, \cdot)$ der topologischen Halbgruppe aller komplexen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung iseomorph ist und in der das Rechtsdistributivgesetz $(x+y)z = xz + yz$ und wegen der Kommutativität der Multiplikation dann natürlich auch das Linksdistributivgesetz $z(x+y) = zx + zy$ gelten; die additive Struktur ist eine topologische Loop mit 0 als neutralem Element (s. z. B. [1], S. 37, 45, 51). Analog ist ein *reeller Neokörper* definiert (loc. cit.). Es ist bekannt, daß eine topologische Doppelloop, die eine topologische 2-Mannigfaltigkeit ist und in der das Rechtsdistributivgesetz gilt, einem komplexen Neokörper iseomorph ist oder einen reellen Neokörper (als Zentrum) enthält; gelten sogar beide Distributivgesetze und erzeugt jedes Element eine multiplikative Gruppe, so ist K sicher ein komplexer Neokörper ([1], S. 54). Es ist hingegen nicht richtig, daß ein komplexer Neokörper stets einen reellen Neokörper enthalten müsse; dies ist insofern bemerkenswert, als ein vierdimensionaler Neokörper (die Dimension eines lokalkompakten zusammenhängenden Neokörpers ist 1, 2 oder 4) allemal einen eindimensionalen Neokörper enthält, der das volle Zentrum darstellt. Ich habe in [1] ein Beispiel einer topologisch algebraischen Struktur angegeben, in der auf dem Körper K der komplexen Zahlen eine neue „Addition" $(x, y) \to px + y$ mit $p \neq 0, 1$ definiert ist, und die keine eindimensionale Unterstruktur bezüglich Multiplikation und neuer Addition enthält. Die in [1], S. 67 aufgestellte Behauptung, $(K, \oplus, \cdot)$ mit $x \oplus y = px + y$ sei ein komplexer Neokörper, ist jedoch falsch, da $(K, \oplus)$ keine topologische Loop, sondern nur eine topologische Quasigruppe mit 0 als Linksneutralelement bildet. Mit der folgenden kurzen Bemerkung soll die offen gebliebene Lücke ausgefüllt werden; wir geben ein Beispiel eines komplexen Neokörpers mit kommutativer Addition an, der keinen reellen Unterneokörper enthält. Die Methoden ähneln in ihrer Verwendung elementarer reeller Analysis dem in [2], S. 229 angewandten Verfahren, das zu einem komplexen Neokörper mit kommutativer und nicht assoziativer Addition führte, in der dennoch jedes Element eine additive Gruppe erzeugt.

SATZ. *Ist $(K, +, \cdot)$ der Körper der komplexen Zahlen und ist die Verknüpfung $\oplus$ definiert durch*

$$(0) \qquad x \oplus y = \begin{cases} (x+y) \cdot \exp\left(\dfrac{34\pi i}{k} \cdot \dfrac{|xy|^2}{|x+y|^4 + |xy|^2}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mit einer hinreichend großen natürlichen Zahl k, so ist $(K, \oplus, \cdot)$ ein komplexer Neokörper mit kommutativer Addition ohne einen eindimensionalen Unterneokörper; vielmehr ist der von 1 algebraisch erzeugte Unterneokörper dicht in K.

(Die genaue Gestalt der Konstanten $34\pi/k$ in (0) ist natürlich unwesentlich; wählen wir sie so, so ist $1 \oplus 1 = 2e^{2\pi i/k}$, und die k-fache Iterierte der Funktion $f\colon x \to x \oplus x$ liefert für $x = 1$ den reellen Wert 2^k.)

Beweis. Zur Abkürzung bezeichnen wir die reellwertige Funktion $(x, y) \to \frac{34\pi}{k} |xy|^2 \left(|x+y|^4 + |xy|^2\right)^{-1}$ mit c; sie ist definiert auf $K \times K \setminus \{(0,0)\}$.

a) Aus $c(x, y) = c(y, x)$ und $c(xz, yz) = c(x, y)$ für alle von $(0, 0)$ verschiedenen Paare (xz, yz), $z \in K$ folgt sofort die Kommutativität der Addition und die Gültigkeit der beiden Distributivgesetze.

b) Wegen $|x+y| = |x \oplus y|$ ist die Addition auch im Punkt $(0, 0)$ stetig.

c) Wir zeigen die Existenz einer stetigen Abbildung $(y, z) \to X(y, z)$ von $K \times K$ auf K, so daß die Gleichung $x \oplus y = z$ stets mit $x = X(y, z)$ gleichwertig ist.

Als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $x \oplus y = z$ nach x bekommen wir für $(x, y) \neq (0, 0)$ die Beziehung

$$x = -y + z\, e^{-i c(x,y)}. \tag{1}$$

Setzen wir $y = u e^{ai}$ und $z = v e^{-bi}$ mit $u, v \geqq 0$, $u + v > 0$, so ist dabei

$$c(x, y) = \frac{34\pi}{k} \cdot \frac{u^2 |x|^2}{v^4 + u^2 |x|^2}, \tag{2}$$

da $|x+y| = |x \oplus y| = |z| = v$ gilt. Der Betrag von x wird ermittelt aus

$$\begin{cases} |x|^2 = |u\, e^{ai} - v\, e^{-(b+c)i}|^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos(a+b+c) \\ \qquad\qquad = (u-v)^2 + 4uv\sin^2\dfrac{a+b+c}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Dabei steht c als Abkürzung für $c(x, y)$.

(2) und (3) ergeben zusammen als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $x \oplus y = z$ bei $(y, z) \neq (0, 0)$ die Existenz einer nichtnegativen reellen Zahl c, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\frac{k}{34\pi} \cdot c = \frac{u^4 + u^2 v^2 + 2u^3 v\cos(a+b+c)}{u^4 + v^4 + u^2 v^2 - 2u^3 v\cos(a+b+c)}. \tag{4}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung setzen wir gleich $f(c; y, z)$ und differenzieren diesen Ausdruck partiell nach c:

$$\begin{cases} f_c(c; y, z) = \dfrac{2u^3 v^5 \sin(a+b+c)}{(u^4 + v^4 + u^2 v^2 - 2u^3 v\cos(a+b+c))^2} \\ \qquad = \dfrac{2u^3 v^5 \sin(a+b+c)}{\left(v^4 + u^2\left((u-v)^2 + 4uv\sin^2\dfrac{a+b+c}{2}\right)\right)^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Aus dieser letzten Gleichung bekommen wir die Abschätzungen

$$(6) \qquad |f_c(c; y, w)| \leqq \frac{2u^3v^5}{v^{4\cdot 2}} = \frac{2u^3}{v^3} \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

und

$$(7) \qquad |f_c(c; y, w)| \leqq \frac{2u^3v^5}{(u^2(u-v))^2} = \frac{2v^5}{u(u-v)^4} \quad \text{für} \quad u \neq 0,\ v \neq u$$

Setzen wir für den Augenblick $h = \frac{u}{v}$, wenn $v \neq 0$, und $h = \infty$, wenn $v = 0$, $u \neq 0$, so gilt $\min\left(u^3/v^3,\ v^5/u(u-v)^4\right) = \min\left(h^3,\ 1/h(1-h)^4\right)$, und dieses Minimum ist nicht größer als eine gewisse, feste positive reelle Zahl A. Demnach ist $|f_c(c; y, z)| \leqq 2A$, und dies hat sicher

$$(8) \qquad |f_c(c; y, z)| \leqq \frac{k}{68\pi}$$

zur Folge, wenn k von vorneherein nicht kleiner als $136A\pi$ gewählt wird. Aus (8) folgt aber jetzt in der Tat, daß (4) eine und nur eine Lösung $c = \bar{c}(y, z)$ hat, wenn nur $(u, v) \neq (0, 0)$, d.h. $(y, z) \neq (0, 0)$ ist, denn $c \to \frac{k}{34\pi} \cdot c - f(c; y, z)$ ist dann eine streng monotone Funktion, die überdies analytisch ist und auch von u, v, a und b (reell) analytisch abhängt. Aus dieser letzten Bemerkung folgt, daß in dem angegebenen Bereich $\{(y, z) : (u, v) \neq (0, 0)\}$ die Funktion $\bar{c}$ stetig ist. Wir setzen nun

$$(9) \qquad X(y, z) = \begin{cases} -y + z \exp -i\,\bar{c}(y, z) & \text{für} \quad y \neq 0 \quad \text{oder} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = z = 0. \end{cases}$$

X ist überall stetig.

Für $(y, z) \neq (0, 0)$ bekommen wir

$$X(y, z) \oplus y = z \exp i\left(c(x(y, z), y) - \bar{c}(y, z)\right).$$

Nun ist aber

$$c\left(X(y, z), y\right) = \frac{34\pi}{k} \cdot \frac{|X(y, z)|^2 |y|^2}{|X(y, z) + y|^4 + |X(y, z)|^2 |y|^2},$$

und wegen $|X(y, z) + y| = |X(y, z) \oplus y| = |z|$ ist dieser Ausdruck mit $y = ue^{ai}$ und $z = ve^{-bi}$ gerade gleich

$$\frac{34\pi}{k} \cdot \frac{u^4 + u^2v^2 - 2u^3v\cos(a + b + \bar{c}(y, z))}{u^4 + v^4 + u^2v^2 - 2u^3v\cos(a + b + \bar{c}(y, z))}.$$

Nach der Definition von $\bar{c}(y, z)$ ist dieser Quotient jedoch genau gleich $\bar{c}(y, z)$; daraus folgt also $c\left(X(y, z), y\right) = \bar{c}(y, z)$ und daraus schließlich $X(y, z) \oplus y = z$. Im Fall $(y, z) = (0, 0)$ ist diese Beziehung nach (9) trivialerweise erfüllt. Der Beweis hat im Fall $(y, z) \neq (0, 0)$ die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung $x \oplus y = z$ nach x gleich mitgeliefert; ist aber $y = z = 0$, so ist wegen $x \oplus 0 = x$ auch in diesem Fall die Lösung eindeutig bestimmt.

Damit haben wir bewiesen, daß $(K, \oplus)$ eine kommutative topologische Loop ist. Demnach ist $(K, \oplus, \cdot)$ ein komplexer Neokörper mit kommutativer Addition. Man beachte, daß die Addition von $(K, \oplus, \cdot)$ außer in $(0, 0)$ sogar analytisch ist.

d) Enthielte $(K, \oplus, \cdot)$ einen eindimensionalen (und dann reellen) Unterneokörper $(H, \oplus, \cdot)$, so wäre $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ eine eindimensionale Untergruppe von $(K \setminus \{0\}, \cdot)$, die im Punkt 1 des zweidimensionalen Vektorraums $(K, +)$ eine wohlbestimmte Tangentenrichtung hat; ist h ein reelles Element aus H mit $0 < h < 1$ — man beachte, daß solche Elemente stets existieren —, so liefert $\lim_{n \to \infty} h^{-n}\left((1 \oplus h^n) - 1\right)$ einen Tangentialvektor an H in 1, falls dieser Limes existiert und von 0 verschieden ist. Nun ist zunächst

$$c(1, h^{-n}) = 34\pi/k \cdot h^{-2n}\left((1 + h^{-n})^4 + h^{-2n}\right)^{-1} = 34\pi/k \cdot h^{2n}\left(1 + h^n O_1(h^n)\right)^{-1}.$$
$$= h^{2n} O_2(h^n)$$

mit
$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |O_i(h^n)| < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Damit wird

$$h^{-n}\left((1 \oplus h^n) - 1\right) = h^{-n}\left((1 + h^n) \exp i\, c(1, h^{-n}) - 1\right)$$
$$= \exp i\, c(1, h^{-n}) + h^{-n}\left(i\, h^{2n} O_2(h^n) + \cdots\right) = 1 + h^n O_3(h^n).$$

Demnach existiert der Grenzwert von $h^{-n}\left((1 \oplus h^n) - 1\right)$ und ist gleich 1. Die einzige eindimensionale Untergruppe $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ von $(K \setminus \{0\}, \cdot)$, die in 1 den Tangentialvektor 1 hat, ist aber die Untergruppe aller reellen Zahlen von $K\{0\}$. Nun ist aber schon $1 \oplus 1 = 2e^{2\pi i/k}$ nicht reell, also kann das algebraische Erzeugnis von 1 nicht in H enthalten sein und ist daher in K dicht [1], S. 50. Wir geben jetzt noch das Element h explizit an: Es genügt $h^{-1} = 2^k$, also $h = 2^{-k}$ zu nehmen; bezeichnen wir nämlich mit f die Funktion $x \to x \oplus x$, so gilt mit $f_n = f \circ f_{n-1}$ $(n = 1, \ldots, f_0 =$ identische Abbildung) die Beziehung $f_n(1) = 2^n \exp 2\pi i n/k$; demnach liegt also das Element $h^{-1} = f_k(1)$ tatsächlich in der von 1 erzeugten additiven Loop und h in dem von 1 erzeugten Neokörper.

Damit ist der Beweis des Satzes vollendet.

Literatur

[1] HOFMANN, K. H.: Topologische distributive Doppelloops. Math. Z. **71**, 36—68 (1959).
[2] HOFMANN, K. H.: Topologische Doppelloops. Math. Z. **70**, 213—230 (1958).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Juli 1960)

IIZUKA, K.
Math. Zeitschr. 75, 299–304 (1961)

On Brauer's Theorem on Sections in the Theory of Blocks of Group Characters

By

KENZO IIZUKA

R. BRAUER, in his earlier paper [3], announced an important theorem concerning both "blocks" of group characters and "sections" in groups. In his recent paper [5], he gave a proof of the theorem, in which certain idempotents of the centers of group rings are used together with linear functions defined on the centers. In this note, we shall give another proof of the theorem by making use of the idempotents (§1) and, as a consequence of this, have some results on the idempotents (§2).

Let $\mathfrak{G}$ be a group of finite order g and p a fixed rational prime. The terms "modular character" and "block" without modifier will always mean modular character and block for p. Let $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ be the irreducible ordinary characters of $\mathfrak{G}$. For an arbitrarily fixed p-element P of $\mathfrak{G}$, we shall consider the normalizer $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$ of P in $\mathfrak{G}$. The generalized decomposition numbers $d_{i\varkappa}^P$ of $\mathfrak{G}$ belonging to P are defined by

$$\chi_i(PR) = \sum_{\varkappa=1}^{r} d_{i\varkappa}^P \varphi_\varkappa^P(R) \tag{1}$$

([1]), where $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots, \varphi_r^P$ are the irreducible modular characters of $\tilde{\mathfrak{G}}$ and R is a variable p-regular element of $\tilde{\mathfrak{G}}$. The above-mentioned theorem of R. BRAUER is described as follows:

THEOREM 1. (BRAUER) *If a modular character $\varphi_\varkappa^P$ of $\tilde{\mathfrak{G}}$ belongs to a block $\tilde{B}_\sigma$ of $\tilde{\mathfrak{G}}$, then $d_{i\varkappa}^P$ can be different from zero only for ordinary characters χ_i of $\mathfrak{G}$ which belong to the block B_τ of $\mathfrak{G}$ determined by $\tilde{B}_\sigma$, i.e. $B_\tau = \tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}}$* ([3], [5]).

Let $\tilde{B}^{(\tau)}$ be the collection of blocks $\tilde{B}_\sigma$ of $\tilde{\mathfrak{G}}$ which determine an arbitrarily given block B_τ of $\mathfrak{G}$. For each non-vacuous $\tilde{B}^{(\tau)}$ we shall consider the matrix

$$D_0 = (d_{i\varkappa}^P), \tag{2}$$

where the row index i ranges over those values for which $\chi_i \in B_\tau$ and the column index $\varkappa$ ranges over those values for which $\varphi_\varkappa^P \in \tilde{B}^{(\tau)}$. In the proof

of the theorem carried out in [5], the main point is to establish the inequality

$$D_0' \overline{D}_0 \neq 0, \tag{3}$$

where D_0' is the transposed matrix of D_0 and $\overline{D}_0$ is the matrix whose coefficients $\overline{d}_{i\varkappa}^P$ are complex conjugate to $d_{i\varkappa}^P$.

Let $\mathfrak{p}$ be a fixed prime ideal divisor of p in the field Ω of g-th roots of unity and $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ be the ring of $\mathfrak{p}$-integers in Ω. Another essential part of the proof is to verify that the coefficients of the matrix $C_0^{-1} D_0' \overline{D}_0$ are all in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, where C_0 is the submatrix of the Cartan matrix C_P of $\tilde{\mathfrak{G}}$ associated with $\tilde{B}^{(\tau)}$.

In this note, we shall establish these two facts by making use of a type of expressions related with the idempotents (see (6)). In this case, (3) will be obtained more sharply in the form

$$C_0^{-1} D_0' \overline{D}_0 \equiv E \pmod{\mathfrak{p}} \tag{4}$$

where E is the unit matrix whose degree is equal to the number of modular characters $\varphi_\varkappa^P$ belonging to $\tilde{B}^{(\tau)}$.

1. The proof of BRAUER's theorem. Let $K_1, K_2, \ldots, K_n$ be the classes of conjugate elements in the group $\mathfrak{G}$ and $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_m$ be those of $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$. We denote by $\mathfrak{S}(P)$ the section of P in $\mathfrak{G}$, i.e. the set of all elements whose p-factors are conjugate to P in $\mathfrak{G}$. Assuming that $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_r$ are the p-regular classes of $\tilde{\mathfrak{G}}$, $P\tilde{K}_1, P\tilde{K}_2, \ldots, P\tilde{K}_r$ are the classes of $\tilde{\mathfrak{G}}$ which are contained in the section $\tilde{\mathfrak{S}}(P)$ of P in $\tilde{\mathfrak{G}}$. As is well known, arranging $K_1, K_2, \ldots, K_n$ in a suitable order, we may assume that each $P\tilde{K}_\alpha$ is contained in K_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$. In this case, $K_1, K_2, \ldots, K_r$ are the classes of $\mathfrak{G}$ contained in $\mathfrak{S}(P)$.

Let e_i be the primitive idempotent of the center Z of the group ring of $\mathfrak{G}$ over Ω which belongs to χ_i. After M. OSIMA [8], we shall consider the primitive idempotent E_τ of the center Z_0 of the group ring of $\mathfrak{G}$ over $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ which is associated with B_τ: $E_\tau = \sum_{\chi_i \in B_\tau} e_i$. Interpreting each class K_γ as the sum of all its elements, we may set

$$E_\tau = \sum{}' b_\gamma^\tau K_\gamma \tag{5}$$

with $\mathfrak{p}$-integral coefficients b_γ^τ, where the sum extends only over p-regular classes. We may also set

$$K_\alpha E_\tau = \sum_{\beta=}^{n} a_{\alpha\beta}^\tau K_\beta \tag{6}$$

where $a_{\alpha\beta}^\tau = \sum{}' b_\gamma^\tau a_{\alpha\gamma\beta}$ with $K_\alpha K_\gamma = \sum_\beta a_{\alpha\gamma\beta} K_\beta$, hence $a_{\alpha\beta}^\tau$ are all in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. If n_γ is the order of the normalizer $\mathfrak{N}(G_\gamma)$ of a representative element G_γ of K_γ

in $\mathfrak{G}$, then

$$a_{\alpha\beta}^{\tau} = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{\chi_i \in B_\tau} \chi_i(G_\alpha)\, \bar{\chi}_i(G_\beta). \tag{7}$$

The following lemma is easily seen from (7).

LEMMA 1. *If the p-element P belongs to the center of $\mathfrak{G}$, then $a_{\alpha\beta}^{\tau}$ can be different from zero only when either both K_α and K_β are contained in $\mathfrak{S}(P)$ or when both are not contained in $\mathfrak{S}(P)$.*

Let $\widetilde{E}_\sigma$ be the primitive idempotent of the center $\widetilde{Z}_0$ of the group ring of $\widetilde{\mathfrak{G}}$ over $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ which is associated with a block $\widetilde{B}_\sigma$ of $\widetilde{\mathfrak{G}}$. For each block B_τ of $\mathfrak{G}$, we shall consider the idempotent $\widetilde{E}^{(\tau)}$ of $\widetilde{Z}_0$ which is the sum of idempotents $\widetilde{E}_\sigma$ with $\widetilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$; it is understood that if B_τ cannot be determined by any block $\widetilde{B}_\sigma$ of $\widetilde{\mathfrak{G}}$, then $\widetilde{E}^{(\tau)} = 0$. We may set

$$\widetilde{K}_\alpha \widetilde{E}^{(\tau)} = \sum_{\beta=1}^{r} \tilde{a}_{\alpha\beta}^{(\tau)} \widetilde{K}_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

where $\tilde{a}_{\alpha\beta}^{(\tau)}$ are all in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. We then have

LEMMA 2. *For $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, we have*

$$a_{\alpha\beta}^{\tau} \equiv \tilde{a}_{\alpha\beta}^{(\tau)} \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, r). \tag{9}$$

PROOF. Set $K_\beta^0 = \sum_{\widetilde{K}_\varrho \subseteq K_\beta} \widetilde{K}_\varrho$ and set $E_\tau^0 = \sum_\beta b_\beta^\tau K_\beta^0$. By a well known homomorphism (see (3) in [2] or (7B) in [4]), it is easily shown that (6) implies

$$K_\alpha^0 E_\tau^0 \equiv \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{\tau} K_\beta^0 \pmod{\mathfrak{p} Z_0}. \tag{10}$$

Since $E_\tau^0 \equiv \widetilde{E}^{(\tau)} \pmod{\mathfrak{p}\widetilde{Z}_0}$ ([8], [5]), from (8) and Lemma 1 it follows

$$K_\alpha^0 E_\tau^0 \equiv \sum_{\beta=1}^{r} \tilde{a}_{\alpha\beta}^{(\tau)} P\widetilde{K}_\beta + \sum_{\widetilde{K}_\varrho \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}(P)} *_\varrho \widetilde{K}_\varrho \pmod{\mathfrak{p}\widetilde{Z}_0}, \tag{11}$$

where the coefficients $*_\varrho$ are all in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. As for the right side of (10), we have

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{\tau} K_\beta^0 = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^{\tau} P\widetilde{K}_\beta + \sum_{\widetilde{K}_\varrho \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}(P)} *'_\varrho \widetilde{K}_\varrho, \tag{12}$$

where the coefficients $*'_\varrho$ are all in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. By (10), (11) and (12), we obtain (9).

Let $\boldsymbol{\Phi}_P$ be the matrix $(\varphi_\varkappa^P(R_\alpha))$ of irreducible modular characters $\varphi_\varkappa^P$ of $\widetilde{\mathfrak{G}}$, where each R_α is a representative element of $\widetilde{K}_\alpha$ and where $\varkappa$ is the row index and α is the column index. Let further D^P be the matrix $(d_{i\varkappa}^P)$ of generalized decomposition numbers of $\mathfrak{G}$ belonging to P, where i is the row index and $\varkappa$ is the column index. If the characters χ_i and the modular characters $\varphi_\varkappa^P$

are arranged in a suitable order, then

$$D^P = \underbrace{\begin{pmatrix} D_0 & D_2 \\ D_1 & D_3 \end{pmatrix}}_{\text{associated with } \tilde{B}^{(\tau)}} \Big\} \text{ associated with } B_\tau$$

$$C_P = \underbrace{\begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}}_{\text{associated with } \tilde{B}^{(\tau)}} \Big\} \text{ associated with } \tilde{B}^{(\tau)}$$

By (7) for $G_\alpha = PR_\alpha$ and $G_\beta = PR_\beta$, we have

$$a^\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{\tilde{n}_\alpha} \sum_{\kappa,\lambda=1}^{r} \sum_{\chi_i \in B_\tau} \varphi^P_\kappa(R_\alpha)\, d^P_{i\kappa}\, \bar{d}^P_{i\lambda}\, \bar{\varphi}^P_\lambda(R_\beta), \tag{13}$$

where $\tilde{n}_\alpha$ is the order of the normalizer $\mathfrak{N}(PR_\alpha)$ of PR_α in $\mathfrak{G}$ or that of the normalizer $\tilde{\mathfrak{N}}(R_\alpha)$ of R_α in $\tilde{\mathfrak{G}}$. Therefore if we set

$$A_\tau = (a^\tau_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$$

then, by the orthogonality relations for modular characters, we have

$$A_\tau = \bar{\Phi}_P^{-1} \begin{pmatrix} C_0^{-1} D_0' \bar{D}_0 & C_0^{-1} D_0' \bar{D}_2 \\ C_1^{-1} D_2' \bar{D}_0 & C_1^{-1} D_2' \bar{D}_2 \end{pmatrix} \bar{\Phi}_P. \tag{14}$$

Similarly if we set

$$\tilde{A}^{(\tau)} = (\tilde{a}^{(\tau)}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$$

then

$$\tilde{A}^{(\tau)} = \bar{\Phi}_P^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{\Phi}_P. \tag{15}$$

Since $\det \bar{\Phi}_P \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ and all $a^\tau_{\alpha\beta}$ are $\mathfrak{p}$-integers, from (14) it follows that the matrix $C_0^{-1} D_0' \bar{D}_0$ has $\mathfrak{p}$-integral coefficients. Therefore, comparing (14) with (15), by Lemma 2 we obtain (4).

Having obtained (4), we can finish the proof of Theorem 1 according to the arguments carried out in [5], §6.2. For the sake of completeness, we shall continue the proof after R. BRAUER [5].

Since all the p-conjugates of a character χ_i appear in the same block B_τ of $\mathfrak{G}$ (Theorem 6 in [1]), the positive definite Hermitian matrix $D_0' \bar{D}_0$ has integral rational coefficients. Further, as is easily seen, all coefficients of $C_0^{-1} D_0' \bar{D}_0$ are rational integers, hence $\det D_0' \bar{D}_0 \geqq \det C_0$. On the other hand, if we assume $D_1 \neq 0$ then $\det D_0' \bar{D}_0 < \det C_0$, because $D_0' \bar{D}_0 + D_1' \bar{D}_1 = C_0$ (Theorem 4 in [1]). Hence we must have $D_1 = 0$. Thus the proof is finished.

The following Corollary will be used in the next section.

COROLLARY. (BRAUER) *If L and M are two elements of $\mathfrak{G}$ which belong to different sections, then*

$$\sum_{\chi_i \in B_\tau} \chi_i(L)\, \bar{\chi}_i(M) = 0 \tag{16}$$

for each block B_τ of $\mathfrak{G}$ ([3], [5]).

2. Consequences. By Theorem 1, (14) becomes

$$A_\tau = \bar{\Phi}_P^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{\Phi}_P, \tag{17}$$

and the combination of (17) with (15) yields

$$A_\tau = \tilde{A}^{(\tau)}. \tag{18}$$

From (7) and Corollary to Theorem 1, it follows

$$a_{\alpha\beta}^\tau = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ \beta = r+1, r+2, \ldots, n). \tag{19}$$

By (18) and (19), Theorem 1 and its Corollary are formulated in terms of idempotents as follows:

THEOREM 2. *For $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, we have*

$$K_\alpha E_\tau = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^\tau K_\beta \tag{20}$$

and

$$\tilde{K}_\alpha \tilde{E}^{(\tau)} = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}^\tau \tilde{K}_\beta \tag{21}$$

with common coefficients $a_{\alpha\beta}^\tau$.

The following Corollaries 1 and 2 are seen immediately from (20).

COROLLARY 1. *If $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu K_\nu E_\tau = 0$, $a_\nu \in \Omega$, then $\sum_{K_\alpha \subseteq \mathfrak{S}(P)} a_\alpha K_\alpha E_\tau = 0$ for each section $\mathfrak{S}(P)$ in $\mathfrak{G}$.*

COROLLARY 2. *If $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu K_\nu E_\tau \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p} Z_0}$, $a_\nu \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, then $\sum_{K_\alpha \subseteq \mathfrak{S}(P)} a_\alpha K_\alpha E_\tau \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p} Z_0}$ for each section $\mathfrak{S}(P)$ in $\mathfrak{G}$.*

Corollary 2 is equivalent to the general case of (5C) in [5] and Corollary 1 is equivalent to each of the following Corollary 3, Lemma in [9] and the general case of (5B) in [5].

COROLLARY 3. *If a linear relation $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \omega_i(K_\nu) = 0$, $a_\nu \in \Omega$, holds for every $\chi_i \in B_\tau$, then $\sum_{K_\alpha \subseteq \mathfrak{S}(P)} a_\alpha \omega_i(K_\alpha) = 0$ for these χ_i, where ω_i is the linear character of Z belonging to χ_i.*

From Corollary 3 we see the following orthogonality relations for characters.

COROLLARY 4. (BRAUER, OSIMA) *If χ_i and χ_j are two irreducible characters of $\mathfrak{G}$ which belong to different blocks of $\mathfrak{G}$ then*

$$\sum_{G \in \mathfrak{S}(P)} \chi_i(G) \bar{\chi}_j(G) = 0 \tag{22}$$

for each section $\mathfrak{S}(P)$ in $\mathfrak{G}$ ([9]).

References

[1] BRAUER, R.: On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. Ann. of Math. **42**, 926–935 (1941).
[2] BRAUER, R.: On blocks of characters of groups of finite order, I. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **32**, 182–186 (1946).
[3] BRAUER, R.: On blocks of characters of groups of finite order, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **32**, 215–219 (1946).
[4] BRAUER, R.: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. Math. Z. **63**, 406–444 (1956).
[5] BRAUER, R.: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, II. Math. Z. **72**, 25–46 (1959).
[6] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular characters of groups. Ann of Math. **42**, 556–590 (1941).
[7] IIZUKA, K.: Note on blocks of group characters. Kumamoto J. Sci. **2**, 309–321 (1956).
[8] OSIMA, M.: Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama Univ. **4**, 175–188 (1955).
[9] OSIMA, M.: On some properties of group characters. Proc. Japan Acad. **36**, 18–21 (1960).

Dept. of Math., Kumamoto University, Japan

(Eingegangen am 21. Juli 1960)

Tôgô, Sh.
Math. Zeitschr. 75, 305–324 (1961)

On linear groups in which all elements can be decomposed in Jordan products

By
SHIGEAKI TÔGÔ[1])

1. Introduction

Let k be an algebraically closed field of arbitrary characteristic and let $GL(n, k)$ be the group of all automorphisms of an n-dimensional vector space V over k. The elements of $GL(n, k)$ are considered as the non-singular square matrices of degree n with coefficients in k. An element x of $GL(n, k)$ is uniquely expressed as $x = x_s x_u$ in such a way that x_s is a semisimple matrix, x_u is a unipotent matrix and $x_s x_u = x_u x_s$ [2, p. 71 and p. 184]. $x_s x_u$ is called the Jordan product decomposition of x and x_s, x_u are called the semisimple and unipotent parts of x respectively. We called [5] a subgroup G of $GL(n, k)$ *splittable* provided the semisimple and unipotent parts of every element of G also belong to G, on the analogy of the definition of splittable linear Lie algebras by A. Malcev.

Let $M(n, k)$ be the space of all endomorphisms of V, which may be considered as the space of all square matrices of degree n with coefficients in k. The Zariski topology is defined in $M(n, k)$ by taking the algebraic sets as its closed sets. An algebraic subgroup of $GL(n, k)$ is a subgroup of $GL(n, k)$ which is the intersection of $GL(n, k)$ and an algebraic set of $M(n, k)$. However, as was indicated in [1, (2.1)], an algebraic subgroup of $GL(n, k)$ can be defined as an algebraic set by imbedding $GL(n, k)$ into $M(n+1, k)$ suitably. We consider $GL(n, k)$ with the Zariski topology defined in this way. We shall denote by G^* the closure of a subgroup G of $GL(n, k)$, which is known to be the smallest algebraic subgroup of $GL(n, k)$ containing G.

A subgroup G of $GL(n, k)$ is called [6, Definitions 4.1 and 6.2] a D^∞-*group* (resp. C^∞-*group*) provided it satisfies the following condition:

(D^∞) $\qquad D^\infty G^* < G$

(resp. (C^∞) $\qquad C^\infty G^* < G$),

where $D^\infty G^*$ (resp. $C^\infty G^*$) is the intersection of all members of the derived series $D^i G^*$ (resp. the descending central series $C^i G^*$) of a group G^*. A D^∞-subgroup (resp. C^∞-subgroup) of $GL(n, k)$ is called [6, Definitions 7.2 and 11.1] an SD^∞-*group* (resp. SC^∞-*group*) provided all the maximal solvable connected subgroups R satisfy the following condition:

(S) For any maximal torus T of R, R is the semi-direct product of T and the invariant subgroup consisting of all unipotent elements of R,

[1]) Research done while the author was in Northwestern University with the support of the National Science Foundation, U.S.A.

where we mean by a *torus* a connected commutative group consisting of semisimple matrices.

In [6], by making use of the results of A. BOREL and C. CHEVALLEY on algebraic linear groups, we developed the properties of more general classes of linear groups, i.e., the properties of D^∞-subgroups, which are, roughly speaking, the groups different from algebraic groups on their solvable parts, SD^∞-subgroups, C^∞-subgroups and SC^∞-subgroups of $GL(n, k)$. About the connection of the splittability and the (S)-property both of which are fundamental properties of algebraic linear groups [1, (9.2) and (12.9)], it is known [6, Theorem 11.4] that a connected C^∞-subgroup of $GL(n, k)$ is splittable if and only if it is an SC^∞-group. But this can not be expected for D^∞-subgroups of $GL(n, k)$ generally. That is, a connected splittable D^∞-group is not necessarily an SD^∞-group and conversely a connected SD^∞-group is not necessarily splittable (Examples 1 and 2).

The purpose of this paper is to study the properties of splittable D^∞-subgroups of $GL(n, k)$.

It is known [5, Theorem 2] that, for a splittable linear Lie algebra L over a field of characteristic 0, L and the algebraic hull of L have the same nilpotent elements. Some corresponding results on splittable D^∞-subgroups of $GL(n, k)$ will be proved (Theorem 3.2 and Corollary 3.3). As an analogue of a result on a splittable linear Lie algebra [5, Corollary of Theorem 1], we shall prove that a splittable D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ is algebraic if and only if the radical (resp. a maximal solvable connected subgroup) N is algebraic, and if and only if a maximal torus of N and the invariant subgroup consisting of all unipotent elements of N are algebraic (Theorem 3.4), where the radical is defined as the largest solvable connected invariant subgroup [6, Definition 5.1]. We shall show some necessary and sufficient conditions for a splittable connected D^∞-group to be an SD^∞-group (Theorem 3.10). As a generalization of an important result of A. BOREL on algebraic linear groups [1, (20.8)], we proved [6, Theorem 9.3] that, for a connected splittable SD^∞-group G, the centralizer of a maximal torus of G in G is a Cartan subgroup of G and vice versa. We prove the result for connected splittable D^∞-groups satisfying some condition which is weaker than the (S)-condition (Theorem 4.8 and Example 1). Furthermore, we shall give a condition under which the splittability and the (S)-property coincide for connected D^∞-groups (Theorem 5.1).

2. Preliminaries

We recall some fundamental results on connectedness and algebraic closures of a subgroup of $GL(n, k)$ and on D^∞-subgroups of $GL(n, k)$, and note some notations which will be used through the paper.

2.1. *A subgroup G of $GL(n, k)$ has a finite number of connected components, which are the cosets of the connected component of the identity in G. G is connected if and only if G^* is connected.*

If G^* is connected, then it is known that G^* is irreducible, whence G is irreducible [3, p. 175]. It follows that G is connected. The converse is evident. The first part is known for algebraic subgroups of $GL(n, k)$. Let $x_i(G^*)_0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ be the cosets of the connected component $(G^*)_0$ of the identity in G^*, and put $M_0=G\cap(G^*)_0$ and $M_i=G\cap x_i(G^*)_0$. Then it is clear that M_0 is an invariant subgroup of G and that $(M_0)^*=(G^*)_0$, whence M_0 is connected by the second part assured above. It is easily seen that M_i is a coset of M_0 in G and therefore that M_i is connected, completing the proof.

We always denote by G_0 the connected component of the identity in G.

2.2. *Let G be a subgroup of $GL(n, k)$ and let f be a rational representation of G^*.*

(1) *If x is a semisimple (resp. unipotent) element of G^*, then $f(x)$ is a semisimple (resp. unipotent) element of $f(G^*)$; and conversely.*

(2) *If G is splittable, then $f(G)$ is splittable.*

(3) $f(G^*)=f(G)^*$.

(1) is proved in [1, (9.5)]. Therefore we omit the proof. Let $x=x_sx_u$ be the Jordan product decomposition of an element x of G. Then it follows from (1) that $f(x_s)=f(x)_s$ and $f(x_u)=f(x)_u$. Therefore (2) is evident. Since f is continuous, we have $f(G^*)\subset f(G)^*$. Since G^* is algebraic, $f(G^*)$ is algebraic by [1, (5.10.4)], whence we have $f(G)^*\subset f(G^*)$ i.e, $f(G^*)=f(G)^*$, completing the proof.

2.3. (1) *A subgroup G of $GL(n, k)$ is solvable (resp. nilpotent, commutative, a torus) if and only if G^* is solvable (resp. nilpotent, commutative, a torus).*

(2) *If H is an invariant subgroup of G, then H^* is an invariant subgroup of G^*.*

(3) *If M, N are subgroups of $GL(n, k)$, and if M centralizes N, then M^* centralizes N^*.*

It H is an invariant subgroup of G, it follows from (2.2) that $x^{-1}H^*x=H^*$ for any x in G. Since the normalizer of H^* in $GL(n, k)$ is algebraic, $y^{-1}H^*y=H^*$ for any y in G^*, proving (2). Let H, L be invariant subgroups of G. Let f be a mapping of $GL(n, k)\times GL(n, k)$ to $GL(n, k)$ defined by $f(x, y)=x^{-1}y^{-1}xy$. Then $f^{-1}([H, L]^*)$ is algebraic and contains $H\times L$, whence it contains $H^*\times L^*$ since $H^*\times L^*=(H\times L)^*$. Therefore $[H^*, L^*]\subset[H, L]^*$. Since H^* and L^* are invariant subgroups of G^* by (2), $[H^*, L^*]$ is algebraic [1, (4.9)]. Hence $[H^*, L^*]=[H, L]^*$. The statements on solvability, nilpotency and commutativity in (1) follow from this fact. If G is a torus, G^* is connected commutative by (2.1). Hence the set of all semisimple elements of G^* is an algebraic group [1, (9.2)] and contains G, whence it coincides with G^*, i.e. G^* is a torus. The converse follows from (2.1). Finally, if M centralizes N, $f^{-1}(e)$ (e the identity element of $GL(n, k)$) is algebraic and contains $M\times N$, whence it contains $M^*\times N^*$. Therefore M^* centralizes N^*, completing the proof.

2.4. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. Then:*

(1) *G has maximal solvable connected subgroups (resp. maximal tori).*

(2) *A maximal solvable connected subgroup of G is the intersection of G and a maximal solvable connected subgroup of G^*, and its closure is a maximal solvable connected subgroup of G^*; and conversely.*

(3) *Maximal solvable connected subgroups of G are conjugate by inner automorphisms.*

(4) *$G=R(D^\infty G^*)$ for a maximal solvable connected subgroup R of G.*

Let S be a maximal solvable connected subgroup of G^*. Take a rational representation f of G^* with $D^\infty G^*$ as its kernel [*1*, (5.10.2)]. Then, since $D^\infty G^* = D^m G^*$ for a sufficiently large integer m, $f(G^*)$ is solvable connected. By [*1*, (22.3)], $f(S)$ is a maximal solvable connected subgroup of $f(G^*)$, from which it follows that $f(G^*)=f(S)$ and therefore that $G^*=S(D^\infty G^*)$. Since $D^\infty G^*$ is an algebraic subgroup of G, we have $G=(G\cap S)(D^\infty G^*)$ and $G^*=(G\cap S)^*(D^\infty G^*)$. It follows that $S=(G\cap S)^*(S\cap D^\infty G^*)=(G\cap S)^*$. By (2.1) $G\cap S$ is connected. If H is a solvable connected subgroup of G containing $G\cap S$, we have $S\subset H^*$, whence we have $S=H^*$ by (2.3) and the maximality of S. Therefore $H\subset G\cap S$ i.e. $H=G\cap S$. Thus $G\cap S$ is a maximal solvable connected subgroup of G. The first part of (1) and the converse part of (2) are proved. The second part of (1) is easily seen by using ZORN's lemma. Let R be a maximal solvable connected subgroup of G and let S' be a maximal solvable connected subgroup of G^* containing R. Then, as above, we see that $G\cap S'$ is connected, $S'=(G\cap S')^*$ and $G=(G\cap S')(D^\infty G^*)$. By the maximality of R, we have $R=G\cap S'$, whence $R^*=S'$ and $G=R(D^\infty G^*)$. (4) and the direct part of (2) are proved. By [*1*, (16.10)], maximal solvable connected subgroups of G^* are conjugate under inner automorphisms and therefore, by (4), under the inner automorphisms induced by elements of $D^\infty G^*$. (3) is immediate from this fact and (2). Thus (2.4) is proved.

We note that, by virtue of (3) in (2.4), for a connected D^∞-subgroup G of $GL(n, k)$ to be an SD^∞-group, it suffices to claim that one of the maximal solvable connected subgroups of G has the (S)-property.

For our convenience, given a subset M of $GL(n, k)$, we denote by M^* the closure of the group generated by M.

For any subgroup G of $GL(n, k)$, the set of all semisimple (resp. unipotent) elements of G is called the semisimple (resp. unipotent) part of G and denoted by G_s (resp. G_u).

Given a subset N of G, we denote by $\mathfrak{N}(N)$ and $\mathfrak{Z}(N)$ the normalizer and the centralizer of N in G respectively. Their connected components of the identity are called the connected normalizer and the connected centralizer of M in G.

3. Splittable D^∞-groups

We begin by generalizing [*1*, (19.5)]:

PROPOSITION 3.1. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ consisting of semisimple elements. Then G is commutative and G^* consists of semisimple elements.*

Let R be a maximal solvable connected subgroup of G. Then, by (2.4), R^* is a maximal solvable connected subgroup of G^*. It follows from LIE-KOLCHIN'S theorem that R^* may be triangulated, whence we have $[R, R] < R_u$. Since $R_u = e$ (e the identity element of G) by our assumption, R is commutative i.e. R is a torus. It follows from (2.3) that R^* is a torus. By using [4, 6—10], we see that G^* is nilpotent and $G^* = R^*$. Thus G^* is a torus and the proposition is proved.

By using Proposition 3.1, we can prove the following

THEOREM 3.2. *Let G be a splittable connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. Then $(G^*)_u < (G_u)^*$ and $(G^*)_s < (G_s)^*$.*

Let H be the group generated by the set G_u (resp. G_s). Then it follows from (2.2) that H is an invariant subgroup of G. By (2) in (2.3), H^* is an invariant subgroup of G^*. By [1, (5.10.2)] there exists a rational representation f of G^* with H^* as its kernel. Put $G' = f(G)$. Then G' is a connected D^∞-group. In fact, it is clear that G' is connected. By (2.2) we have $G'^* = f(G^*)$. Therefore, if we take a sufficiently large integer m,

$$D^\infty G'^* = D^m G'^* = D^m f(G^*) = f(D^m G^*) = f(D^\infty G^*).$$

Since G is a D^∞-group, it follows that $D^\infty G'^* < G'$, whence G' is a connected D^∞-group, as was asserted. By (2.2), G' is splittable and $(G')_u = f(G_u)$ (resp. $(G')_s = f(G_s)$). Since G_u (resp. G_s) is contained in the kernel of f, we see that G' consists of semisimple (resp. unipotent) elements. Therefore, by Proposition 3.1 (resp. since the fact that a matrix is unipotent can be expressed by the algebraic condition), G'^* consists of semisimple (resp. unipotent) elements. Let x be any element of $(G^*)_u$ (resp. $(G^*)_s$). Then $f(x)$ is a unipotent (resp. semisimple) element of G'^* by (2.2), whence we have $f(x) = e'$ (e' the identity element of G') and therefore x belongs to H^*. Thus $(G^*)_u$ (resp. $(G^*)_s$) is contained in H^* and the theorem is proved.

COROLLARY 3.3. *Let G be a splittable connected solvable subgroup of $GL(n, k)$. Then G_u is a connected invariant subgroup of G and $(G^*)_u = (G_u)^*$.*

Since G^* is a solvable connected algebraic subgroup of $GL(n, k)$ by (2.3), G^* may be triangulated by LIE-KOLCHIN'S theorem. Therefore we have $[G, G] < G_u$, whence G_u is an invariant subgroup of G. Since it is known [1, (10.1)] that $(G^*)_u$ is connected and algebraic, we have $(G_u)^* < (G^*)_u$. Therefore, it follows from Theorem 3.2 that $(G^*)_u = (G_u)^*$. Further, by (2.1), we see that G_u is connected, completing the proof.

For a D^∞-subgroup G of $GL(n, k)$, the connected component of the identity in the intersection of all maximal solvable connected subgroups of G is the largest solvable connected invariant subgroup of G, which we call the *radical* of G [6, Definition 5.1 and Proposition 5.2]. By virtue of Corollary 3.3, we can prove the following

THEOREM 3.4. *Let G be a splittable D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. Let R and N be respectively a maximal solvable connected subgroup and the radical of G. Then the following statements are equivalent:*

(1) *G is algebraic;*

(2) *R is algebraic;*

(3) *N is algebraic;*

(4) *The unipotent part and one of maximal tori of R (resp. N) are algebraic.*

Since $D^\infty G_0^* = D^m G_0^*$ for a sufficiently large integer m, it follows from (2.1) that $D^\infty G_0^*$ is connected and therefore contained in G_0. Therefore G_0 is a D^∞-group. G_0 is splittable as the intersection of splittable groups G and $(G_0)^*$. It is immediate that G is algebraic if and only if G_0 is algebraic and it is clear that R, N are a maximal solvable connected subgroup and the radical of G_0. Therefore it suffices to prove the theorem when G is connected.

It is evident that (1) implies (2) and (3). By (2.4) it is immediate that (2) implies (1). To see that (3) implies (1), it suffices to show that $G = N(D^\infty G^*)$. Let M be the radical of G^* and let f be a rational representation of G^* with M as its kernel. Then

$$f(D^\infty G^*) = f(D^m G^*) = D^m f(G^*)$$

for a sufficiently large integer m. Since the radical of $f(G^*)$ is e, i.e., $f(G^*)$ is semisimple, it follows from [4, 16−06] that $f(D^\infty G^*) = f(G^*)$. Therefore $G^* = M(D^\infty G^*)$. Since $D^\infty G^* < G$, we see that $G = (G \cap M)(D^\infty G^*)$ and therefore that $G^* = (G \cap M)^*(D^\infty G^*)$, whence $M = (G \cap M)^*$. Thus $G \cap M$ is a connected invariant subgroup of G. Since $N^* < M$ by (2.1) and (2.3), it follows that $N < G \cap M$ i.e. that $N = G \cap M$. Thus we have $G = N(D^\infty G^*)$, as was desired.

Furthermore, it is evident that (2) (resp. (3)) implies the first (resp. second) part of (4). We here assert that R and N are splittable. In fact, since G is splittable, the group generated by the semisimple and unipotent parts of all elements of R is a subgroup of G. Since its closure is equal to R^*, it is solvable and connected by (2.1) and (2.3). Therefore, by the maximality of R, it coincides with R. This shows that R is splittable. The intersection of all maximal solvable connected subgroups of G is therefore splittable. As its connected component of the identity, N is splittable, as was asserted. Suppose that the unipotent part R_u and a maximal torus T of R are algebraic. Then it follows from Corollary 3.3 that

$$R_u = (R_u)^* = (R^*)_u.$$

Let Q be a maximal torus of R^* containing T. Then, by the structure theorem of solvable connected algebraic groups, we have

$$R^* = Q(R^*)_u = Q R_u,$$

from which it follows that $R = (R \cap Q) R_u$ and therefore that $R^* = (R \cap Q)^* R_u$. Since Q contains $(R \cap Q)^*$, we have

$$Q = (R \cap Q)^*(R_u \cap Q) = (R \cap Q)^*.$$

Therefore $R \cap Q$ is connected by (2.1). Since $T < R \cap Q$, it follows from the maximality of T that $T = R \cap Q$ and therefore that $R = T R_u$. Thus we see

that R is algebraic. This proves that the first part of (4) implies (2). We can similarly prove that the second part of (4) implies (3). The proof is complete.

Before we state some necessary and sufficient conditions for a splittable D^∞-group to be an SD^∞-group, we shall prove several lemmas.

LEMMA 3.5. *Let G be a connected algebraic subgroup of $GL(n, k)$ and let R be a maximal solvable connected subgroup of G. Then we have*

$$C^\infty G = (C^\infty R)(D^\infty G) \quad \textit{and} \quad G_u < R_u(DG).$$

To prove that $C^\infty G = (C^\infty R)(D^\infty G)$, it suffices to show that

$$(1)_p \qquad C^p G = (C^p R)(D^\infty G),$$

since $C^\infty G = C^q G$ and $C^\infty R = C^q R$ for a sufficiently large integer q. By (2.4) we see that $G = R(D^\infty G)$, whence we have $(1)_0$. Assume now that the formula $(1)_p$ is true. Given any g in G and h in $C^p G$, we have

$$g = x\,u \quad \text{with } x \text{ in } R \text{ and } u \text{ in } D^\infty G,$$
$$h = y\,v \quad \text{with } y \text{ in } C^p R \text{ and } v \text{ in } D^\infty G.$$

Hence

$$\begin{aligned} g\,h\,g^{-1}h^{-1} &= (x\,u)(y\,v)(x\,u)^{-1}(y\,v)^{-1} \\ &= (x\,y\,x^{-1}y^{-1})\left((y\,x^{-1}y^{-1})^{-1}u(y\,x^{-1}y^{-1})\right)\left((y\,x)\,v\,u^{-1}(y\,x)^{-1}\right)(y\,v^{-1}y^{-1}), \end{aligned}$$

from which it follows that $g\,h\,g^{-1}h^{-1}$ belongs to a group $(C^{p+1}R)(D^\infty G)$. Therefore we have $C^{p+1}G < (C^{p+1}R)(D^\infty G)$. The converse inclusion is evident and we have the formula $(1)_{p+1}$, which is to be shown.

To prove that $G_u < R_u(D^\infty G)$, take a rational representation f of G with $D^\infty G$ as its kernel. Since $G = R(D^\infty G)$ by (2.4), we have $f(G) = f(R)$. Given an element x of G_u, $f(x)$ belongs to $f(R)_u = f(R_u)$, whence there exists an element y of R_u such that $f(x) = f(y)$. It shows that $y^{-1}x$ belongs to $D^\infty G$ and therefore that x belongs to $R_u(D^\infty G)$. Thus we have $G_u < R_u(D^\infty G)$. The proof is complete.

LEMMA 3.6. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ and let $G_1 = G(C^\infty G^*)$. Then G_1 is a connected D^∞-group. A maximal solvable connected subgroup of G_1 is $R(C^\infty R^*)$ with R a maximal solvable connected subgroup of G, and conversely.*

It is clear that G_1 is a group. Since $G_1^* = G^*$, G_1 is a connected D^∞-group. Let R_1 be a maximal solvable connected subgroup of G_1. Then it follows from (2.4) that R_1^* is a maximal solvable connected subgroup of G^* and that $R_1 = G_1 \cap R_1^*$. Put $R' = G \cap R_1$. Then we have

$$R' = G \cap (G_1 \cap R_1^*) = G \cap R_1^*,$$

from which it follows by (2.4) that R' and R'^* are maximal solvable connected subgroups of G and G^* respectively. Therefore, by Lemma 3.5, we have

$$G_1 = G(C^\infty G^*) = R'(D^\infty G^*)(C^\infty R'^*)(D^\infty G^*) = R'(C^\infty R'^*)(D^\infty G^*).$$

Since $C^\infty R_1^* \subset C^\infty G_1^* = C^\infty G^*$, it follows that $C^\infty R_1^* \subset G_1$. We assert that $R_1(C^\infty R_1^*)$ is a solvable connected subgroup of G_1. In fact, it is clear that $R_1(C^\infty R_1^*)$ is a subgroup of G_1. $R_1(C^\infty R_1^*)$ is solvable as a subgroup of a solvable group R_1^*. This is connected, as the image of a connected set of a rational mapping f from $R_1^* \times (C^\infty R_1^*)$ to R_1^* which is defined by

$$f(x, y) = xy \quad \text{for } x \text{ in } R_1^* \text{ and } y \text{ in } C^\infty R_1^*.$$

Thus the assertion is proved. Therefore, by the maximality of R_1, we have $R_1 = R_1(C^\infty R_1^*)$. It follows that $C^\infty R'^* \subset C^\infty R_1^* \subset R_1$. Therefore we have

$$R_1 = R'(C^\infty R'^*)(R_1 \cap D^\infty G^*) = R'(C^\infty R'^*).$$

Conversely, let R be a maximal solvable connected subgroup of G. Then $R(C^\infty R^*)$ is a solvable connected subgroup of G_1, whose proof may be quite similar to the proof of those properties of $R_1(C^\infty R_1^*)$ in the proof of the direct part. Take a maximal solvable connected subgroup R_2 of G_1 containing $R(C^\infty R^*)$. As in the proof of the direct part, we have $R_2 = R(C^\infty R^*)$. Thus $R(C^\infty R^*)$ is a maximal solvable connected subgroup of G_1. The lemma is proved.

LEMMA 3.7. *Let G be a splittable connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ and let $G_2 = G(G_u)^*$. Then G_2 is a connected D^∞-group. A maximal solvable connected subgroup of G_2 is $R(R^*)_u$ with R a maximal solvable connected subgroup of G, and conversely.*

Let H be the group generated by G_u. Then, by (2.2), H is an invariant subgroup of G. Therefore H^* is an invariant subgroup of G^*, whence $G(G_u)^*$ is a subgroup of G^*. Since $G_2^* = G^*$, G_2 is a connected D^∞-group. Let R_1 be a maximal solvable connected subgroup of G_2. It follows from (2.4) that R_1^* is a maximal solvable connected subgroup of G^* and that $R_1 = G_2 \cap R_1^*$. Put $R' = G \cap R_1$. Then

$$R' = G \cap (G_2 \cap R_1^*) = G \cap R_1^*,$$

from which it follows by (2.4) that R' and R'^* are maximal solvable connected subgroups of G and G^* respectively. By Lemma 3.5, we have

$$(G^*)_u \subset (R'^*)_u (D^\infty G^*).$$

Since $(R'^*)_u$ is an algebraic group by [1, (10.1)], $(R'^*)_u (D^\infty G^*)$ is also an algebraic group and therefore contains $(G_u)^*$, whence it coincides with $(G_u)^* (D^\infty G^*)$ by Theorem 3.2. It follows from (2.4) that

$$G_2 = G(G_u)^* = R'(D^\infty G^*)(R'^*)_u (D^\infty G^*) = R'(R'^*)_u (D^\infty G^*).$$

Since $(R_1^*)_u \subset (G_2^*)_u = (G^*)_u \subset (G_u)^*$ by Theorem 3.2, it follows that $(R_1^*)_u \subset G_2$. Since $(R_1^*)_u$ is a connected invariant subgroup of R_1^*, $R_1(R_1^*)_u$ is a subgroup of G_2. It is also solvable and connected. Its proof is quite similar to the proof of the corresponding fact in the proof of Lemma 3.6. Therefore, by

the maximality of R_1, we have $R_1 = R_1(R_1^*)_u$. It follows that $(R'^*)_u < (R_1^*)_u < R_1$. Therefore we have

$$R_1 = R'(R'^*)_u(R_1 \cap D^\infty G^*) = R'(R'^*)_u.$$

Conversely, let R be a maximal solvable connected subgroup of G. Then R is splittable as was shown in the proof of Theorem 3.4. By Corollary 3.3, we see that $(R^*)_u < G_2$. Therefore it is easily seen that $R(R^*)_u$ is a connected solvable subgroup of G_2. Take a maximal solvable connected subgroup R_2 of G_2 containing $R(R^*)_u$. As in the proof of the direct part, we have $R_2 = R(R^*)_u$, which shows that $R(R^*)_u$ is a maximal solvable connected subgroup of G_2. The proof is complete.

LEMMA 3.8. *Let $H = MN$ be a subgroup of $GL(n, k)$ such that M is a subgroup of H and such that N is an algebraic invariant subgroup of H. If M is splittable, then H is splittable.*

It is clear that N is an invariant subgroup of H^*. Take a rational representation f of H^* with N as its kernel [1, (5.10.2)]. Then $f(H) = f(M)$. Therefore, given an element x of H, there exists an element y of M such that $f(x) = f(y)$. Since, by (2.2),

$$f(x) = f(x_s)f(x_u) = f(x)_s f(x)_u$$

and

$$f(y) = f(y_s)f(y_u) = f(y)_s f(y)_u$$

are the Jordan product decompositions of $f(x)$ and $f(y)$ respectively, it follows that $f(x_s) = f(y_s)$, whence $x_s = y_s z$ with z in N. Since M is splittable by our assumption, y_s belongs to M and therefore that x_s belongs to H. Thus H is splittable, completing the proof.

LEMMA 3.9. *Let G be a splittable connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. Let G_1 and G_2 be the groups defined in Lemmas 3.6 and 3.7 respectively. Then G_1 and G_2 are connected SC^∞-groups, and $G_1 < G_2$.*

Let R be a maximal solvable connected subgroup of G. Put $R_1 = R(C^\infty R^*)$ and $R_2 = R(R^*)_u$. Since R^* may be triangulated, it follows that $C^\infty R^* < (R^*)_u$ and therefore that $R_1 < R_2$. By Lemmas 3.6 and 3.7, R_1 and R_2 are maximal solvable connected subgroups of connected D^∞-groups G_1 and G_2 respectively. Therefore, by (2.4), we have $G_1 = R_1(D^\infty G^*)$ and $G_2 = R_2(D^\infty G^*)$, from which it follows that $G_1 < G_2$. It is clear that G_1 and R_1 are connected C^∞-groups and therefore that G_2 and R_2 are also connected C^∞-groups. Since G is splittable, we see that R is splittable, by considering the group generated by the semisimple and unipotent parts of all elements of R. By using Lemma 3.8, we see that R_1 and R_2 are splittable, and therefore that G_1 and G_2 are splittable. We now use [6, Theorem 11.4] to conclude that G_1 and G_2 are connected SC^∞-groups.

We are now in a position to prove the following

THEOREM 3.10. *Let G be a splittable connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. Let $G_1 = G(C^\infty G^*)$ and $G_2 = G(G_u)^*$. Then G_1 and G_2 are connected SC^∞-groups. And the following statements are equivalent:*

(1) *G is an SD^∞-group;*

(2) *Any maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of G is a maximal torus of G_1;*

(3) *Any maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of G is a maximal torus of G_2.*

By Lemma 3.9, G_1 and G_2 are connected SC^∞-groups. We note that, if (2) (resp. (3)) is true, then (2) (resp. (3)) is also true for all maximal solvable connected subgroups of G, which is an immediate consequence of (3) in (2.4).

(1) $\rightarrow$ (3). Let R be a maximal solvable connected subgroup of G and let T be a maximal torus of R. Then $R=TR_u$ since G is an SD^∞-group by our assumption. Put $R_2=R(R^*)_u$. Then, by Lemma 3.7, R_2 is a maximal solvable connected subgroup of G_2 and we have

$$R_2=(TR_u)(R^*)_u=T(R^*)_u=T(R_2^*)_u.$$

It follows that T is a maximal torus of R_2. Since $(R_2^*)_u$ is algebraic, we have $R_2^*=T^*(R_2^*)_u$, from which it follows that T^* is a maximal torus of R_2^*. Since R_2^* is maximal solvable connected in G_2^* by (2.4), it follows from [*1*, (16.10)] that T^* is a maximal torus of G_2^*. Since $T\subset R_2\cap T^*$, we see that $T^*\subset(R_2\cap T^*)^*\subset T^*$ i.e. that $(R_2\cap T^*)^*=T^*$. By (2.1) $R_2\cap T^*$ is connected, whence $R_2\cap T^*=T$ by the maximality of T. Let T_2 be any maximal torus of G_2 containing T. Then T_2^* is a torus of G_2^* and contains T^*, whence we have $T_2^*=T^*$. It follows from (2.4) that

$$T_2\subset G_2\cap T^*=G_2\cap R_2^*\cap T^*=R_2\cap T^*=T.$$

Therefore $T_2=T$ i.e. T is a maximal torus of G_2.

(3) $\rightarrow$ (2) is immediate from the remark in the begining of the proof, since we have $G_1\subset G_2$ by Lemma 3.9.

(2) $\rightarrow$ (1). Let R be a maximal solvable connected subgroup of G satisfying (2) and let T be any maximal torus of R. Put $R_1=R(C^\infty R^*)$. Then R_1 is a maximal solvable connected subgroup of G_1 by Lemma 3.6 and has the (S)-property by Lemma 3.9. Since T is a maximal torus of R_1 by our assumption, we have $R_1=T(R_1)_u$, from which it follows that

$$R=T\big(R\cap(R_1)_u\big)=TR_u.$$

Thus R has the (S)-property. By the remark after (2.4), G is an SD^∞-group. This completes the proof.

4. A type of splittable D^∞-groups

To develop more properties of splittable D^∞-subgroups of $GL(n, k)$, we consider the following condition for a connected D^∞-group G:

(a) *For one of the maximal solvable connected subgroups R of G, the closure of any maximal torus of R is a maximal torus of R^*.*

It is immediate that any SD^∞-subgroup of $GL(n, k)$ satisfies this condition, but a splittable D^∞-group satisfying this condition is not necessarily an SD^∞-group as is shown in Example 1. All the theorems and propositions in [6, Part II] can be proved for splittable D^∞-groups satisfying the condition (a). We shall here state some of them.

We begin by proving

LEMMA 4.1. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$. If G satisfies the condition* (a), *then the closure of any maximal torus of any maximal solvable connected subgroup R of G is a maximal torus of R^*.*

Let R' be a maximal solvable connected subgroup of G satisfying the condition (a). Let T be a maximal torus of R. Then, by (2.4), there exists an element g of G such that $R=g^{-1}R'g$. If we write $T'=gTg^{-1}$, then T' is a maximal torus of R' and $T=g^{-1}T'g$. It follows from (2.2) that $R^*=g^{-1}R'^*g$ and $T^*=g^{-1}T'^*g$. Since T'^* is a maximal torus of R'^*, it is clear that T^* is a maximal torus of R^*, completing the proof.

LEMMA 4.2. *Let G be a splittable connected nilpotent subgroup of $GL(n, k)$. Then G_s is a connected central subgroup, G_u is a connected invariant subgroup of G, and G is the direct product of G_s and G_u.*

It is known that the statement is true for an algebraic group [1, (11.4)]. The lemma is immediate from this fact, (2.1) and (2.2).

LEMMA 4.3. *Let G be a triangular subgroup of $GL(n, k)$ and let T be a torus in G. Then $\mathfrak{Z}(T)=\mathfrak{N}(T)$.*

Let g be an element of $\mathfrak{N}(T)$. For any x in T, we put $y=x^{-1}g^{-1}xg$. Then it is clear that y is unipotent. Since $g^{-1}xg$ is in T, y is also in T, whence y is semisimple. Therefore $y=e$. This shows that $\mathfrak{N}(T)\subset\mathfrak{Z}(T)$. The converse inclusion is evident.

PROPOSITION 4.4. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Then a maximal torus of G is the intersection of G and a maximal torus of G^*, and its closure is a maximal torus of G^*. A maximal torus of a maximal solvable connected subgroup of G is a maximal torus of G.*

Let T be a maximal torus of G. Take a maximal solvable connected subgroup R of G containing T. By Lemma 4.1, T^* is a maximal torus of R^*. Since R^* is a maximal solvable connected subgroup of G^* by (2.4), T^* is a maximal torus of G^* [1, (16.10)]. Since $T^*=(G\cap T^*)^*$, $G\cap T^*$ is connected by (2.1). Therefore, by the maximality of T, we have $T=G\cap T^*$, proving the first part. Let T_1 be a maximal torus of a maximal solvable connected subgroup R of G. Then, by (2.4) and Lemma 4.1, T_1^* is a maximal torus of G^*. By (2.4) and the first part, we have

$$G\cap T_1^*=G\cap R^*\cap T_1^*=R\cap T_1^*=T_1.$$

If T' is a torus of G containing T_1, then $T'^*=T_1^*$ and therefore $T'\subset G\cap T_1^*=T_1$ i.e. $T'=T_1$. Thus T_1 is a maximal torus of G.

PROPOSITION 4.5. *Let G be a connected D^{∞}-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Let T and R be respectively a maximal torus and a maximal solvable connected subgroup of G. Then the following statements are equivalent:*

(1) *G has a unique maximal torus;*
(2) *T is contained in the center of G;*
(3) *G is nilpotent;*
(4) *R is nilpotent.*

Suppose that G has a unique maximal torus T. By (3) in (2.4), it is immediate that $T \subset R$. Since $R \subset \mathfrak{N}(T)$, it follows from Lemma 4.3 that $R \subset \mathfrak{Z}(T)$. By (2.3) we see that R^* centralizes T^*. Since T^* is a maximal torus of R^* by Lemma 4.1, it follows from the (S)-property of solvable connected algebraic groups that R^* is the direct product of T^* and $(R^*)_u$. Thus R^* is nilpotent, whence R is nilpotent, proving that (1) implies (4).

By (2.4) and [4, 6—10], it is immediate that (4) implies (3). By (2.3) and Lemma 4.2, it is clear that (3) implies (2).

Assume now (2) and let T' be any maximal torus of G. Let R' be a maximal solvable connected subgroup of G containing T'. Then, by Proposition 4.4, T'^* and T^* are maximal tori of G^*, $T = G \cap T^*$ and $T' = G \cap T'^*$. By the conjugation theorem [1, (16.10)], there exists an element g of G^* such that $T'^* = g^{-1} T^* g$. Since T^* is centralized by G^* by (2.3), we have $T'^* = T^*$, whence $T' = T$. Thus (2) implies (1). The proof is complete.

LEMMA 4.6. *Let G be a nilpotent subgroup of $GL(n, k)$. Then all the semisimple elements of G_0 belong to the center of G.*

By (2.3), G^* is nilpotent. All semisimple elements of $(G^*)_0$ belong to the center of G^* [1, (11.9)]. Since $G_0 \subset (G^*)_0$, it follows that all semisimple elements of G_0 belong to the center of G.

LEMMA 4.7. *Let G be a connected nilpotent subgroup of $GL(n, k)$ and let H be a connected proper subgroup of G. Then H is properly contained in its connected normalizer in G.*

If G is commutative or if H does not contain the connected component of the identity of the center $Z(G)$ of G, the lemma is clearly true. If $Z(G)_0 \subset H$, we can prove the lemma by induction on the smallest integer m such that $C^m G = e$ and by considering a rational representation of G^* with the closure of $Z(G)_0$ as its kernel. We omit the proof (cf. [6, Lemma 9.2]).

Before we state the theorem generalizing [1, (20.8) and 6, Theorem 9.3], we recall the definition of Cartan subgroups of a subgroup G of $GL(n, k)$.

A subgroup H of G is called a *Cartan subgroup* of G provided H is maximal nilpotent and any subgroup of finite index of H is of finite index in its normalizer [3, p. 199]. It is easy to see that the second condition can be replaced by the following condition: H_0 is equal to its connected normalizer.

THEOREM 4.8. *Let G be a splittable connected D^{∞}-subgroup of $GL(n, k)$ satisfying the condition* (a). *Then the centralizer of a maximal torus of G is a Cartan subgroup of G, and conversely.*

Let T be a maximal torus of G. Then, by Lemma 4.1, T^* is a maximal torus of the closure of a maximal solvable connected subgroup of G containing T and therefore, by (2.4) and Proposition 4.4, a maximal torus of G^*. It follows from [1, (18.4)] that the centralizer of T^* in G^* is nilpotent. Since $\mathfrak{Z}(T)$ centralizes T^* i.e. $\mathfrak{Z}(T)$ is contained in the centralizer of T^* in G^*, we see that $\mathfrak{Z}(T)$ is nilpotent. Suppose that H is a nilpotent subgroup of G containing $\mathfrak{Z}(T)$. Then $T \subset H_0$. It follows from Lemma 4.6 that T is contained in the center of H, whence we have $H \subset \mathfrak{Z}(T)$ i.e. $H = \mathfrak{Z}(T)$. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is maximal nilpotent. We assert that $\mathfrak{Z}(T)_0$ is equal to its connected normalizer. Indeed, put $C = \mathfrak{Z}(T)_0$. Then, by (2.3), it is clear that $C \subset G \cap C^* \subset \mathfrak{Z}(T)$. Since C^* is connected and since $(G \cap C^*)^* = C^*$, it follows that $G \cap C^*$ is connected. Therefore we have $C = G \cap C^*$, from which it follows that C is splittable. Thus C is a connected splittable nilpotent group. By Lemma 4.2, C is the direct product of the connected invariant subgroups C_s and C_u. Hence $T = C_s$ and therefore T is an invariant subgroup of $\mathfrak{N}(C)$. By using [1, (7.11)], we see that T is contained in the center of $\mathfrak{N}(C)_0$, whence $\mathfrak{N}(C)_0 \subset C$. Therefore we have $\mathfrak{N}(C)_0 = C$, as was asserted. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is a Cartan subgroup of G.

Conversely, let H be a Cartan subgroup of G. Since H^* is nilpotent by (2.3) and since H is maximal nilpotent, we have $H = G \cap H^*$, whence H is splittable. Then H_0 is splittable as the intersection of H and H_0^*. Let S be a maximal torus of H_0. Then H_0 is the direct product of the invariant subgroups S and $(H_0)_u$. Let R be a maximal solvable connected subgroup of G containing H_0, let T be a maximal torus of R containing S, and let M be the connected centralizer of S in TR_u. Then $T \subset M$. Since $M \subset TR_u \subset R$, it follows that $M = T(M \cap R_u) = TM_u$. And, by Corollary 3.3, M_u is connected. By using Lemma 4.7 and the second condition of Cartan subgroups, we see that $M_u = (H_0)_u$. Since H_0 is invariant in M, we have $H_0 = M$ and therefore $S = T$. By Proposition 4.4, S is a maximal torus of G and S^* is a maximal torus of G^*. It follows that the centralizer of S^* in G^* is nilpotent, whence $\mathfrak{Z}(S)$ is nilpotent as its subgroup. By Lemma 4.6, S is contained in the center of H, whence we have $H \subset \mathfrak{Z}(S)$. Since H is maximal nilpotent, we have $H = \mathfrak{Z}(S)$. Thus the theorem is proved.

COROLLARY 4.9. (1) *A Cartan subgroup of G is the intersection of G and a Cartan subgroup of G^*, and it is contained in one and only one Cartan subgroup of G^*.*

(2) *A Cartan subgroup of a maximal solvable connected subgroup of G is a Cartan subgroup of G. Conversely, a Cartan subgroup of G is a Cartan subgroup of any maximal solvable connected subgroup R of G containing its maximal torus T and is the intersection of R and $\mathfrak{N}(T)$.*

Let T be a maximal torus of G. Take a maximal solvable connected subgroup R of G containing T. Then, by Lemma 4.1, T^* is a maximal torus of R^*, from which it follows by (2.4) and Proposition 4.4 that T^* is a maximal torus of G^*. It is clear that $\mathfrak{Z}(T)$ is the intersection of G and of the centralizer

of T^* in G^*. Therefore the first part of (1) follows from Theorem 4.8. Suppose that $\mathfrak{Z}(T)$ is contained in a Cartan subgroup C of G^*. Then we see that $T^* \subset C$ since C is algebraic, and that T^* is a maximal torus of C. It is known [1, (18.4)] that C is connected. Therefore, by Lemma 4.2, C is the direct product of T^* and C_u, which shows that C is contained in the centralizer of T^* in G^*. By the maximality of C and Theorem 4.8, it follows that C is equal to the centralizer of T^* in G^*. Thus the second part of (1) is proved by Theorem 4.8.

To prove (2), let R be a maximal solvable connected subgroup of G and let T_1 be a maximal torus of R. Then T_1^* is a maximal torus of R^* and therefore of G^*. It follows from [1, (18.4)] that the centralizer of T_1^* in G^* is contained in R^*. Therefore $\mathfrak{Z}(T_1) \subset G \cap R^* = R$ by (2.4). We have the first part of (2) by Theorem 4.8. Let H be a Cartan subgroup of G. Then H is splittable and therefore H_0 is also. Hence, by Lemma 4.2, H has a unique maximal torus T, from which it follows by Theorem 4.8 that $H = \mathfrak{Z}(T)$ and that T is a maximal torus of G. As in the proof of the first part, we see that, if a maximal solvable connected subgroup R of G contains T, then H is contained in R and is a Cartan subgroup of R. Further, it is immediate from Lemma 4.3 that $\mathfrak{Z}(T) = R \cap \mathfrak{N}(T)$. Thus the proof is complete.

5. A theorem on the splittability and the (S)-property of D^∞-groups

In this section, we prove a theorem to show that the splittability and the (S)-property coincide for connected D^∞-subgroups of $GL(n, k)$ satisfying some condition which is weaker than the (C^∞)-condition.

THEOREM 5.1. *Let G be a connected D^∞-subgroup of $GL(n, k)$ such that $C^\infty G^*$ is contained in the normalizer of G_s in G^*. Then G is splittable if and only if it is an SD^∞-group.*

Suppose that G is an SD^∞-group. Then a maximal solvable connected subgroup R of G satisfies the (S)-property. Let x be any element of R. Then x_s and x_u belong to G^*. Take a maximal torus Q of R^* containing x_s by [1, (18.1)]. Then we assert that Q contains a maximal torus T of R. In fact, take a maximal torus T' of R and then take a maximal torus Q' of R^* containing T'. Then, by the conjugation theorem [1, (12.9)], there exists an element g of $C^\infty R^*$ such that $Q = g^{-1} Q' g$. Put $T = g^{-1} T' g$. Then, from (2.4) and the hypothesis on G, it follows that

$$T \subset G_s \cap R^* \subset G \cap R^* = R.$$

Thus Q contains a maximal torus T of R, as was asserted. Since $R = TR_u$, we can write

$$x = tu \quad \text{with } t \text{ in } T \text{ and } u \text{ in } R_u.$$

It follows that $t^{-1} x_s = u x_u^{-1}$, which belongs to $Q \cap (R^*)_u$. Therefore $x_s = t$ and $x_u = u$. Thus x_s and x_u belong to R, whence R is splittable. We can now use (2.4) and Lemma 3.8 to conclude that G is splittable.

Conversely, suppose that G is splittable. Let R be a maximal solvable connected subgroup of G and let T be a maximal torus of R. Then, from the maximality of R, it is immediate that R is splittable. Let x be any semi-simple element of R. Take a maximal torus Q of R^* containing T and take a maximal torus Q' of R^* containing x. By the conjugation theorem there exists an element g of $C^\infty R^*$ such that $Q'=g^{-1}Qg$. By using the hypothesis on G, we have $R\cap Q'=g^{-1}(R\cap Q)g$. Since x belongs to $R\cap Q'$, it follows that $x=g^{-1}yg$ with y in $R\cap Q$. Since R^* may be triangulated, we have

$$y^{-1}g^{-1}ygy\in R\cap C^\infty R^*\subset R\cap (R^*)_u=R_u.$$

Hence x belongs to $(R\cap Q)R_u$. It follows from the splittability of R that $R=(R\cap Q)R_u$. Therefore we have $R^*=(R\cap Q)^*(R^*)_u$ by Corollary 3.3. Since Q contains $(R\cap Q)^*$, it follows that

$$Q=(R\cap Q)^*\left(Q\cap (R^*)_u\right)=(R\cap Q)^*,$$

which shows that $R\cap Q$ is connected i.e. that $R\cap Q$ is a torus of G. Therefore $R\cap Q=T$ and $R=TR_u$. Thus R has the (S)-property, i.e., G is an SD^∞-group. The proof is complete.

The proof of "only if" part in the theorem gives us a simpler proof of the corresponding part of [6, Theorem 11.4]. We also note that almost all results in [3, Part III] are true for splittable D^∞-subgroups of $GL(n, k)$ satisfying the condition stated in the theorem. But we shall not state them here.

6. Examples

EXAMPLE 1. Let k be an algebraically closed field of characteristic 0 containing an element a which is transcendental over the prime field, e.g., the field of complex numbers. Let $\mathbf{Z}$ be the ring of all integers. Let k_1 be the subring of k consisting of all finite sums of the elements a^r, r in $\mathbf{Z}$, with integral coefficients. Let G denote the set of all matrices g of the following forms:

$$g=\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } r \text{ in } \mathbf{Z} \text{ and } b \text{ in } k_1.$$

Then G is a subgroup of $GL(2, k)$ and it is clear that G is *splittable*. Since the associated polynomial ideal is prime, G and G^* are *connected*. G^* is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } x\ (\neq 0) \text{ and } y \text{ in } k.$$

Let T be a maximal torus of G. Let s be the smallest positive integer among the integers r such that $\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ belongs to T, and let $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ be an element of T. Then, for any element $g=\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of T, it is immediate that

$r=js$ with some j in $\mathbf{Z}$ and that

$$b=\frac{c}{a^s-1}(a^r-1).$$

Therefore we have

$$g=\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j.$$

Thus T is the group generated by $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with c in k_1. If $s>1$, all of this type of subgroups of G are not necessarily maximal tori of G. However, if t is a positive integer different from 1 and if d is an element of k_1 such that d and a^t-1 are relatively prime in k_1, then the group T' generated by $\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a maximal torus of G. In fact, if an element $g=\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of G commutes with $\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, then we have

$$b=\frac{d}{a^t-1}(a^r-1).$$

Hence a^r-1 must be divisible by a^t-1 and therefore we have $r=jt$ with some j in $\mathbf{Z}$, from which it follows that

$$g=\begin{pmatrix} a^t & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j,$$

i.e., that g belongs to T'. Thus T' is a maximal torus of G.

Since G_u is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } b \text{ in } k_1,$$

it is clear that $G \neq T'G$ for a maximal torus T' of G stated above. Therefore G *has not the* (S)*-property*.

A maximal torus of G^* is the subgroup which can be represented as

$$\left\{\begin{pmatrix} x & u(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:\ x\ (\neq 0)\ \text{variable in } k\right\}$$

with u a fixed element of k. Indeed, this type of subgroup of G is clearly a maximal torus of G^*. Conversely, a maximal torus of G^* contains an element

$$\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } x' \neq 1$$

and therefore is equal to

$$\left\{\begin{pmatrix} x & \dfrac{y'}{x'-1}(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:\ x\,(\neq 0)\ \text{variable in } k\right\}.$$

Further it can be seen immediately that the closure of a maximal torus of G with $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ as its generator is a special type of maximal torus of G^* with

$$u = \frac{c}{a^s - 1}.$$

Thus G satisfies the condition (a) introduced in Section 4.

In connection with the theorems in Sections 3 and 4, G has the following properties:

(1) $(G^*)_u = (G_u)^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ y \text{ variable in } k \right\}$.

(2) G, G_u and all maximal tori of G are not algebraic.

(3) It is immediate that $C^\infty G^* = (G_u)^*$. Therefore the groups G_1 and G_2 in Theorem 3.10 are

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^r & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ r \text{ in } \mathbf{Z} \text{ and } y \text{ in } k \right\}.$$

A maximal torus T' of G mentioned above is not a maximal torus of G_1, since the group generated by $\begin{pmatrix} a & \frac{d}{a^t - 1}(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a torus of G_1 containing T' properly.

(4) Let T be a maximal torus of G. Let $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ be the generator of T. Then it is immediate that $\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{Z}(T)$ and that $\mathfrak{Z}(T)$ contains no unipotent elements. In the case that $s = 1$, any element $\begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{Z}(T)$ is equal to

$$\begin{pmatrix} a^r & \frac{c}{a-1}(a^r - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^r,$$

whence $\mathfrak{Z}(T) = T$. In the case that $s > 1$, if $\mathfrak{Z}(T) \neq T$, there exists an element $g = \begin{pmatrix} a^r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{Z}(T)$ such that $0 < r < s$. The group generated by g and T is a torus and contains T properly, contradicting the maximality of T. Thus $\mathfrak{Z}(T) = T$. Let M be a nilpotent subgroup of G containing T. Then, by considering the dimension, we see that $(M_0)^* = T^*$, whence $M_0 = T$. Since $M \subset \mathfrak{N}(T)$, we have $M = T$, which shows that T is maximal nilpotent. Thus $\mathfrak{Z}(T)$ is a Cartan subgroup of G.

Conversely, let H be a Cartan subgroup of G. Put $S = (H_0)_s$. Since H_0 is splittable nilpotent, S is a torus and therefore the group generated by $\begin{pmatrix} a^s & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with c in k_1. Then any element of H_0 normalizes S and therefore centralizes S.

It is immediate that H_0 contains no unipotent elements, whence H_0 consists of semisimple elements. Therefore $H_0=S$. If a torus of G contains S, then it is contained in $\mathfrak{N}(H_0)_0=H_0$ and therefore equal to S. Thus S is a maximal torus of G. We now have $\mathfrak{N}(S)=\mathfrak{Z}(S)=S$, whence $H=\mathfrak{Z}(S)$.

(5) The converses of Proposition 4.4 and Corollary 4.9 (1) are false for G.

EXAMPLE 2. Let k be the field of complex numbers. Let $\boldsymbol{Q}$ be the field of rational numbers and let $\boldsymbol{Z}$ be the ring of all integers. Let a be a positive transcendental number and, for any positive integer m, we denote by $a^{1/m}$ its positive m-th root. Let k_1 be the subring of k consisting of all finite sums with integral coefficients of the elements of the following forms:

$$a^{r}\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{j_1}(a^{r_1})^{i}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{j_n}(a^{r_n})^{i}}\right)$$

where $r, r_1, \ldots, r_n$ are in $\boldsymbol{Q}$ and $j_1, \ldots, j_n$ in $\boldsymbol{Z}$. Let G denote the set of all matrices g of the following forms:

$$g=\begin{pmatrix} a^{r} & b & c \\ 0 & a^{r} & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } r \text{ in } \boldsymbol{Q} \text{ and } b,\ c,\ d \text{ in } k_1.$$

Then G is a subgroup of $GL(3, k)$. Since the associated polynomial ideal is prime, G and G^* are *connected*. G^* is the set of all matrices

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } x\ (\neq 0),\ y,\ z \text{ and } u \text{ in } k.$$

It is easy to see that

$$g_s=\begin{pmatrix} a^{r} & 0 & c-\dfrac{b\,d}{a^{r}-1} \\ 0 & a^{r} & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g_u=\begin{pmatrix} 1 & b\,a^{-r} & \dfrac{b\,d\,a^{-r}}{a^{r}-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Take $b=d=1$. Then g_s and g_u are not contained in G since $1/(a^{r}-1)$ does not belong to k_1. Therefore G is *not splittable*.

Let T be a maximal torus of G. Then it contains an element

$$\begin{pmatrix} a^{s} & 0 & c \\ 0 & a^{s} & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } s\neq 0.$$

Let r be any element of $\boldsymbol{Q}$. Then we have $r=p/q$ and $s=l/m$ with p, q, l, m in $\boldsymbol{Z}$ and therefore

$$\frac{a^r-1}{a^s-1}=\frac{\left(\frac{1}{a^{qm}}\right)^{pm}-1}{\left(\frac{1}{a^{qm}}\right)^{ql}-1},$$

from which it follows that

$$\frac{a^r-1}{a^s-1}$$

is in k_1. Therefore, we see that T is equal to

$$\left\{\begin{pmatrix} a^r & 0 & \frac{c}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & a^r & \frac{d}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r \text{ variable in } \boldsymbol{Q}\right\}.$$

We also see that

$$\begin{pmatrix} a^r & b' & c' \\ 0 & a^r & d' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^r & 0 & \frac{c}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & a^r & \frac{d}{a^s-1}(a^r-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b'a^{-r} & a^{-r}\left(c'-\frac{c}{a^s-1}(a^r-1)\right) \\ 0 & 1 & a^{-r}\left(d'-\frac{d}{a^s-1}(a^r-1)\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore $G=TG_u$. Thus G *has the* (S)*-property*.

A maximal torus of G^* is of the form

$$\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & w(x-1) \\ 0 & x & w'(x-1) \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} : x(\neq 0) \text{ variable in } k\right\}$$

with w and w' fixed elements of k. The closure of a maximal torus T of G is a special type of maximal torus of G^* with

$$w=\frac{c}{a^s-1} \quad \text{and} \quad w'=\frac{d}{a^s-1}$$

where c and d are in k_1. We see that a maximal torus of G^* does not contain a maximal torus of G generally and therefore that the condition introduced in Theorem 5.1 is not satisfied by G.

EXAMPLE 3. Let k, $\boldsymbol{Z}$ and a have the same meaning as in Example 1. Let k_1 be the subring of k consisting of all rational functions of a with integral coefficients. We define the group G as in Example 1. Then it is immediate that any maximal torus of G is the group generated by $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with b in k_1. Therefore $G=TG_u$. It is also immediate that G is splittable. Thus G *is a connected splittable group and has the* (S)*-property*. As in Example 1,

we see that G has the following properties: The intersection of G and a maximal torus of G^* is not necessarily a maximal torus of G, and a maximal torus of G^* is not necessarily the closure of a maximal torus of G. Cartan subgroups of G coincide with maximal tori. Therefore the converses of [6, Theorems 8.1 and 9.4] are not true.

Bibliography

[1] BOREL, A.: Groupes linéaires algébriques. Ann. of Math. **64**, 20–82 (1956).
[2] CHEVALLEY, C.: Théorie des groupes de Lie, Tome II, Groupes algébriques. Paris 1951.
[3] CHEVALLEY, C.: Théorie des groupes de Lie, Tome III, Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie. Paris 1955.
[4] CHEVALLEY, C.: Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire École Normale Supérieure 1956–1958.
[5] TÔGÔ, S.: On splittable linear Lie algebras. J. Sci. Hiroshima University (A) **18**, 289–306 (1955).
[6] TÔGÔ, S.: On splittable linear groups. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **8**, 49–76 (1959).

Dept. of Math., Hiroshima University, Hiroshima (Japan)

(Eingegangen am 26. Januar 1960)

GUHA, U. C.
Math. Zeitschr. 75, 325—327 (1961)

Rearrangements of the coefficients of a Power series

By
U. C. GUHA

1. Let $\pi(n' \to n)$ denote a rearrangement of all non-negative integers by which the integer n is replaced by the integer n'. The main object of this paper is to characterise the class of those rearrangements of the coefficients which keep unaltered the radius of convergence of every power series $\sum_0^\infty a_n z^n$. Such a result naturally has a bearing on "rearrangement problems" of Abel summable series.

2. THEOREM 1. *A necessary and sufficient condition that a rearrangement $\pi(n' \to n)$ keeps unaltered the radius of convergence of any power series $\sum_0^\infty a_n z^n$ is that $n' = n + o(n)$.*

PROOF. Denote the radius of convergence of $\sum_0^\infty a_n z^n$ by ϱ and that of the rearranged series $\sum_0^\infty a_{n'} z^n$ by ϱ', so that $\varrho = 1/\overline{\lim} |a_n|^{1/n}$ and $\varrho' = 1/\overline{\lim} |a_{n'}|^{1/n}$.

Let $n' = n + o(n)$. At first assume that ϱ is not zero or infinity. Taking a sufficiently small positive number δ, we have, for infinitely many n,

$$0 < \frac{1}{\varrho} - \delta < |a_n|^{1/n}.$$

Since distinct values of n correspond to distinct values of n' and vice versa, it follows that, for infinitely many n,

$$0 < \frac{1}{\varrho} - \delta < |a_{n'}|^{1/n'},$$

so that

$$0 < \left(\frac{1}{\varrho} - \delta\right)^{n'/n} < |a_{n'}|^{1/n}. \tag{1}$$

Let ε be any given positive number. Remembering that $\frac{n'}{n} = 1 + o(1)$ it follows from (1), δ being suitably chosen and n sufficiently large, that

$$\frac{1}{\varrho} - \varepsilon < |a_{n'}|^{1/n} \tag{2}$$

for infinitely many n.

Again, since n' tends to infinity with n, we have, for all sufficiently large n, $|a_{n'}|^{1/n'} < \frac{1}{\varrho} + \delta$ so that

$$|a_{n'}|^{1/n} < \left(\frac{1}{\varrho} + \delta\right)^{n'/n}. \tag{3}$$

This gives, with suitably chosen δ,

$$|a_{n'}|^{1/n} < \frac{1}{\varrho} + \varepsilon \tag{4}$$

for all sufficiently large n. (2) and (4) together imply that $\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n} = \frac{1}{\varrho}$, so that $\varrho' = \varrho$.

Some trivial alterations in the foregoing steps will take care of the cases $\varrho = 0$ and $\varrho = \infty$.

To show that the condition is necessary, take any rearrangement for which $n' \neq n + o(n)$, so that $\left|\frac{n'-n}{n}\right|$ is larger than some positive number α for infinitely many n. Suppose that

$$\frac{n'-n}{n} > \alpha \quad \text{when} \quad n = s_1, s_2, \ldots$$

and

$$\frac{n'-n}{n} < -\alpha \quad \text{when} \quad n = t_1, t_2, \ldots.$$

Case 1. Let the set $S \equiv \{s_1, s_2, \ldots\}$ be an infinite set. Choose a number R greater than unity and define the series $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{R^n} & \text{when} \quad n = s_1', s_2', \ldots, \\ 0 & \text{for other values of } n. \end{cases}$$

Clearly, $\varrho = R$ and $\varrho' = 1/\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n}$ $(n \in S)$. Now, when $n \in S$,

$$|a_{n'}|^{1/n} = \left(|a_{n'}|^{1/n'}\right)^{n'/n} = \left(\frac{1}{R}\right)^{n'/n} < \left(\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha}$$

and hence

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} \leqq \left(\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} < \frac{1}{R},$$

so that $\varrho' > \varrho$.

Case 2. Let S be a finite set. Then the set $T \equiv \{t_1, t_2, \ldots\}$ must be an infinite set. As before, take R greater than unity and define $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{R^n} & \text{when} \quad n = t_1', t_2', \ldots, \\ 0 & \text{for other values of } n. \end{cases}$$

In this case, when $n \in T$,

$$|a_{n'}|^{1/n} = \left(\frac{1}{R}\right)^{n'/n} > \left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}$$

which implies that $\varrho' < \varrho$. This completes the proof.

From the above discussion it is easy to see that, if $\varrho > 1$, only those coefficients which are shifted to the right (that is, those $a_{n'}$ for which $n' < n$) tend to decrease the radius of convergence. Hence, for the class of power series having $\varrho > 1$, a necessary and sufficient condition that the rearrangement $\pi(n' \to n)$ does not decrease (increase) the radius of convergence is that $n' = n + o(n)$ when $n' < n$ $(n' > n)$. Similar results are true when $\varrho < 1$.

3. If we consider only those power series which have $\varrho=1$, we obtain

THEOREM 2. *A necessary and sufficient condition that a rearrangement* $\pi(n'\to n)$ *keeps unaltered the radius of convergence of any power series* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *whose radius of convergence is unity is that* $n'=n+O(n)$.

PROOF. To prove that the condition is sufficient, we notice that (1) is now replaced by

$$0<(1-\delta)^{n'/n}<|a_{n'}|^{1/n}$$

for infinitely many n.

Now, for all n $(\neq 0)$, it follows from the condition on n' that $\frac{n'}{n}<K$, where K is some fixed positive number. Therefore, for infinitely many n

$$\begin{aligned}|a_{n'}|^{1/n}&>(1-\delta)^K\\&>1-\varepsilon \quad \text{if } \delta \text{ is sufficiently small.}\end{aligned}$$

Similarly, in place of (3), we have, for all sufficiently large n,

$$\begin{aligned}|a_{n'}|^{1/n}&<(1+\delta)^{n'/n}\\&<(1+\delta)^K\\&<1+\varepsilon \quad \text{if } \delta \text{ is sufficiently small.}\end{aligned}$$

To show that the condition is necessary, let us take any rearrangement for which $n'\neq n+O(n)$, so that n'/n is greater than any given positive number for infinitely many values of n. Suppose that $\frac{n'}{n}>r$ (positive integer) when $n=u_r$ and that, without any loss of generality, $u_1<u_2<u_3<\cdots$. Define the series $\sum_0^\infty a_n z^n$ by taking

$$a_n=\begin{cases}\left(1+\frac{1}{r}\right)^n & \text{when } n=u_r' \quad (r=1,2,\ldots),\\ 0 & \text{for other values of } n.\end{cases}$$

Clearly $\varrho=1$ and $\varrho'=1/\overline{\lim}\,|a_{n'}|^{1/n}$, n always remaining in the set $\{u_1, u_2, \ldots\}$. But, if $n=u_r$, then

$$|a_{n'}|^{1/n}=\left(|a_{n'}|^{1/n'}\right)^{n'/n}>\left(1+\frac{1}{r}\right)^r.$$

Hence $\varrho'<1$*.

(University of Malaya, Singapore)

(Eingegangen am 3. Juni 1960)

*) I wish to thank Prof. H. WIELANDT for pointing to me, after the present paper was submitted for publication, that the two papers named below contain results that can be used to prove the theorems in the present paper.

1. SHEFFER, I. M.: Systems of linear equations of analytic type. Duke Math. J. **11**, 167–180 (1944).

2. ZELLER, K.: Transformationen des Durchschnitts und der Vereinigung von Folgenräumen. Math. Nachr. **10**, 175–177 (1953).

WOLFSON, K. G.
Math. Zeitschr. 75, 328–332 (1961)

Baer subrings of the ring of linear transformations

By

KENNETH G. WOLFSON[1])

1. Introduction. In [4] KAPLANSKY has used the term Baer ring to denote those rings in which the left (right) annihilator of each subset is a principal left (right) ideal generated by an idempotent element. One of the examples given in [4] of a Baer ring is the set of all two by two triangular matrices over a field. It is the purpose of this note to show that this example is a particular case of a class of Baer subrings of the Baer ring of all linear transformations of a vector space. In particular the ring of all $n \times n$ triangular matrices over any division ring is a Baer ring, for any finite n.

Let $T(F_n)$ denote the ring of all $n \times n$ triangular matrices over F. Then we get the following result: If F, G are division rings, then any ring isomorphism of $T(F_n)$ and $T(G_m)$ implies $m = n$ and F and G isomorphic, provided m or n is at least three.

2. Definitions and preliminaries. The following basis free characterization of the ring of all triangular matrices serves as motivation for the class of rings to be considered.

THEOREM 1. *Let Q be a ring of linear transformations of the n dimensional vector space (F, A) over the division ring F. Then there exists a basis of (F, A) such that the elements of Q are simultaneously in triangular form (zeros below the main diagonal) if and only if there exists a sequence $0 = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_{n-1} < A_n = A$ of invariant subspaces A_i, where A_i is of dimension i.*

PROOF. Let Q be a set of $n \times n$ triangular matrices considered as operators on the right of the vector space (F, A) of row vectors. Let A_i be the subspace consisting of all vectors with the first $n - i$ components zero. Then A_i is of dimension i, $A_i < A_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ and each A_i is invariant under Q.

Suppose conversely that Q is given as a set of linear transformations of the n-dimensional vector space (F, A) with invariant subspaces A_i of dimension $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ with $A_i < A_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Let e_n be a basis for A_1. Let e_n, e_{n-1} be a basis for A_2. In general let A_i have the basis $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{n-i+1}$. If $\sigma \in Q$, then because of the invariance of each A_i, $e_i\sigma$ is a linear combination of those e_j with $j \geqq i$. Then under the usual correspondence $\sigma \leftrightarrow (\alpha_{ij})$ where $e_i\sigma = \sum_1^n \alpha_{ij} e_j$, it is seen that (α_{ij}) is a triangular matrix.

[1]) Research supported in part by a grant from the Research Council of Rutgers University. The author also wishes to acknowledge several helpful conversations with Professor RICHARD COHN during the preparation of this paper.

Now let (F, A) be a vector space of arbitrary dimension (finite or infinite) over a division ring F. Let $0=A_0<A_1\leqq A_2\leqq A_3\leqq\cdots\leqq A_{n-1}<A_n=A$ be a fixed sequence of subspaces. Let K be the ring of all those linear transformations of (F, A) which leave each A_i invariant. This is the class of rings to be considered. In particular K might be the set of all those linear transformations leaving invariant one subspace A_1. It is seen that K always has an identity element. If (F, A) has finite dimension n, and we have an A_i of dimension i for each $i=0, 1, 2, \ldots, n$ then K is isomorphic to the ring of all $n\times n$ triangular matrices over F.

If J is any subset of K, then $\mathscr{L}(J)$ is the set of all σ in K such that $\sigma J=0$. The right annihilator $\mathscr{R}(J)$ is defined similarly. If S is any subset of A, then $R(S)$ is the totality of elements ϱ in K, such that $S\varrho=0$, and $L(S)$ is the totality of α in K for which $A\alpha\leqq S$. If Q is any subset of K, then $N(Q)$ is the totality of x in A for which $xQ=0$, and AQ is the set of elements aq for a in A and q in Q.

We state the following generalizations of theorems which are proven in [5]. The proofs go over unchanged to the present case.

LEMMA 2. (1) *$R(S)=\mathscr{R}[L(S)]$ if S is a subspace for which $AL(S)=S$.*

(2) *$L(S)=\mathscr{L}[R(S)]$ if S is a subspace for which $N[R(S)]=S$.*

(3) *$\mathscr{L}(Q)=L[N(Q)]$ for any subset Q of K.*

(4) *$J=R[N(J)]$ for every right annihilator J, if $AL(S)=S$ for every subspace S of A.*

(5) *$H=L(AH)$ for every left annihilator H, if $AL(S)=S$ for every subspace S of A.*

Let A^* denote the (right) vector space of all linear functionals on A (all F homomorphisms of A into F). If $x\in A$ and $f\in A^*$ the effect of f operating on x will be denoted by (x, f). If S is any subspace of A, then S' is the subspace of elements $f\in A^*$ for which $(x, f)=0$, for each $x\in S$. If T is a subspace of A^* a similar definition of T' holds. Each subspace S of A satisfies $S''=(S')'=S$ ([1], p. 30).

3. The annihilating ideals. We have

LEMMA 3. *$AL(S)=S$ for every subspace S of A.*

PROOF. Pick an element w not in A_{n-1}. Then we can find an $f\in(A_{n-1})'$ such that $(w, f)\neq 0$. For otherwise $(w, A'_{n-1})=0$ and $w\in(A_{n-1})''=A_{n-1}$. Normalize f so that $(w, f)=1$. It is only necessary to prove $S\leqq AL(S)$. Let $s\in S$. Define the transformation σ by: $x\sigma=(x, f)s$. Then σ is a linear transformation in K since $A_{n-1}\sigma=0$ so $A_i\sigma\leqq A_i$ for each i. Clearly $A\sigma=Fs$ so $\sigma\in L(S)$. Since $w\sigma=s$ we have

$$s=w\sigma\in A\sigma\leqq AL(S) \quad \text{so that} \quad S\leqq AL(S)$$

completing the proof.

LEMMA 4. *$N[R(S)]=S$ for every subspace S of A.*

PROOF. It is only necessary to prove $N[R(S)] \subseteqq S$. Assume by way of contradiction that $b \in N[R(S)]$ but $b \notin S$. As in the proof of the preceding Lemma we can find an $f \in S'$ such that $(b, f) = 1$. Let a be a non-zero element of A_1. Define a linear transformation ϱ by:

$$x\varrho = (x, f)\, a \quad \text{for each} \quad x \in A .$$

Then $A\varrho = Fa$ yields $A_i\varrho \subseteqq A_1 \subseteqq A_i$ for each i, and $\varrho \in K$. But $S\varrho = 0$, $b\varrho = a \neq 0$. Hence $\varrho \in R(S)$, but $bR(S) \neq 0$ implies $b \notin N[R(S)]$. This contradiction completes the proof.

Armed with the preceding Lemmas we can now state the following theorem. The proofs are now the same as those of Theorem 4 and Corollary 5 of [6].

THEOREM 5. (1) *The correspondence $S \leftrightarrow L(S)$ is a lattice isomorphism of the lattice of all subspaces of A upon the lattice of all left annihilating ideals of K.*

(2) *The correspondence $S \leftrightarrow R(S)$ is a lattice anti-isomorphism of the lattice of all subspaces of A upon the lattice of all right annihilating ideals of K.*

(3) *A left annihilator $L(S)$ is generated by an idempotent if and only if, K contains an idempotent with range S.*

(4) *A right annihilator $R(S)$ is generated by an idempotent if and only if K contains an idempotent with null space S.*

REMARK. The preceding results can be seen to hold for a larger class of rings than we have considered. Firstly, the proofs would be unaltered if there were infinitely many invariant subspaces A_i provided there was both a smallest and largest proper invariant subspace in the collection. Secondly, we could consider a pair of dual spaces (A, B) over the division ring F, and then look at the ring of all those continuous linear transformations leaving invariant the (possibly infinite) collection of subspaces A_i with smallest and largest member (which is assumed closed). (A subspace M is closed if $M'' = M$.) The proof of Lemma 3 is unchanged in this case. Lemma 4 holds for S closed, and Theorem 5 establishes the correspondences between the annihilating ideals and the closed subspaces.

4. Baer rings. We show that the rings discussed in section 2 are Baer rings.

THEOREM 6. *K is a Baer ring.*

PROOF. In view of Theorem 5 and the Remark on p. 159 of [6] it is sufficient to show that if S is any subspace of A, then K contains an idempotent with range S. The following easily verified fact c.f.e.g. ([2], p. 179, Theorem 9) will be used repeatedly: Let M and N be subspaces with $M \cap N$ having a basis $\{x_i\}$. If $\{y_i\}$ forms a basis for a complement of $M \cap N$ in M, and $\{z_i\}$ a basis for a complement of $M \cap N$ in N, then the set of the x_i, y_i, z_i forms a basis for $M + N$.

Now consider the following sequence of subspaces:

$$0 \subseteqq S \cap A_1 \subseteqq S \cap A_2 \subseteqq S \cap A_3 \subseteqq \cdots \subseteqq S \cap A_{n-1} \subseteqq S \cap A_n = S \cap A = S .$$

Take a basis for $S\cap A_1$ and extend to a basis of A_1 and also to a basis of $S\cap A_2$. This is possible since $A_1\cap(S\cap A_2)=S\cap A_1$. We define a linear transformation σ of A inductively. Put it equal to the identity on $S\cap A_1$. On the complement of $S\cap A_1$ in $S\cap A_2$, σ is also the identity. The basis elements of the complement of $S\cap A_1$ in A_1 are mapped by σ onto zero. The mapping is now defined on $A_1+S\cap A_2$. We now extend the basis of $S\cap A_2$ to a basis of $S\cap A_3$ and also to a basis of A_2, being careful in this latter extension to first extend to the basis of $A_1+S\cap A_2$ already constructed. Let σ again be the identity map on the complement of $S\cap A_2$ in $S\cap A_3$ and the zero map on the complement of $A_1+S\cap A_2$ in A_2. Continue the extension in this manner. Suppose we have σ defined on A_{i-1} and $S\cap A_i$. We extend the basis of $S\cap A_i$ to $S\cap A_{i+1}$, and extend the basis of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ to one for A_i. Again this is possible since $(S\cap A_{i+1})\cap A_i=S\cap A_i$. We keep σ the identity on $S\cap A_{i+1}$ and map the complement of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ in A_i onto zero. We arrive finally at a transformation defined on $S\cap A_n=S$ and on A_{n-1} (being the identity on S). If $S+A_{n-1}$ is not all of A, the definition of σ is completed by mapping a complement of $S+A_{n-1}$ in A onto zero. It is clear that $A_1\sigma\subseteq A_1$. Assume that the subspaces $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ are all invariant under σ. If $x\in A_i$, $x=u+v+w$ with $u\in S\cap A_i$, $v\in A_{i-1}$, and w in a complement of $(S\cap A_i)+A_{i-1}$ in A_i. Then $x\sigma=u\sigma+v\sigma+w\sigma$. But $u\sigma=u$, $v\sigma\in A_{i-1}$ and $w\sigma=0$. Hence $x\sigma=u+v\sigma\in A_i+A_{i-1}\subseteq A_i$, so that $A_i\sigma\subseteq A_i$. Clearly σ is the identity on S. It will be idempotent if its range is exactly S. Let $\{x_i\}$ be a basis of $S\cap A_{n-1}$. Let $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ form a basis of S, and $\{x_i\}$, $\{z_i\}$ a basis of A_{n-1}. Finally let $\{w_i\}$ be a basis for a complement of $S+A_{n-1}$ in A. Then if $a\in A$, $a=b+c+d+e$, $b\in S\cap A_{n-1}$, c in space spanned by $\{y_i\}$, d in space spanned by $\{z_i\}$, and e in space spanned by $\{w_i\}$. Then $b\sigma=b$, $c\sigma=c$, $d\sigma=0$, and $e\sigma=0$. Hence $a\sigma=b+c\in S$. This completes the proof.

REMARK. The rings K are not in general even semi-simple. The set of $n\times n$ strictly triangular matrices (those with zeros also on the main diagonal) forms a two-sided nilpotent ideal of the ring of $n\times n$ triangular matrices. Hence in this latter ring there exist left (and hence also right) ideals which are not annihilating ideals. For if each left ideal was an annihilator, it would be generated by an idempotent (Theorem 6). But this implies semi-simplicity ([3], Theorem 7).

Let $T(F_n)$ denote the ring of all $n\times n$ triangular matrices with elements in the ring F. We have the following result:

THEOREM 7. *Suppose F and G are division rings, and that m or n is at least three. Then any isomorphism of the rings $T(F_n)$ and $T(G_m)$ implies that $n=m$, and F and G are ring isomorphic.*

PROOF. Let (F, A) be the vector space of n-tuples of elements of F, and (G, B) the set of m-tuples of elements from G. View $T(F_n)$ and $T(G_m)$ as the rings of linear transformations leaving the appropriate subspaces invariant. Since a ring isomorphism will map left annihilators onto left annihilators,

it will induce a lattice isomorphism of the set of left annihilators in $T(F_n)$ upon the set of left annihilators in $T(G_m)$. Using Theorem 5 we get a lattice isomorphism of the lattice of subspaces of (F, A) upon the lattice of subspaces of (G, B). Thus the dimensions of the spaces are equal, so that $m=n$. Now the Fundamental Theorem of Projective Geometry ([1], p. 44) tells us that F and G are isomorphic, since $m=n\geqq 3$.

References

[1] BAER, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York 1952.
[2] BIRKHOFF, G., and S. MACLANE: A Survey of Modern Algebra. New York 1947.
[3] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300–320 (1945).
[4] KAPLANSKY, I.: Rings of Operators. The University of Chicago (mimeographed), 1955.
[5] WOLFSON, K. G.: An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Amer. J. Math. **75**, 358–386 (1953).
[6] WOLFSON, K. G.: A class of primitive rings. Duke Math. J. **22**, 157–163 (1955).

Rutgers University, New Brunswick, N.J. (U.S.A.)

(Eingegangen am 10. Juni 1960)

Baer, R.
Math. Zeitschr. 75, 333–372 (1961)

Partitionen endlicher Gruppen

Richard Brauer, dem alten Freunde, zum 10. Februar 1961 gewidmet

Von

Reinhold Baer

Unter einer *Partition* der endlichen Gruppe $G \neq 1$ wird eine Menge σ von 1 verschiedener Untergruppen von G derart verstanden, daß jedes von 1 verschiedene Element aus G in einer und nur einer Untergruppe aus σ liegt. Enthält σ mit einer Untergruppe alle zu ihr konjugierten Untergruppen von G, so heiße σ *normal*. Jede von 1 verschiedene Gruppe G besitzt wenigstens eine Partition, nämlich die aus G allein bestehende *triviale* Partition.

Die anscheinend recht tiefe Frage, welche endlichen Gruppen nicht-triviale Partitionen besitzen, werden wir nur streifen. Wir werden uns vielmehr mit der Strukturanalyse gegebener normaler Partitionen befassen.

Frobenius-Partitionen. Dies sind normale, nicht triviale Partitionen, unter deren Komponenten wenigstens eine ihrem Normalisator gleich ist. Aus dem klassischen Satz von Frobenius folgt dann die Existenz eines zu diesen Komponenten komplementären Normalteilers; ist dieser auch eine Komponente, so wollen wir von einer *minimalen* Frobenius-Partition sprechen. Es sei bemerkt, daß eine Gruppe höchstens eine minimale Frobenius-Partition besitzen kann [Satz 6.6].

Elementare Partitionen. Von einer solchen wollen wir sprechen, wenn es einen von G verschiedenen Normalteiler K derart gibt, daß alle nicht in K enthaltenen zyklischen Untergruppen von G Komponenten der Partition sind und Primzahlordnung haben. Alle normalen, nicht-trivialen Partitionen von p-Gruppen sind im eben angegebenen Sinne elementar [Zusatz 5.6].

Nicht-einfache Partitionen. Die Partition σ von G heiße nicht-einfach, wenn es einen eigentlichen Normalteiler K von G derart gibt, daß $K \cap X = 1$ für jede nicht in K enthaltene Komponente X von σ gilt. Alle Frobenius-Partitionen und die meisten elementaren Partitionen sind nicht-einfach. Umgekehrt gilt: Ist die Partition σ der Gruppe G normal und weder trivial noch einfach noch eine Frobenius-Partition, ist weiter G keine Primärgruppe, so gibt es eine Komponente K von σ mit folgenden Eigenschaften: $[G:K]$ ist eine Primzahl p und K wird von den Elementen mit von p verschiedener Ordnung erzeugt, so daß K charakteristisch ist und die nicht in K enthaltenen Elemente sämtlich die Ordnung p haben, σ also elementar ist [Satz 5.1].

Hallsche Partitionen. Dies sind Partitionen, deren Komponenten teilerfremde Ordnung und Index haben, d. h. Hallsche Untergruppen sind. Eine normale Partition ist dann und nur dann Hallsch, wenn vertauschbare

Elemente in der gleichen Komponente liegen [Satz 6.1]; und eine Frobenius-Partition ist dann und nur dann minimal, wenn sie Hallsch ist [Satz 6.8]. Ist eine Hallsche Partition σ der Gruppe G normal, so ist σ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition oder G ist eine einfache nicht-abelsche Gruppe und die Komponenten von σ sind genau die maximalen nilpotenten Untergruppen von G [Satz 6.11].

Die Komponenten normaler, nicht trivialer Partitionen sind in ihrer Struktur sehr eingeschränkt. Meist sind sie nilpotent *, seltener Erweiterungen nilpotenter durch Primärgruppen; sind sie aber nicht solche Erweiterungen, so sind sie gleich ihrem Normalisator und wir haben es mit einer Frobenius-Partition zu tun; vgl. besonders §7.

Die Beweise beruhen auf einer systematischen Anwendung der sehr naheliegenden Lemmata 2.1 und 2.5 und der sehr tief liegenden Sätze von THOMPSON und von HUGHES-THOMPSON.

BEZEICHNUNGEN:

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

$\mathfrak{p}$-Element [$\mathfrak{p}$-Gruppe] = Element [Gruppe] mit $\mathfrak{p}$-Potenzordnung

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe G

$\mathfrak{F}G$ = Fittingsche Untergruppe der Gruppe G = Produkt der nilpotenten Normalteiler von G.

$\mathfrak{S}G$ = Sockel der Gruppe G = Produkt aller minimalen Normalteiler von G.

$\mathfrak{N}U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G.

$\mathfrak{C}U$ = Zentralisator der Teilmenge U von G in G.

$a^b = b^{-1}ab = a(a \circ b)$.

$x \circ Y$ = Menge der Elemente $x^{-1}y^{-1}xy$ mit y in Y.

Normalisatorgleich sind $U = \mathfrak{N}U$ erfüllende Untergruppen.

Komplementär sind $G = AB = BA$, $1 = A \cap B$ erfüllende Untergruppen A, B von G.

$A < B$ bedeutet, daß A Untergruppe $\neq B$ von B ist.

Frobenius-Automorphismen sind Automorphismen von Primzahlordnung ohne von 1 verschiedene Fixelemente.

Frobenius-Gruppen von Automorphismen sind Gruppen Γ von Automorphismen derart, daß 1 der einzige Automorphismus aus Γ mit von 1 verschiedenen Fixelementen ist.

Hallsche Untergruppen sind Untergruppen, deren Ordnung und Index teilerfremd sind.

ALLE BETRACHTETEN GRUPPEN SIND ENDLICH.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [22. Januar 1961]. Inzwischen hat Herr O. KEGEL den Nachweis geführt, daß Komponenten nilpotent sind, wenn sie nicht gleich ihrem Normalisator sind.

1. Anzahlbeziehungen und Trivialitätskriterien

Eine Partition der Gruppe G ist eine Menge σ von $\mathfrak{1}$ verschiedener Untergruppen von G derart, daß jedes von $\mathfrak{1}$ verschiedene Element aus G in einer und nur einer Untergruppe aus σ enthalten ist. Die Untergruppen aus σ werden wir auch als *Komponenten der Partition* σ bezeichnen. Die charakteristische Eigenschaft einer Partition kann man auch in die folgenden beiden Teile zerlegen:

I. Partitionen sind Überdeckungen der Gruppe.

II. Verschiedene Komponenten einer Partition haben nur die Eins gemein.

Die Eigenschaft II werden wir gewöhnlich in der „negativen" Form anwenden:

Sind A und B Komponenten einer Partition, so ist dann und nur dann $A=B$, wenn $A\cap B\neq\mathfrak{1}$ ist.

Die von uns betrachteten Partitionen werden vorwiegend normal sein. Hierbei wird eine Partition *normal* genannt, wenn mit einer Untergruppe alle zu ihr konjugierten Untergruppen Komponenten der Partition sind. Normale Partitionen bestehen also aus ganzen Klassen konjugierter Untergruppen.

Geometrische Interpretation. Ist σ eine normale Partition der Gruppe G, so sei π die Menge aller Restklassen von G nach Untergruppen aus σ. [Wegen $Sx=xx^{-1}Sx$ brauchen wir bei normalen Partitionen nicht zwischen Rechts- und Linksrestklassen zu unterscheiden.] Jedes Paar verschiedener Elemente aus G liegt dann auf einer und nur einer Restklasse aus π, so daß π als Inzidenzstruktur angesehen werden kann.

Ist $\mathfrak{X}=X^G$ die Klasse der zu X konjugierten Untergruppen von G, so haben alle Untergruppen aus $\mathfrak{X}$ dieselbe Ordnung; wir können also $o(\mathfrak{X})=o(X)$ setzen. Ebenso dürfen wir $i(\mathfrak{X})=[G:\mathfrak{N}X]$ und $d(\mathfrak{X})=[\mathfrak{N}X:X]$ setzen, da diese beiden Zahlen von der Auswahl des speziellen Individuums X in der Klasse $\mathfrak{X}$ unabhängig sind. Es sei noch auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß $i(\mathfrak{X})$ *genau die Zahl der Untergruppen in der Klasse* $\mathfrak{X}$ ist, und daß

$$o(G)=i(\mathfrak{X})\,d(\mathfrak{X})\,o(\mathfrak{X}) \tag{1.0}$$

gilt.

Ist σ eine normale Partition der Gruppe G, so sei $i(\sigma)$ die Anzahl der Komponenten von σ. Natürlich gilt dann

$$i(\sigma)=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma} i(\mathfrak{X}),$$

wobei die Summe über alle in σ enthaltenen Klassen konjugierter Untergruppen zu erstrecken ist. Wir setzen weiter

$$r(\sigma)=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma} d(\mathfrak{X})^{-1},$$

wobei wir wieder dieselbe Konvention über die Summation anwenden.

Durch Abzählen der von 1 verschiedenen Elemente in der Gruppe G ergibt sich nun für jede normale Partition σ von G die folgende Beziehung:

$$(1.1)\quad o(G)-1=\sum_{X\in\sigma}[o(X)-1]=\sum_{\mathfrak{X}\subseteq\sigma} i(\mathfrak{X})\,[o(\mathfrak{X})-1]=o(G)\,r(\sigma)-i(\sigma)$$

oder

$$(1.2)\quad o(G)\,[r(\sigma)-1]=i(\sigma)-1.$$

Bedenken wir, daß jeder der Indizes $i(\mathfrak{X})$ ein Teiler von $o(G)$ ist, so ergibt sich, daß der größte gemeinschaftliche Teiler aller $i(\mathfrak{X})$ wegen (1.1) ein Teiler von 1 ist; und wir haben gezeigt:

(1.3) *Ist σ eine normale Partition von G, so ist der größte gemeinschaftliche Teiler aller Indizes $i(\mathfrak{X})$ für in σ enthaltene Klassen $\mathfrak{X}$ konjugierter Untergruppen gleich* 1.

BEMERKUNG. Dieses Resultat kann man auch folgendermaßen direkt herleiten: Es sei σ eine normale Partition der Gruppe G und $P\neq 1$ eine p-Sylow-Untergruppe von G. Dann enthält $\mathfrak{Z}P$ ein Element $t\neq 1$; und dieses liegt in einer und nur einer Komponente T von σ. Ist a irgendein Element aus P, so liegt $t=t^a$ in $T\cap T^a$, woraus wir $T=T^a$ wegen der Zugehörigkeit von T^a zur normalen Partition σ erschließen können. Folglich gehört a zu $\mathfrak{N}T$; und damit ist $P\subseteq\mathfrak{N}T$ bewiesen. *Jede Sylow-Untergruppe von G liegt also im Normalisator von wenigstens einer Komponente von σ*; dies ist eine mit (1.3) äquivalente Aussage.

Wir erinnern daran, daß eine Partition *trivial* heißt, wenn sie nur aus der einen Untergruppe G besteht. Es ist klar, daß die Partition σ dann und nur dann trivial ist, wenn $i(\sigma)=1$ ist; und dies ist wegen (1.2) für normale Partitionen mit $r(\sigma)=1$ gleichwertig. Also gilt:

(1.4) *Die normale Partition σ ist dann und nur dann trivial, wenn $r(\sigma)=1$ ist.*

Für nicht-triviale normale Partitionen ist $i(\sigma)-1$ positiv; und aus (1.2) folgt dann sofort $1<r(\sigma)$, da ja Ordnungen positiv sind. — Da alle Komponenten einer Partition von 1 verschieden sind, so ist $2\leqq o(\mathfrak{X})$ für jede in σ enthaltene Klasse konjugierter Untergruppen. Aus (1.0) folgt

$$i(\mathfrak{X})\leqq\tfrac{1}{2}o(G)\,d(\mathfrak{X})^{-1};$$

und Summation über alle Klassen $\mathfrak{X}$ ergibt dann

$$i(\sigma)\leqq\tfrac{1}{2}o(G)\,r(\sigma).$$

Kombination mit (1.1) ergibt weiter

$$\tfrac{1}{2}o(G)\,r(\sigma)\leqq o(G)\,r(\sigma)-i(\sigma)=o(G)-1<o(G).$$

Damit haben wir gezeigt:

(1.5) *Ist σ eine nicht-triviale, normale Partition von G, so ist* $1<r(\sigma)<2$.

BEMERKUNG. Ist etwa G eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 2^n und σ die aus allen zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 bestehende normale Partition von G, so ist $i(\sigma)=2^n-1$, jedes $i(\mathfrak{X})=1$ und jedes $d(\mathfrak{X})=2^{n-1}$, woraus

$$r(\sigma)=2^{-n}[2^n-2]+1=2-2^{1-n}$$

folgt. Durch hinreichend große Wahl von n kann man also $r(\sigma)$ beliebig nahe an 2 heranbringen; die Ungleichung (1.5) ist folglich im allgemeinen keiner Verbesserung fähig. Die obere Schranke wird aber kleiner werden, wenn man spezielle Annahmen über σ macht.

LEMMA 1.6. *Ist σ eine normale Partition von G, so sind irgend zwei normalisatorgleiche Komponenten von σ in G konjugiert.*

BEWEIS. Aus (1.5) und der Definition von $r(\sigma)$ folgt, daß höchstens eines der $d(\mathfrak{X})=1$ sein kann. Da aber $d(\mathfrak{X})=1$ mit $X=\mathfrak{N}X$ für X aus $\mathfrak{X}$ gleichwertig ist, so müssen normalisatorgleiche Komponenten von σ der gleichen Klasse konjugierter Untergruppen von G angehören.

SATZ 1.7. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition σ von G sind äquivalent:*

(a) *σ ist trivial.*

(b) *Die Komponenten von σ sind sämtlich normalisatorgleich.*

(c) *Die Komponenten von σ sind in G konjugiert.*

BEWEIS. Ist σ trivial, so ist G die einzige Komponente von σ; und diese ist gewiß normalisatorgleich. Also folgt (b) aus (a). — Es ergibt sich aus Lemma 1.6, daß (c) aus (b) folgt. — Gilt (c), so ist $i(\sigma)=1$ wegen (1.3). Also besteht σ nur aus einer Komponente, d.h. σ ist trivial, womit (a) aus (c) hergeleitet ist.

FOLGERUNG 1.8. *Besteht die normale Partition σ von G nur aus maximalen auflösbaren Untergruppen von G, so ist sie trivial [und also G selbst auflösbar].*

BEWEIS. Ist U eine maximale auflösbare Untergruppe von G und g ein Element aus $\mathfrak{N}U$, so ist auch $\{U, g\}=U\{g\}$ auflösbar; und aus der Maximalität von U folgt also die Zugehörigkeit von g zu U, d.h. die Normalisatorgleichheit von U. Folglich besteht σ nur aus normalisatorgleichen Komponenten; und wir können aus Satz 1.7 die Trivialität von σ erschließen.

2. Vertauschbarkeit und Zugehörigkeit zur gleichen Komponente

Das folgende ebenso einfache wie nützliche Kriterium ist wohlbekannt und sei hier mit seinem Beweis der Bequemlichkeit des Lesers wegen eingefügt.

LEMMA 2.1. *Ist σ eine Partition der Gruppe G, sind a und b vertauschbare Elemente aus G [d.h. $ab=ba$], deren Ordnungen nicht beide gleich derselben Primzahl sind, so gehören a und b derselben Komponente von σ an.*

BEWEIS. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $a\neq 1\neq b$ ist.

Fall 1. $o(a)\neq o(b)$

Dann ist nicht gleichzeitig $o(a)$ ein Teiler von $o(b)$ und $o(b)$ ein Teiler von $o(a)$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $o(a)$ kein Teiler von $o(b)$ ist. Dies ist gleichwertig mit $a^{o(b)} \neq 1$. Es gibt eine a enthaltende Komponente A und eine ab enthaltende Komponente B von σ; und aus $ab = ba$ folgt

$$1 \neq a^{o(b)} = (ab)^{o(b)} \in A \cap B.$$

Aus der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen folgt $A = B$, so daß mit a und ab auch b zu A gehört.

Fall 2. $o(a) = o(b)$.

Dann ist $o(a)$ nach Voraussetzung keine Primzahl. Aus $a \neq 1$ folgt die Existenz eines Primteilers p von $o(a)$, der von $o(a)$ verschieden ist. Insbesondere ist also $a^p \neq 1$. Die Elemente a^p und b sind dann vertauschbare Elemente verschiedener Ordnung, die nach Fall 1 in der gleichen Komponente B von σ liegen. Weiter liegt a in einer Komponente A von σ; und es gilt

$$1 \neq a^p \in A \cap B.$$

Aus der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen folgt $A = B$, so daß a und b beide in der Komponente A von σ liegen.

BEMERKUNG 2.2. Ist G eine elementar-abelsche p-Gruppe, aber nicht zyklisch, so bildet die Gesamtheit der zyklischen Untergruppen der Ordnung p von G eine normale Partition σ von G. Hier liegen also vertauschbare Elemente nicht immer in der gleichen Komponente; und dies zeigt, daß die die Ordnungen betreffende Voraussetzung in Lemma 2.1 unentbehrlich ist.

FOLGERUNG 2.3. *Ist σ eine Partition der Gruppe G, ist das Zentrum $\mathfrak{Z}U$ der Untergruppe U von G keine elementare Primärgruppe, so ist U ganz in einer Komponente von σ enthalten.*

BEWEIS. Daß die natürlich abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}U$ keine elementare Primärgruppe ist, ist gleichwertig mit der Existenz eines Elements $z \neq 1$ in $\mathfrak{Z}U$, dessen Ordnung keine Primzahl ist. Natürlich liegt z in einer und nur einer Komponente Z von σ. Ist u irgendein Element aus U, so ist $uz = zu$; und Anwendung von Lemma 2.1 ergibt die Zugehörigkeit von z und u zur gleichen Komponente von σ. Da aber z nur in der Komponente Z liegt, so gehört auch u zu Z; und damit haben wir das gewünschte $U \subseteq Z$ bewiesen.

BEMERKUNG 2.4. Ist in Folgerung 2.3 insbesondere $U = G$, so ergibt sich das folgende Trivialitätskriterium:

Ist $\mathfrak{Z}G$ keine elementare Primärgruppe, so besitzt G nur die triviale Partition.

Das folgende fast triviale Schlußprinzip wird häufig Anwendung finden:

LEMMA 2.5. *Ist U eine von 1 verschiedene Untergruppe der Komponente V der normalen Partition σ von G, so ist $\mathfrak{N}U \subseteq \mathfrak{N}V$; ist überdies U eine charakteristische Untergruppe von V, so ist $\mathfrak{N}U = \mathfrak{N}V$.*

BEWEIS. Ist nämlich $t \in \mathfrak{N}U$, so wird $1 \neq U = U^t \subseteq V \cap V^t$. Aus der Normalität von σ folgt aber, daß V^t mit V eine Komponente von σ ist. Also wird $V = V^t$

wegen der Fundamentaleigenschaft II der Partitionen, woraus wir $t \in \mathfrak{N} V$ und also $\mathfrak{N} U \subseteqq \mathfrak{N} V$ erschließen. — Ist U eine charakteristische Untergruppe der Untergruppe V von G, so induziert jedes $s \in \mathfrak{N} V$ einen Automorphismus von V, der die charakteristische Untergruppe U in sich transformiert. Also wird $U = U^s$, so daß $s \in \mathfrak{N} U$ ist und wir $\mathfrak{N} V \subseteqq \mathfrak{N} U$ gezeigt haben, womit alles bewiesen ist.

3. Zulässige Normalteiler

Ist σ eine Partition von G, so wollen wir unter einer *σ-zulässigen Untergruppe* eine Untergruppe U mit folgender Eigenschaft verstehen:

Ist X eine Komponente von σ, so ist entweder $X \subseteqq U$ oder $X \cap U = 1$, [d.h. $X \cap U$ ist entweder gleich 1 oder gleich X]. Natürlich sind alle Komponenten von σ auch σ-zulässig, während die Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist. Wir werden uns fast ausschließlich mit σ-zulässigen Normalteilern beschäftigen, die von 1 und von G verschieden sind, den *eigentlichen σ-zulässigen Normalteilern von G.*

LEMMA 3.1. *Ist σ eine Partition von G, K eine σ-zulässige Untergruppe von G und L eine nicht in K enthaltene, aber K normalisierende Komponente von σ, so gilt:*

(a) *Ist σ normal und t ein Element, das mit wenigstens einem von 1 verschiedenen Element aus L vertauschbar ist, so wird L von t normalisiert.*

(b) $\mathfrak{C} L \cap K = K \cap \mathfrak{N} L$.

(c) *Ist $K \cap \mathfrak{N} L \neq 1$, so gibt es eine $L^{\mathfrak{p}} = 1 = [K \cap \mathfrak{N} L]^{\mathfrak{p}}$ erfüllende Primzahl $\mathfrak{p}$.*

BEWEIS. Die Aussage (a) ist ein Spezialfall von Lemma 2.5.

Es ist klar, daß L zentralisierende Elemente auch L normalisieren. Ist umgekehrt k ein L normalisierendes Element aus K, so gilt für die Kommutatoren

$$k \circ L \subseteqq K \cap L = 1,$$

da K von L normalisiert wird, und da die Komponente L nicht in der zulässigen Untergruppe K enthalten ist. Also wird L von k sogar zentralisiert; und damit ist die Gl. (b) bewiesen.

Ist schließlich $K \cap \mathfrak{N} L \neq 1$, so gibt es in $K \cap \mathfrak{N} L$ ein Element s von Primzahlordnung $\mathfrak{p}$. Wegen (b) wird L von s zentralisiert. Ist $x \neq 1$ irgendein Element aus L, so sind x und s vertauschbare Elemente, die wegen $K \cap L = 1$ in verschiedenen Komponenten von σ liegen. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß s und x die gleiche Primzahlordnung $\mathfrak{p}$ haben. Also ist $L^{\mathfrak{p}} = 1$. Insbesondere gibt es in L ein Element w der Ordnung $\mathfrak{p}$, da ja $L \neq 1$ ist. Ist nun $y \neq 1$ irgendein Element aus $K \cap \mathfrak{N} L$, so sind y und w wegen (b) vertauschbare Elemente, die wieder in verschiedenen Komponenten von σ liegen, und die also wegen Lemma 2.1 die gleiche Primzahlordnung $\mathfrak{p}$ haben. Also ist $[K \cap \mathfrak{N} L]^{\mathfrak{p}} = 1$, womit auch (c) bewiesen ist.

FOLGERUNG 3.2. *Ist σ eine Partition von G, sind A und B von 1 verschiedene, sich gegenseitig normalisierende und $A \cap B = 1$ erfüllende, σ-zulässige Untergruppen von G, so gibt es eine Primzahl $\mathfrak{p}$ mit $(AB)^{\mathfrak{p}} = 1$.*

Aus der Voraussetzung folgt zunächst, daß A und B sich gegenseitig sogar zentralisieren. Jetzt ist aber unsere Behauptung eine einfache Folge aus Lemma 3.1, (c).

LEMMA 3.3. *Ist σ eine normale Partition von G, ist weiter der eigentliche σ-zulässige Normalteiler K von G nicht nilpotent*), so gibt es eine Primzahl p mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *alle nicht in K enthaltenen Elemente aus G haben die Ordnung p;*

(b) *K und G sind Erweiterungen nilpotenter durch p-Gruppen;*

(c) *K wird von den Elementen mit von p verschiedener Ordnung erzeugt;*

(d) $[G:K]=p$.

BEWEIS. Es sei X irgendeine nicht in K enthaltene Komponente von σ. Dann enthält X ein Element a von Primzahlordnung p. Gäbe es außer 1 kein mit a vertauschbares Element in K, so würde a in dem Normalteiler K einen Automorphismus von Primzahlordnung p induzieren, der kein von 1 verschiedenes Fixelement besäße. Aus der Existenz eines solchen Frobenius-Automorphismus von K würde aber nach dem Thompsonschen Satze die nach Voraussetzung ausgeschlossene Nilpotenz von K folgen; vgl. THOMPSON [*1*; p. 579, Theorem 1]. Also gibt es ein Element $k \neq 1$ in K mit $ka=ak$. Wegen $a \neq 1$ folgt aus Lemma 3.1, (a), daß X von k normalisiert wird, und daß also $K \cap \mathfrak{N} X \neq 1$ ist. Anwendung von Lemma 3.1, (c) ergibt dann die Existenz einer $X^p=1$ erfüllenden Primzahl $p=p(X)$.

Ist g ein nicht in K enthaltenes Element aus G, so liegt g in einer und nur einer Komponente R von σ. Diese ist nicht in K enthalten; und nach dem bereits Gezeigten gibt es eine Primzahl $p(R)$ mit $R^{p(R)}=1$. Insbesondere ist $g^{p(R)}=1$; und wir haben gezeigt:

(a*) *alle nicht in K enthaltenen Elemente aus G haben Primzahlordnung.*

Sei wieder X eine nicht in K enthaltene Komponente von σ. Dann ist $X^p=1$, wo $p=p(X)$ eine Primzahl ist, wie im ersten Absatz unseres Beweises gezeigt. Also ist $KX/K \cong X$ eine p-Gruppe. Wegen (a*) haben alle nicht in K enthaltenen Elemente Primzahlordnung; und folglich haben alle nicht in K enthaltenen Elemente aus KX sogar die gleiche Primzahlordnung p. Dann enthält K insbesondere die von allen Elementen w mit $o(w) \neq p$ aus KX erzeugte Untergruppe W. Wegen $W \leqq K < KX$ können wir einen Satz von HUGHES-THOMPSON anwenden, aus dem hervorgeht, daß W eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [*1*; p. 1099, Theorem 3]. Da aber die nicht in W enthaltenen Elemente aus KX und K sämtlich die Ordnung p haben, so ist

(b*) *K eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $p(X)$-Gruppe.*

Wäre unsere Behauptung (a) falsch, so gäbe es wegen (a*) zwei Elemente a und b in G, die beide nicht in K lägen, und deren Ordnungen verschiedene

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. KEGEL hat inzwischen die Unerfüllbarkeit der Voraussetzungen von Lemma 3.3 gezeigt.

Primzahlen wären. Es liegen a und b in eindeutig bestimmten Komponenten A bzw. B von σ. Da weder A noch B in K enthalten ist, so folgern wir aus dem ersten Absatz unseres Beweises, daß A und B Primzahlexponenten haben; und zwar wird notwendig $A^{o(a)}=B^{o(b)}=1$. Anwendung von (b*) ergibt dann, daß K sowohl eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $o(a)$-Gruppe wie auch eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $o(b)$-Gruppe ist; und aus der Verschiedenheit der Primzahlen $o(a)$ und $o(b)$ folgt die nach Voraussetzung ausgeschlossene Nilpotenz von K. Aus diesem Widerspruch folgt, daß alle nicht in K enthaltenen Elemente aus G die gleiche Primzahlordnung p haben; und hieraus folgt in Verbindung mit (b*), daß K eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe ist. Da G/K ebenfalls eine p-Gruppe ist, so ist auch G eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe.

Sei V die von allen Elementen v mit $o(v)\neq p$ in G erzeugte Untergruppe von G. Nach dem bereits Gezeigten ist $V\subseteq K<G$. Da K nicht nilpotent ist, so ist K keine p-Gruppe; da aber K/V [wie auch G/V] eine p-Gruppe ist, so ist V, und also auch G, keine p-Gruppe. Anwendung eines Satzes von HUGHES-THOMPSON ergibt nun $[G:V]=p$; vgl. HUGHES-THOMPSON [1; p. 1098, Theorem 1]. Aus $V\subseteq K<G$ und $[G:V]=p$ folgt aber $K=V$, womit auch (c) und (d) bewiesen sind.

BEMERKUNG 3.4. Sind p und q zwei Primzahlen derart, daß p^2 ein Teiler von $q-1$ ist, so gibt es eine Gruppe G der Ordnung qp^2 mit folgenden Eigenschaften: G besitzt einen zyklischen Normalteiler Q der Ordnung q; die Faktorgruppe G/Q ist zyklisch von der Ordnung p^2 und die von G in Q induzierte Automorphismengruppe ist ebenfalls zyklisch von der Ordnung p^2. Insbesondere ist $Q=\mathfrak{C}Q$. Dann besteht eine normale Partition σ von G aus Q und den sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung p^2; diese ist eine sog. Frobenius-Partition. Dann ist zwar Q ein eigentlicher σ-zulässiger Normalteiler von G; aber die nicht in Q enthaltenen Elemente haben nicht sämtlich Primzahlordnung. Die im Lemma 3.3 gemachte Voraussetzung der Nicht-Nilpotenz von K ist also unentbehrlich.

BEMERKUNG 3.5. Eine wesentliche Verschärfung wird Lemma 3.3 in Satz 4.7, (c) erfahren.

FOLGERUNG 3.6. *Ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ der Gruppe G weder abelsch noch einfach, so ist die triviale Partition die einzige normale Partition von G.*

BEWEIS. Es sei σ eine normale Partition von G. Ist X ein einfacher, nicht-abelscher Normalteiler von $\mathfrak{S}G$, so ist bekanntlich X ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}G$; s. z.B. ZASSENHAUS, p. 77, Satz 2. Also gilt $\mathfrak{S}G=X\otimes Y$; und nach Voraussetzung ist $Y\neq 1$. Es gibt folglich ein Element y von Primzahlordnung in Y; und dieses Element liegt in einer und nur einer Komponente A von σ. Ist x ein Element aus X mit $o(x)\neq o(y)$, so folgt aus Lemma 2.1, daß x in A liegt. Da aber X als einfache, nicht-abelsche Gruppe von den Elementen mit von $o(y)$ verschiedener Ordnung erzeugt wird, so liegt ganz X in A; und wir haben also gezeigt, daß jeder einfache, nicht-abelsche Normalteiler von $\mathfrak{S}G$ in einer Komponente von σ liegt.

Sind U und V zwei verschiedene, einfache, nicht-abelsche Normalteiler von $\mathfrak{S}G$, so liegt U in einer Komponente U^* und V in einer Komponente V^* von σ. Weiter ist $U \cap V = 1$ und jedes Element aus U ist mit jedem Element aus V vertauschbar. Es gibt Elemente $u \neq 1$ in U und $v \neq 1$ in V mit $o(u) \neq o(v)$. Aus Lemma 2.1 folgt, daß u und v in der gleichen Komponente von σ liegen. Aus $u \in U^*$ und $v \in V^*$ folgt dann $U^* = V^*$; und wir haben gezeigt, daß alle einfachen, nicht-abelschen Normalteiler von $\mathfrak{S}G$ in ein und derselben Komponente K von σ liegen.

Sei R das Produkt aller einfachen, nicht-abelschen Normalteiler von $\mathfrak{S}G$. Da $\mathfrak{S}G$ nicht-abelsch ist, ist $R \neq 1$. Weiter ist R als charakteristische Untergruppe des Sockels eine charakteristische Untergruppe von G. Aus $1 \neq R \leqq K$ und Lemma 2.5 folgt, daß K von ganz G normalisiert wird, also ein Normalteiler von G ist. Da R nicht auflösbar ist, so ist auch K nicht auflösbar. Eine nicht-auflösbare Komponente von σ, die gleichzeitig Normalteiler von G ist, kann aber wegen Lemma 3.3 kein echter Normalteiler von G sein. Also ist $K = G$ und σ trivial.

FOLGERUNG 3.7. *Ist der Sockel der Gruppe G nicht abelsch, ist σ eine normale Partition von G und jede einfache charakteristische Untergruppe von G in einer Komponente von σ enthalten, so ist σ trivial.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{S}G$ weder abelsch noch einfach, so folgt unsere Behauptung aus Folgerung 3.6. Ist $\mathfrak{S}G$ abelsch oder einfach, so folgt aus unserer Voraussetzung die Einfachheit von $\mathfrak{S}G$. Als einfache charakteristische Untergruppe von G ist $\mathfrak{S}G$ nach Voraussetzung in einer Komponente S von σ enthalten. Aus $1 \neq \mathfrak{S}G \leqq S$ und Lemma 2.5 folgt, daß S von G normalisiert wird, und daß S also ein Normalteiler von G ist. Da $\mathfrak{S}G$ einfach, nicht-abelsch ist, so ist S nicht auflösbar; und Anwendung von Lemma 3.3 ergibt $S = G$ und die Trivialität von σ.

BEMERKUNG 3.8. Es genügt nicht anzunehmen, daß σ normal und $\mathfrak{S}G$ nicht-abelsch ist, um die Trivialität von σ darzutun. Denn allerlei einfache Gruppen besitzen normale, nicht-triviale Partitionen.

4. Frobenius-Partitionen

Unter einer *Frobenius-Partition* wollen wir eine nicht-triviale, normale Partition verstehen, von deren Komponenten wenigstens eine normalisatorgleich ist. Ist X eine normalisatorgleiche Komponente einer Frobenius-Partition, so gilt $X \cap X^g = 1$ für jedes nicht in X enthaltene Gruppenelement g; und diese Bemerkung stellt den Zusammenhang zwischen Frobenius-Partitionen und dem klassischen Satz von FROBENIUS her.

Um die Haupteigenschaften einer Frobenius-Partition bequem aussprechen zu können, sei an den Begriff der *Fittingschen Untergruppe $\mathfrak{F}G$ der Gruppe G* erinnert. Diese ist das Produkt aller nilpotenten Normalteiler der Gruppe G; und sie ist bekanntlich eine nilpotente charakteristische Untergruppe von G.

SATZ 4.1. *Jede Frobenius-Partition σ der Gruppe G hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathfrak{F}G$ ist eine eigentliche σ-zulässige Hallsche Untergruppe von G.*

(2) *Die normalisatorgleichen Komponenten von σ bilden eine Klasse konjugierter Untergruppen von G, die mit der Klasse aller Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G identisch ist.*

(3) *Die Untergruppe U von G ist dann und nur dann in einer normalisatorgleichen Komponente von σ enthalten, wenn $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ ist.*

(4) *Jeder nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Normalteiler von G enthält $\mathfrak{F}G$; und die eigentlichen σ-zulässigen Normalteiler von G sind in $\mathfrak{F}G$ enthalten.*

(5) *Die normalisatorgleichen Komponenten von G induzieren treu in $\mathfrak{F}G$ Frobenius-Gruppen von Automorphismen und enthalten keine elementarabelschen Untergruppen der Ordnung p^2.*

(6) *Enthält die Untergruppe U von G eine normalisatorgleiche Komponente von σ, so ist $U = \mathfrak{N}U$.*

BEWEIS. Die normalisatorgleichen Komponenten von σ sind sämtlich untereinander in G konjugiert [Lemma 1.6]. Da die normalisatorgleichen Komponenten X von σ der Bedingung $X \cap X^g = 1$ für jedes nicht in X enthaltene g aus G genügen, so können wir den Satz von FROBENIUS anwenden; vgl. etwa BURNSIDE, p. 334, Theorem IV. Folglich existiert ein zu den normalisatorgleichen Komponenten X von σ komplementärer Normalteiler K von G mit folgenden Eigenschaften:

ein von 1 verschiedenes Element aus G gehört dann und nur dann zu K, wenn es in keiner der normalisatorgleichen Komponenten von σ enthalten ist;

K ist ein Hallscher Normalteiler von G;

$K \neq 1$ [Satz 1.7].

Da die nicht in K enthaltenen Elemente aus G sämtlich in den zu K komplementären normalisatorgleichen Komponenten von σ enthalten sind, so ist K insbesondere σ-zulässig. Ist X irgendeine normalisatorgleiche Komponente von σ, so ist $K \cap X = 1$. Es gibt dann ein Element x in X von Primzahlordnung p. Ist k ein mit x vertauschbares Element aus K, so haben x und k teilerfremde Ordnung, da K Hallsch ist. Wegen Lemma 2.1 liegen x und k in der gleichen Komponente X von σ. Also liegt k in $X \cap K = 1$, so daß $k = 1$ ist. Daraus folgt aber, daß x in dem Normalteiler K von G einen Automorphismus von Primzahlordnung induziert, dessen einziges Fixelement die Eins ist. Aus der Existenz eines derartigen Frobenius-Automorphismus folgt nach dem Satz von THOMPSON die Nilpotenz von K; vgl. THOMPSON [*1*; p. 579, Theorem 1]. Hieraus folgt insbesondere $K \subseteq \mathfrak{F}G$. Da K ein Hallscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}G$ ist, so ist $\mathfrak{F}G = K \otimes J$ das direkte Produkt von Untergruppen K und J teilerfremder Ordnung. Wäre $J \neq 1$, so enthielte J ein Element $j \neq 1$, das nach dem bereits Gezeigten in einer normalisatorgleichen Komponente Y von σ liegt. Auch K enthält ein Element $h \neq 1$. Da h und j vertauschbare Elemente teilerfremder Ordnung sind, so

liegen sie in der gleichen Komponente von σ [Lemma 2.1]. Aber K ist σ-zulässig und $K \cap Y = 1$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $J = 1$ und $K = \mathfrak{F}G$ erschließen. Damit ist (1) vollständig bewiesen.

Ist die Untergruppe U von G in der normalisatorgleichen Komponente V von σ enthalten, so ist ja V ein Komplement von $K = \mathfrak{F}G$ in G, woraus $U \cap \mathfrak{F}G \leqq V \cap \mathfrak{F}G = 1$ und also $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ folgt. — Ist umgekehrt U eine $U \cap \mathfrak{F}G = 1$ erfüllende Untergruppe von G, so bilden wir die Untergruppe $H = U \cdot \mathfrak{F}G$ von G, die $\mathfrak{F}G$ als nilpotenten Hallschen Normalteiler enthält. Sei X eine der normalisatorgleichen Komponenten von σ. Diese ist ein Komplement von $K = \mathfrak{F}G$ in G. Also ist auch $H \cap X$ ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in H, wie aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt. Da U und $H \cap X$ Komplemente des nilpotenten Hallschen Normalteilers $\mathfrak{F}G$ von H in H sind, so folgt aus einem Satz von ZASSENHAUS, daß U und $H \cap X$ in H konjugiert sind, vgl. ZASSENHAUS [*1*; p. 126, Satz 27]. Es gibt also ein $U = (H \cap X)^h$ erfüllendes Element h in H. Da σ normal ist, so ist U in der normalisatorgleichen Komponente X^h von σ enthalten, womit (3) voll bewiesen ist.

Wir haben bereits gezeigt, daß die normalisatorgleichen Komponenten von σ eine Klasse konjugierter Untergruppen von G bilden, die sämtlich Komplemente von $K = \mathfrak{F}G$ in G sind. Durch direkte Anwendung von (3) ergibt sich, daß jedes Komplement von $\mathfrak{F}G$ in G in einer normalisatorgleichen Komponente von σ enthalten und also auch mit ihr identisch ist. Damit ist auch (2) bewiesen.

Um (4) zu beweisen, betrachten wir zunächst einen nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenen Normalteiler M von G. Ist t irgendein nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenes Element aus M, so liegt t in einer und nur einer Komponente T von σ. Da T nicht in der [wegen (1)] σ-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{F}G$ enthalten ist, so ist $T \cap \mathfrak{F}G = 1$; und jetzt folgt aus (3) die Normalisatorgleichheit von T. Wie schon früher bemerkt, ist 1 das einzige mit t vertauschbare Element aus $\mathfrak{F}G$. — Sind a und b Elemente aus $\mathfrak{F}G$ mit $a^{-1}a^t = b^{-1}b^t$, so ist auch $ba^{-1} = b^t a^{-t} = (ba^{-1})^t$ ein mit t vertauschbares Element aus $\mathfrak{F}G$, woraus $ba^{-1} = 1$ und $a = b$ folgen. Die Abbildung $a \to a^{-1}a^t$ ist also eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{F}G$ in sich; und daraus folgt insbesondere, daß jedes Element aus $\mathfrak{F}G$ die Form $a^{-1}a^t$ mit a in $\mathfrak{F}G$ hat. Ist nun a irgendein Element aus $\mathfrak{F}G$, so enthält der Normalteiler M mit t auch $t^{-a}t = a^{-1}t^{-1}at = a^{-1}a^t$; und hieraus folgt nach dem soeben Bewiesenen $\mathfrak{F}G < M$. — Ist insbesondere M ein nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltener, σ-zulässiger Normalteiler von G, so enthält M einmal $\mathfrak{F}G$ und weiter wegen der σ-Zulässigkeit eine nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Komponente R von σ. Nun ist aber R wegen (3) und (2) ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in G, so daß $G = R \cdot \mathfrak{F}G \leqq M$ und also $G = M$ gilt. Damit ist (4) bewiesen.

Aussage (5) ist im wesentlichen in einem Resultat von BURNSIDE [p. 335/36] enthalten, wenn wir noch an die schon mehrfach gemachte Bemerkung erinnern, daß 1 das einzige Element aus K ist, das mit nicht in K enthaltenen Elementen aus G vertauschbar ist.

Schließlich betrachten wir eine Untergruppe U von G, die die normalisatorgleiche Komponente A von σ enthält. Wegen (2) ist A ein Komplement

von $\mathfrak{F}G$ in G. Also ergibt sich $U = A[U \cap \mathfrak{F}G]$ aus dem Dedekindschen Modulsatz. Also ist A auch ein Komplement des Normalteilers $U \cap \mathfrak{F}G$ von U in U. Wegen (1) ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche Hallsche charakteristische Untergruppe von G; und es ist also auch $U \cap \mathfrak{F}G$ eine nilpotente, Hallsche charakteristische Untergruppe von U. Sei jetzt g ein Element aus $\mathfrak{N}U$. Dann ist auch $[U \cap \mathfrak{F}G]^g = U \cap \mathfrak{F}G$; und es folgt, daß A^g ein Komplement von $U \cap \mathfrak{F}G$ in U ist. Aus einem Satz von ZASSENHAUS folgt, daß A und A^g in U konjugiert sind; vgl. ZASSENHAUS [p. 126, Satz 27]. Folglich gibt es ein $A^u = A^g$ erfüllendes Element u in U. Dann gehört gu^{-1} zu $\mathfrak{N}A = A$ und g gehört zu $Au \subseteq U$. Damit haben wir den Beweis von $U = \mathfrak{N}U$ erbracht.

ZUSATZ 4.2. *Ist σ eine Frobenius-Partition von G, so ist*

(a) *$\mathfrak{F}G$ eine Komponente von σ, wenn nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben; und*

(b) *es gibt eine Komponente von σ, die ein in $\mathfrak{F}G$ enthaltener Normalteiler von G ist, wenn nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben.*

BEWEIS. Aus Satz 4.1, (1) folgt die σ-Zulässigkeit von $\mathfrak{F}G \neq 1$; und aus Folgerung 2.3 folgt, daß $\mathfrak{F}G$ ganz in einer Komponente von σ enthalten ist, wenn $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ keine elementare Primärgruppe ist. Das Zentrum einer nilpotenten Gruppe $\neq 1$ ist aber dann und nur dann keine elementare Primärgruppe, wenn seine von 1 verschiedenen Elemente nicht alle die gleiche Primzahlordnung haben. Da eine σ-zulässige, von 1 verschiedene Untergruppe dann und nur dann in einer Komponente enthalten ist, wenn sie selbst eine Komponente ist, so ist hiermit der Beweis von (a) erbracht.

Um (b) zu beweisen, nehmen wir an, daß nicht alle Elemente $\neq 1$ aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung haben. Da $\mathfrak{F}G$ eine von 1 verschiedene nilpotente Gruppe ist, so ist auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G \neq 1$. Folglich gibt es ein Element z von Primzahlordnung p in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$; und dies gehört zu einer Komponente L von σ, die wegen der σ-Zulässigkeit von $\mathfrak{F}G$ ganz in $\mathfrak{F}G$ enthalten ist. Sei P die von den sämtlichen Elementen x aus $\mathfrak{F}G$ mit $o(x) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}G$. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist P eine charakteristische Untergruppe von G; und $P \neq 1$ folgt aus der Voraussetzung, daß nicht alle von 1 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{F}G$ die gleiche Primzahlordnung p haben. Aus Lemma 2.1 folgt sofort, daß die Elemente aus $\mathfrak{F}G$ mit von p verschiedener Ordnung in derselben Komponente L von σ liegen wie z. Also gilt sogar $P \subseteq L$. Aus Lemma 2.5 folgt, daß L von G normalisiert wird. Damit haben wir gezeigt, daß die in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Komponente L von σ ein Normalteiler von G ist, womit wir auch (b) bewiesen haben.

BEMERKUNG 4.3. Es sei Φ ein endlicher Körper, aber kein Primkörper. Ist p die Charakteristik von Φ, so ist p^n mit $1 < n$ die Anzahl der Elemente in Φ. Die Additionsgruppe Φ_+ von Φ ist dann eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung p^n, in der die Multiplikationsgruppe Φ_* von Φ [durch die Abbildungen $x \to xa$] eine zyklische Automorphismengruppe der Ordnung $p^n - 1$

induziert; und nur 1 induziert dabei einen Automorphismus mit von 0 verschiedenem Fixelement.

Unter Benutzung des Holomorphs von Φ_+ konstruiert man nun leicht eine Gruppe G der Ordnung $p^n(p^n-1)$ mit folgenden Eigenschaften:

G besitzt einen elementar-abelschen Normalteiler K der Ordnung p^n mit zyklischer Faktorgruppe G/K der Ordnung p^n-1 derart, daß jedes nicht in K enthaltene Element in K einen Automorphismus ohne von 1 verschiedene Fixelemente induziert; und die Elemente einer erzeugenden Restklasse von G/K normalisieren keine der zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von K.

Man erhält dann eine normale Partition σ von G, wenn man die sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung p und die sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung p^n-1 als Komponenten von σ wählt. Die letzteren sind dann normalisatorgleiche Komplemente von K in G. Keine der zyklischen Untergruppen der Ordnung p ist ein Normalteiler von G; und nun sieht man ein, daß σ eine Frobenius-Partition von G ist, von deren Komponenten keine einzige ein Normalteiler ist. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der ad (a) und ad (b) in Zusatz 4.2 gemachten Zusatzvoraussetzungen.

Da eine nilpotente Gruppe dann und nur dann nicht primär ist, wenn ihr Zentrum nicht primär ist, so genügt es ad (a) vorauszusetzen, daß $\mathfrak{Z}G$ nicht primär ist, was bei Anwendungen wichtig ist.

Im folgenden wird es sich als bequem erweisen, *die von einer Partition in den Untergruppen induzierten Partitionen* zu betrachten. Diese werden folgendermaßen definiert: Ist σ eine Partition und $U \neq 1$ eine Untergruppe der Gruppe G, so bestehe $\sigma \cap U$ aus allen $X \cap U \neq 1$ mit X aus σ. Es ist klar, daß $\sigma \cap U$ eine Partition von U ist, und daß $\sigma \cap U$ normal ist, wenn σ normal ist.

LEMMA 4.4. *Ist σ eine normale Partition von G und $K \neq 1$ ein σ-zulässiger Normalteiler von G, so sind die folgenden Eigenschaften der nicht in K enthaltenen Komponente E von σ äquivalent:*

(a) $$K \cap \mathfrak{C}E = 1;$$

(b) $$\big(o(K),\ o(E)\big) = 1;$$

(c) $$E = \mathfrak{N}E.$$

BEWEIS. Aus der Zulässigkeit von K und $E \subsetneqq K$ folgern wir $K \cap E = 1$. Weiter ergibt sich aus Lemma 3.1, (b) daß $\mathfrak{C}E \cap K = K \cap \mathfrak{N}E$ ist.

Ist zunächst $E = \mathfrak{N}E$, so wird also $K \cap \mathfrak{C}E = K \cap \mathfrak{N}E = K \cap E = 1$, so daß (a) aus (c) folgt. — Gilt (b) nicht, so besitzen $o(K)$ und $o(E)$ einen gemeinsamen Primteiler p. Wir betrachten eine p-Sylow-Untergruppe A von E, die dann natürlich von 1 verschieden ist. Weiter liegt A in einer p-Sylow-Untergruppe P von G. Da K ein Normalteiler von G ist, so ist $B = K \cap P$ eine p-Sylow-Untergruppe von K; und $B \neq 1$, da p ein Teiler von $o(K)$ ist. Da K ein Normalteiler von G ist, so ist auch B ein Normalteiler von P. Da P eine p-Gruppe und B ein von 1 verschiedener Normalteiler von P ist, so wird $B \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$. Ist $b \neq 1$ ein Element aus $B \cap \mathfrak{Z}P$, so wird insbesondere A von b zentralisiert; und aus $1 < A \subseteq E$ und Lemma 3.1, (a) folgt dann, daß

die Komponente E von σ von b normalisiert wird. Da b in K liegt, so wird $1 \neq \mathfrak{N}E \cap K = K \cap \mathfrak{C}E$. Mit (b) ist also auch (a) falsch; d.h. aus (a) folgt (b).

Wir nehmen die Gültigkeit von (b) an. Ist dann t ein Element aus $K \cap \mathfrak{C}E$, so ist t mit jedem Element aus E vertauschbar und die Ordnungen sind teilerfremd. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß t und jedes Element aus E in der gleichen Komponente von σ liegen. Also liegt t in $K \cap E = 1$, so daß $t = 1$ ist. Damit haben wir (a) aus (b) hergeleitet und die Äquivalenz von (a) und (b) dargetan.

Wir nehmen jetzt die Gültigkeit der äquivalenten Eigenschaften (a) und (b) und die Ungültigkeit von (c) an, so daß $E \neq \mathfrak{N}E$ wird. Weiter ist $\mathfrak{N}E \cap K = K \cap \mathfrak{C}E = 1$. Setzen wir also $H = K \cdot \mathfrak{N}E$, so sind H/K und $\mathfrak{N}E$, KE/K und E im wesentlichen identisch. Es folgt, daß KE ein echter Normalteiler von H ist.

Es ist klar, daß K ein eigentlicher $(\sigma \cap KE)$-zulässiger Normalteiler von KE ist; und aus $K \cap \mathfrak{N}E = 1$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir, daß $KE \cap \mathfrak{N}E = E(K \cap \mathfrak{N}E) = E$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap KE$ ist. Da E ein Komplement von K in KE ist, so ergibt sich aus Satz 4.1, daß $K = \mathfrak{H}(KE)$ ein nilpotenter Hallscher Normalteiler von KE ist. Aus $K \cap \mathfrak{C}E = 1$ [und $E \neq 1$] folgt dann die Nichtnilpotenz von KE, da ja aus der Nilpotenz von KE zusammen mit der Teilerfremdheit von $o(K)$ und $o(E)$ [Bedingung (b)] die elementweise Vertauschbarkeit von K und E folgen würde. Anwendung von Satz 4.1, (2), (3) ergibt weiter, daß die nicht in K liegenden Elemente aus KE sämtlich in zu E [in KE] konjugierten Untergruppen von KE liegen. Da mit E auch alle zu E konjugierten Untergruppen Komponenten der normalen Partition σ sind, so ist auch KE eine σ-zulässige Untergruppe von G.

Aus dem Gezeigten geht hervor, daß KE ein nicht-nilpotenter, $(\sigma \cap H)$-zulässiger, echter Normalteiler von H ist*). Aus Lemma 3.3 ergibt sich dann die Existenz einer Primzahl p mit folgenden Eigenschaften:

alle nicht in KE enthaltenen Elemente aus H haben die Ordnung p;

EK und H sind Erweiterungen einer nilpotenten durch eine p-Gruppe;

EK wird von den Elementen mit von p verschiedener Ordnung erzeugt;

$[H : EK] = p$.

Da KE eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe und $K = \mathfrak{H}(KE)$ ist, so ist $KE/K \cong E$ eine p-Gruppe. Da K ein Hallscher Normalteiler von KE ist, so ist p kein Teiler von $o(K)$. Aus $[H : KE] = p$ folgt weiter, daß H/K eine p-Gruppe ist. Ist also Q irgendeine p-Sylow-Untergruppe von H, so ist Q sogar ein Komplement von K in H. Elemente aus Q und K haben teilerfremde Ordnung, so daß aus ihrer Vertauschbarkeit wegen Lemma 2.1 die Zugehörigkeit zur gleichen Komponente von σ folgt. Da K zulässig und $K \cap Q = 1$ ist, so folgt: ist $x \neq 1$ ein Element aus Q, so ist 1 das einzige

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. Inzwischen hat O. Kegel die Nichtexistenz derartiger Normalteiler bewiesen, so daß bei Benutzung des Kegelschen Satzes sich das zu Beweisende erübrigen würde.

Element aus K, mit dem x vertauschbar ist; jedes von 1 verschiedene Element aus der p-Gruppe Q induziert also in K einen Automorphismus, dessen einziges Fixelement gleich 1 ist. Aus einem Resultat von BURNSIDE folgt nun, daß Q eine und nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung p enthält; vgl. BURNSIDE, p. 335. Aus $Q \cap KE \neq 1$ folgt dann, daß KE alle Elemente der Ordnung p aus Q enthält. Da dieses Resultat für alle p-Sylow-Untergruppen von H gilt, so enthält KE alle Elemente der Ordnung p aus H. Nun ist aber $KE < H$ und jedes nicht in KE enthaltene Element aus H hat die Ordnung p, liegt also in KE. Dies ist ein Widerspruch; und es folgt also $E = \mathfrak{N}E$ und die Äquivalenz von (a), (b), (c).

SATZ 4.5. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition σ von $G \neq 1$ sind äquivalent:*

(1) *σ ist eine Frobenius-Partition von G.*

(2) *Es gibt einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen, σ-zulässigen Normalteiler von G.*

(3) *Es gibt einen σ-zulässigen Normalteiler $K \neq 1$ von G mit einem $o(K)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:K]$.*

(4) *Es gibt einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen Normalteiler von G; und zu jeder Komponente X von σ gibt es eine $[G:X]$, aber nicht $o(X)$ teilende Primzahl.*

BEWEIS. Ist σ eine Frobenius-Partition von G, so ist $\mathfrak{F}G$ ein nilpotenter, Hallscher, eigentlicher, σ-zulässiger Normalteiler von G [Satz 4.1, (1)]. Also ist (2) eine Folge von (1); und es ist klar, daß (3) eine Folge von (2) ist. Gibt es einen σ-zulässigen Normalteiler $K \neq 1$ von G mit einem $o(K)$ nicht teilenden Primteiler p von $[G:K]$, so ist K ein eigentlicher Normalteiler von G; und es gibt ein Element g der Ordnung p in G, das gewiß nicht in K enthalten ist. Dieses Element g liegt dann in einer Komponente E von σ, die nicht in K enthalten sein kann. Ist k ein mit g vertauschbares Element aus K, so folgt aus der Teilerfremdheit von $o(K)$ und $p = o(g)$, daß k und g in der gleichen Komponente von σ liegen [Lemma 2.1]. Also liegt k mit g in E. Da aber K zulässig ist und E nicht enthält, so liegt k in $K \cap E = 1$, woraus $k = 1$ folgt. Mithin ist sicherlich auch $K \cap \mathfrak{C}E = 1$; und wir können $E = \mathfrak{N}E$ aus Lemma 4.4 folgern. Also ist σ eine Frobenius-Partition und die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (3) ist bewiesen.

Ist σ eine Frobenius-Partition, so folgern wir wieder aus Satz 4.1, (1), daß $\mathfrak{F}G$ ein eigentlicher, nilpotenter, Hallscher, σ-zulässiger Normalteiler von G ist. Damit ist bereits die erste Hälfte von Bedingung (4) dargetan. Ist X irgendeine Komponente von σ, so ist entweder $X \subseteq \mathfrak{F}G$ oder $X \cap \mathfrak{F}G = 1$. Im ersten Falle ist $o(X)$ zu jedem der Primteiler von $[G:\mathfrak{F}G]$ teilerfremd; und diese sind auch Primteiler von $[G:X]$. Im zweiten Fall ist $X \cong X \cdot \mathfrak{F}G/\mathfrak{F}G$; und $o(X)$ ist zu jedem Primteiler von $o(\mathfrak{F}G) \neq 1$ teilerfremd. Diese Primteiler sind aber Teiler von $[G:X]$; und damit ist auch die Gültigkeit der zweiten Hälfte der Bedingung (4) dargetan.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (4) an. Dann gibt es einen eigentlichen, nilpotenten, Hallschen Normalteiler K von G. Ist K selbst σ-zulässig, so ist Bedingung (2) erfüllt. Wir wollen also annehmen, daß K nicht σ-zulässig ist. Dann gibt es eine Komponente W von σ mit $1 < W \cap K < W$. Da K ein Hallscher Normalteiler von G ist, so ist $K \cap W$ ein Hallscher Normalteiler von W; und aus der Nilpotenz von K folgt die von $K \cap W$. Da K eine von 1 verschiedene nilpotente Gruppe ist, so ist auch $\mathfrak{Z}K \neq 1$. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers K von G ist auch $\mathfrak{Z}K$ ein Normalteiler von G.

Da $K \cap W$ von $\mathfrak{Z}K$ normalisiert wird, so folgt $\mathfrak{Z}K \subseteq \mathfrak{N}W$ aus Lemma 2.5. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}K$ sogar in W enthalten ist, unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1. W ist nilpotent.

Da $W \cap K$ ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von W ist, so ist W keine $\mathfrak{p}$-Gruppe. Da die nilpotente Gruppe W von dem abelschen Normalteiler $\mathfrak{Z}K$ von G normalisiert wird, so ist das Produkt $V = W \cdot \mathfrak{Z}K$ als Produkt nilpotenter Normalteiler von V selbst nilpotent. Diese nilpotente Gruppe ist aber keine $\mathfrak{p}$-Gruppe, da ja W keine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist. Also ist auch ihr Zentrum $\mathfrak{Z}V$ keine $\mathfrak{p}$-Gruppe. Anwendung von Folgerung 2.3 zeigt, daß V ganz in einer Komponente von σ enthalten ist. Da aber V die Komponente W von σ enthält, so wird $W = V$, so daß $\mathfrak{Z}K \subseteq W$ ist.

Fall 2. W ist nicht nilpotent.

Wir betrachten die normale Partition $\sigma \cap V$ von $V = W \cdot \mathfrak{Z}K$. Wäre $W \neq V$, so wäre W ein eigentlicher $(\sigma \cap V)$-zulässiger, aber nicht nilpotenter Normalteiler von V, sogar eine Komponente. Wir können also Lemma 3.3 anwenden. Folglich gibt es eine Primzahl $\mathfrak{p}$ mit folgenden Eigenschaften:

alle nicht in W enthaltenen Elemente aus V haben die Ordnung $\mathfrak{p}$; und W [sowohl wie V] ist eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $\mathfrak{p}$-Gruppe.

Aus $W < V$ folgt die Existenz eines Elements t in $\mathfrak{Z}K$, das nicht in W enthalten ist. Dieses hat gewiß die Ordnung $\mathfrak{p}$. Ist k ein Element aus $W \cap K$, so liegt auch kt in V, aber nicht in W. Folglich ist $o(kt) = \mathfrak{p}$. Da aber $kt = tk$ ist, so ist sogar $1 = (kt)^{\mathfrak{p}} = k^{\mathfrak{p}}$; und damit haben wir $(W \cap K)^{\mathfrak{p}} = 1$ gezeigt. Da der Hallsche Normalteiler $W \cap K$ von W eine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist, so ist $W \cap K$ überdies die [eindeutig bestimmte] $\mathfrak{p}$-Sylow-Untergruppe von W. Da W eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist, so ist W das Produkt eines nilpotenten Normalteilers mit dem $\mathfrak{p}$-Normalteiler $W \cap K$. Also ist W nilpotent im Widerspruch zu der Annahme des zweiten Falls. Aus diesem Widerspruch folgt das gewünschte $V = W$, so daß wir in beiden Fällen $\mathfrak{Z}K \subseteq W$ gezeigt haben.

Da $\mathfrak{Z}K$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von G ist, so folgt aus Lemma 2.5, daß die Komponente W ein Normalteiler von G ist. Da es einen $o(W)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:W]$ wegen (4) gibt, so gilt sicherlich (3); und damit haben wir allgemein aus (4) die äquivalenten Bedingungen (1) bis (3) hergeleitet.

BEMERKUNG 4.6. Es ist unmöglich, die zweite Hälfte der Bedingung (4) durch die schwächere Forderung der Nicht-Trivialität von σ zu ersetzen. Dies läßt sich etwa durch das folgende Beispiel belegen:

es seien p und q Primzahlen und zwar sei p ein Teiler von $q-1$. Dann gibt es eine zu q teilerfremde Zahl e, deren multiplikative Ordnung modulo q genau p ist. Die Gruppe G werde durch Elemente a, b, c erzeugt, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$a^q = b^p = c^p = 1;$$

$$ab = ba, \qquad bc = cb, \qquad c^{-1}ac = a^e.$$

Dann ist $\{ab\} = \{a, b\}$ ein zyklischer Normalteiler der Ordnung pq; und alle nicht in $\{ab\}$ gelegenen Elemente aus G haben die Ordnung p. Die gesuchte normale Partition σ von G besteht aus dem Normalteiler $\{ab\}$ und sämtlichen zyklischen Untergruppen der Ordnung p, die nicht in $\{ab\}$ liegen. Weiter ist $\{a\}$ ein zyklischer Normalteiler der Ordnung q und des Index p^2, der also Hallsch ist. Es ist also die erste, aber nicht die zweite Hälfte der Bedingung (4) erfüllt, da ja $[G:\{ab\}] = p$ ein Teiler von $o(\{ab\})$ ist.

VERFEINERUNGEN UND VERSCHMELZUNGEN. Sind σ' und σ'' Partitionen der Gruppe G, ist weiter jede Komponente von σ' gleichzeitig σ''-zulässig, so möge σ'' *eine Verfeinerung von* σ' *und* σ' *eine Verschmelzung von* σ'' genannt werden.

SATZ 4.7. *Sind* σ' *und* σ'' *nicht-triviale Partitionen der Gruppe* G, *ist weiter* σ'' *eine Verfeinerung von* σ', *so gilt:*

(a) *Ist* σ' *eine Frobenius-Partition von* G, *so sind die normalisatorgleichen Komponenten von* σ' *auch Komponenten von* σ''.

(b) *Ist* σ'' *eine Frobenius-Partition von* G, *so sind die normalisatorgleichen Komponenten von* σ'' *in normalisatorgleichen Komponenten von* σ' *enthalten.*

(c) *Sind* σ' *und* σ'' *normale Partitionen von* G, *so ist* σ' *dann und nur dann eine Frobenius-Partition von* G, *wenn* σ'' *eine Frobenius-Partition ist* [*und in diesem Falle haben* σ' *und* σ'' *dieselben normalisatorgleichen Komponenten*].

BEWEIS. Ist σ' eine Frobenius-Partition von G, so folgern wir aus Satz 4.1, daß $\mathfrak{F}G$ eine σ'-zulässige, Hallsche, eigentliche charakteristische Untergruppe von G ist, und daß die Klasse der normalisatorgleichen Komponenten von σ' genau die Klasse der [untereinander konjugierten] Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G ist.

Wir zeigen zunächst die Existenz einer normalen Verfeinerung von σ'' — diesen Existenzsatz verdanken wir Herrn O. H. KEGEL. Jeder Automorphismus von G bildet σ'' auf eine Partition von G ab. Also ist für jedes g aus G auch σ''^g eine Partition von G. Sei σ die Menge der von 1 verschiedenen Untergruppen von G, die die Form $\bigcap_g X(g)$ haben, wo $X(g)$ für jedes g aus G eine wohlbestimmte Komponente von σ''^g [oder gleichwertig: $X(g)^{g^{-1}}$ eine wohlbestimmte Komponente von σ''] ist. Ist $a \neq 1$ ein Element aus G, so gibt es für jedes g aus G eine und nur eine a enthaltende Komponente $A(g)$

von σ''^{g}; und der Durchschnitt dieser $A(g)$ ist eine a enthaltende Untergruppe aus σ. Man überzeugt sich jetzt mühelos, daß σ eine Partition von G und sogar normal ist, und daß weiter σ eine Verfeinerung von σ'' ist [denn jede Komponente von σ ist in einer und nur einer Komponente von σ'' enthalten]. Da σ eine Verfeinerung der Verfeinerung σ'' von σ' ist, so ist σ natürlich auch eine Verfeinerung von σ'. Also ist jede σ'-zulässige Untergruppe von G auch σ-zulässig; und dies gilt insbesondere von $\mathfrak{F}G$ und seinen Komplementen.

Sei nun A eine normalisatorgleiche Komponente von σ'. Wäre A keine Komponente von σ'', so wäre A a fortiori auch keine Komponente von σ; und es gäbe dann eine Komponente B von σ, die eine echte Untergruppe von A ist. Wäre $B=\mathfrak{N}B$, so würde diese Komponente B der normalen Partition σ der Bedingung $B\cap B^{g}=1$ für jedes nicht in B enthaltene Element g aus G genügen. Anwendung des klassischen Satzes von FROBENIUS zeigt die Existenz eines zu B komplementären Normalteilers K von G, der nach dem Satz von THOMPSON nilpotent ist; vgl. THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Dann ist K in $\mathfrak{F}G$ enthalten, so daß $o(B)=[G:K]$ ein Vielfaches von $[G:\mathfrak{F}G]=o(A)$ ist. Aus $B<A$ folgt dann sogar der Widerspruch $A=B$; und damit haben wir $B\neq\mathfrak{N}B$ gezeigt.

Da σ' als Frobenius-Partition normal ist, so folgt aus Lemma 2.5 und $B\subseteq A$ sogar $B<\mathfrak{N}B\subseteq\mathfrak{N}A=A$.

Ist irgendein Element t nicht in B enthalten, so ist auch keine von 1 verschiedene Potenz von t in der Komponente B enthalten. Also folgt aus $B\neq\mathfrak{N}B$ die Existenz eines Elements r von Primzahlordnung $o(r)=p$, das in $\mathfrak{N}B$, aber nicht in B liegt. Ist $w\neq 1$ ein Element aus $B\cap\mathfrak{C}r$, so folgt aus Lemma 2.1 [und der Nichtzugehörigkeit von r zu B], daß r und w die gleiche Primzahlordnung p haben, so daß A die elementar-abelsche Untergruppe $\{r, w\}$ der Ordnung p^2 enthält. Da aber A eine normalisatorgleiche Komponente der Frobenius-Partition σ' von G ist, so ist dies wegen Satz 4.1, (5) unmöglich. Folglich ist $B\cap\mathfrak{C}r=1$.

Sei weiter v ein mit r vertauschbares Element aus $B\cdot\mathfrak{F}G$. Dann hat v die Form $v=bf$ mit b aus B und f aus $\mathfrak{F}G$. Da aber auch b' zu B und f' zu $\mathfrak{F}G$ gehört, so folgt aus $bf=v=v'=b'f'$ und $1=B\cap\mathfrak{F}G$ sogar $b=b'$ und $f=f'$. Dies zieht nach dem soeben Gezeigten $b=1$ nach sich. Da aber r ein Element aus der normalisatorgleichen Komponente A von σ' ist, während f in $\mathfrak{F}G$ liegt, so muß [wegen Satz 4.1, (5)] auch $f=1$ sein. Also ist $v=1$; und wir haben gezeigt, daß r einen sog. Frobenius-Automorphismus in $B\cdot\mathfrak{F}G$ induziert. Hieraus folgt nach dem Satz von THOMPSON die Nilpotenz von $B\cdot\mathfrak{F}G$; vgl. THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Da $\mathfrak{F}G$ ein Hallscher Normalteiler von G ist, so folgt sogar die Vertauschbarkeit eines jeden Elements aus B mit einem jeden Element aus $\mathfrak{F}G$; und dies ist unmöglich, da die Elemente aus $B<A$ in $\mathfrak{F}G$ [wegen Satz 4.1, (5)] Frobenius-Automorphismen induzieren. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem folgt, daß A eine Komponente von σ'' ist; und damit ist die Gültigkeit von (a) dargetan.

Sei jetzt σ'' eine Frobenius-Partition von G und A eine normalisatorgleiche Komponente von σ''. Da σ'' eine Verfeinerung von σ' ist, so ist A in einer

und nur einer Komponente B von σ' enthalten. Aus der σ''-Zulässigkeit von B folgt $B=\mathfrak{N}B$ wegen Satz 4.1, (6), womit (b) bewiesen ist.

Wir nehmen schließlich an, daß sowohl σ' wie auch σ'' normal sei. Ist eine von diesen beiden Partitionen eine Frobenius-Partition, so folgt aus (a) bzw. (b), daß auch die andere eine ist; und dann folgt aus (a), daß beide Partitionen die gleichen normalisatorgleichen Komponenten besitzen. Damit ist auch (c) bewiesen.

BEMERKUNG 4.8. Daß (b) nicht in der gleichen Schärfe wie (a) bewiesen werden kann, zeigt das folgende Beispiel. Es seien p und q Primzahlen, q ein Teiler von $p-1$ und e eine zu p teilerfremde Zahl, deren multiplikative Ordnung modulo p genau q ist. Weiter sei P eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung p^2; und G entstehe aus P durch Adjunktion eines Elements f, das den Bedingungen

$$f^q=1, \quad f^{-1}xf=x^e \quad \text{für jedes } x \text{ aus } P$$

genügt. Eine Frobenius-Partition σ'' von G besteht dann aus allen zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von G, da diese ja sämtlich Primzahlordnung [p oder q] haben. Ist $t\neq 1$ ein Element aus P, so sei σ' die aus $\{t, f\}$ und allen nicht in $\{t, f\}$ enthaltenen zyklischen Untergruppen bestehende Partition von G. Es ist klar, daß σ' eine Verschmelzung von σ'' ist, daß σ' und σ'' nicht die gleichen normalisatorgleichen Komponenten haben [und daß σ' nicht normal ist].

FOLGERUNG 4.9 [O. H. KEGEL]. *Die einzige Partition einer Frobenius-Gruppe von Automorphismen [einer normalisatorgleichen Komponente einer Frobenius-Partition] ist die triviale.*

BEWEIS. Es ist eine Folge von Satz 4.1, (5), daß jede normalisatorgleiche Komponente einer Frobenius-Partition auch eine Frobenius-Gruppe von Automorphismen ist. Ist umgekehrt A eine Frobenius-Gruppe von Automorphismen der Gruppe B, so ist A eine Untergruppe und B ein Normalteiler des Holomorph von B. Wir bilden die Untergruppe BA des Holomorph von B. Bekanntlich besteht dann eine Frobenius-Partition σ von G aus B und den zu A in G konjugierten Untergruppen. Ist σ^* eine Partition von A, so sei σ' die aus den von A verschiedenen Untergruppen von σ und aus den Untergruppen in σ^* bestehende Untergruppenmenge. Dann ist natürlich σ' eine Partition von G und eine Verfeinerung von σ. Aus Satz 4.7, (a) folgt $\sigma=\sigma'$ und die Trivialität von σ^*.

BEMERKUNG 4.10. Die Eigenschaft, daß Frobenius-Gruppen von Automorphismen nur die triviale Partition besitzen, geht über die in Satz 4.1, (5) genannte Burnsidesche Eigenschaft hinaus, daß ihre Sylow-Untergruppen höchstens eine Untergruppe von Primzahlordnung enthalten. Sind nämlich p, q Primzahlen mit $q|p-1$, so gibt es eine nicht abelsche Gruppe G der Ordnung pq. Diese besitzt einen Normalteiler der Ordnung p und ihre Elemente haben die Ordnungen $1, p, q$. Die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung bilden dann eine Frobenius-Partition von G und diese Gruppe hat offenbar die erwähnte Burnsidesche Eigenschaft.

5. Die normalen, nicht-einfachen Partitionen

Es liegt nahe, die Partition σ der Gruppe G *einfach* zu nennen, wenn es keine eigentlichen, σ-zulässigen Normalteiler von G gibt. Natürlich sind alle trivialen Partitionen einfach, ebenso die Partitionen einfacher Gruppen. Wir werden uns hier mit den normalen, nicht-einfachen Partitionen befassen. Aus Satz 4.1 ergibt sich, daß die Frobenius-Partitionen Beispiele solcher normaler, nicht-einfacher Partitionen sind; und wir werden deshalb die Frobenius-Partitionen von unseren Überlegungen ausschließen können.

SATZ 5.1. *Ist σ eine normale Partition und K ein eigentlicher σ-zulässiger Normalteiler von G, so gilt:*

(a) *σ ist dann und nur dann keine Frobenius-Partition, wenn jeder Primteiler von $[G:K]$ auch ein Teiler von $o(K)$ ist.*

(b) *Ist σ keine Frobenius-Partition, so haben alle nicht in K enthaltenen Elemente die gleiche Primzahlordnung.*

(c) *Ist σ keine Frobenius-Partition und G nicht primär, so ist $[G:K]$ eine Primzahl p; K und G sind Erweiterungen nilpotenter*) durch p-Gruppen; K wird von allen $g \in G$ mit $o(g) \neq p$ erzeugt und ist eine Komponente von σ.*

BEWEIS. Gibt es einen $o(K)$ nicht teilenden Primteiler von $[G:K]$, so folgt aus Satz 4.5, (3), daß σ eine Frobenius-Partition ist. Ist also σ keine Frobenius-Partition, so ist jeder Primteiler von $[G:K]$ auch ein Teiler von $o(K)$.

Ist umgekehrt σ eine Frobenius-Partition von G, so folgern wir $K \subseteq \mathfrak{F}G$ aus Satz 4.1, (4). Wegen Satz 4.1, (1) ist $\mathfrak{F}G$ ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von G. Es gibt also einen Primteiler p von $[G:\mathfrak{F}G]$, und a fortiori von $[G:K]$, der $o(\mathfrak{F}G)$, und a fortiori $o(K)$, nicht teilt. Damit ist (a) bewiesen.

Sei jetzt σ keine Frobenius-Partition und L eine nicht in K enthaltene Komponente von σ. Dann ist $K \cap L = 1$ wegen der Zulässigkeit von K; und hieraus folgt, daß $o(L)$ ein Teiler von $[G:K]$ ist. Es gibt einen Primteiler p von $o(L)$; und dieser ist als Primteiler von $[G:K]$ wegen (a) auch ein Teiler von $o(K)$. Weiter enthält L ein Element a der Ordnung p; und dieses ist in einer p-Sylow-Untergruppe A von G enthalten. Da K ein Normalteiler von G ist, so ist $K \cap A$ ein Normalteiler von A und eine p-Sylow-Untergruppe von K. Da p ein Teiler von $o(K)$ ist, so ist $K \cap A \neq 1$; und nun folgt aus den bekannten Eigenschaften der p-Gruppen auch $1 \neq \mathfrak{Z}A \cap (K \cap A) = \mathfrak{Z}A \cap K$. Ist $t \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}A \cap K$, so gilt $ta = at$; und aus Lemma 3.1, (a) folgt die Zugehörigkeit von t zu $K \cap \mathfrak{N}L$. Also ist $K \cap \mathfrak{N}L \neq 1$; und es ergibt sich aus Lemma 3.1, (c) die Existenz einer $L^q = 1$ erfüllenden Primzahl q [da L das Element a der Ordnung p enthält, so ist $p = q$]. Damit haben wir gezeigt, daß es zu jeder nicht in K enthaltenen Komponente L von σ eine $L^p = 1$ erfüllende Primzahl p gibt. Da jedes nicht in K enthaltene Element von G

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. KEGEL hat inzwischen die Nilpotenz von K bewiesen.

in einer Komponente von σ liegt, so ergibt sich sogar das folgende Zwischenresultat:

(b*) *Ist σ keine Frobenius-Partition, so haben alle nicht in K enthaltenen Elemente Primzahlordnung und alle nicht in K enthaltenen Komponenten sind primär.*

Wir nehmen im folgenden an, daß σ keine Frobenius-Partition und G keine Primärgruppe ist. Dann ist auch K keine Primärgruppe. Denn sonst wäre K ja eine p-Gruppe; und hieraus folgte wegen (a), daß auch G/K und also auch G selbst eine p-Gruppe wäre. Sei nun p irgendein Primteiler von $[G:K]$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von G. Dann ist $K \cap P$ eine p-Sylow-Untergruppe von K und $KP/K \neq 1$ eine p-Sylow-Untergruppe von G/K. Aus (b) folgt dann, daß alle nicht in K enthaltenen Elemente aus $H = KP$ die Ordnung p haben. Die von den sämtlichen Elementen h aus H mit $o(h) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe V von H ist also in K enthalten. Da K keine p-Gruppe ist, so ist auch H keine p-Gruppe und es wird $1 < V \leqq K < H$. Anwendung eines Satzes von HUGHES-THOMPSON ergibt $[H:V] = p$; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Folglich wird $K = V$ und $p = [H:K] = [KP:K]$. Da aber KP/K eine p-Sylow-Untergruppe von G/K ist, so ist p selbst die höchste $[G:K]$ teilende Potenz von p; und damit haben wir gezeigt, daß $[G:K]$ quadratfrei ist.

Sei überdies G/K nicht primär. Dann ist $[G:K]$ eine durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbare quadratfreie Zahl. Die von 1 verschiedenen Sylow-Untergruppen von G/K sind also zyklisch von Primzahlordnung. Wegen (b*) ist G/K nicht zyklisch. Dann existiert aber eine Darstellung $[G:K] = mn$ als Produkt teilerfremder von 1 verschiedener Zahlen m und n derart, daß G/K sowohl ein Element Ka der Ordnung m und ein Element Kb der Ordnung n enthält; vgl. ZASSENHAUS [p. 139, Satz 11]. Da weder a noch b in K liegt, so sind $o(a)$ und $o(b)$ Primzahlen; s. (b*). Da aber $m = o(Ka)$ ein von 1 verschiedener Teiler von $o(a)$ ist, so ist m eine Primzahl; und ebenso sieht man ein, daß $o(n)$ eine Primzahl ist. Also ist $[G:K] = mn$ das Produkt zweier Primzahlen.

Sei nun $[G:K] = pq$ das Produkt zweier verschiedener Primzahlen p und q. Dann folgt zunächst aus (a), daß $o(K)$ durch pq teilbar ist. Eine Gruppe der Ordnung pq enthält bekanntlich stets einen Normalteiler von Primzahlordnung; und wir können also o. B. d. A. annehmen, daß G/K einen Normalteiler J/K der Primzahlordnung q besitzt. Wegen (b*) können die nicht in J enthaltenen Elemente aus G, da sie ja auch nicht in K liegen, nur die Primzahlordnungen p und q haben; und aus $[G:J] = p$ folgt dann sogar, daß die nicht in J enthaltenen Elemente aus G sämtlich die Primzahlordnung p haben. Sei J^* die von sämtlichen Elementen g mit $o(g) \neq p$ erzeugte Untergruppe von G. Da G keine p-Gruppe ist, und da die nicht in J enthaltenen Elemente aus G sämtlich die Ordnung p haben, so gilt $1 < J^* \leqq J < G$. Da G keine Primärgruppe ist, so können wir wieder den Satz von HUGHES-THOMPSON anwenden; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Es wird $[G:J^*] = p$, woraus

insbesondere $J = J^*$ folgt. Also ist J eine sog. H_p-Gruppe; und wir folgern aus einem anderen Resultat von HUGHES-THOMPSON, daß J eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 3]*). Es gibt also einen nilpotenten Normalteiler R von J, dessen Ordnung zu p teilerfremd ist, während J/R eine p-Gruppe ist. Dann ist R eine charakteristische Untergruppe von J und also ein Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe G/R, woraus dann sogar folgt, daß R eine charakteristische Untergruppe von G ist. Da $o(G)$ ein Vielfaches der Primzahl q ist, so ist auch $o(R)$ ein Vielfaches von q. Da R nilpotent ist, so ist die q-Sylow-Untergruppe Q von R eine charakteristische Untergruppe von R und G; und da R eine Hallsche Untergruppe von G mit zu q teilerfremdem Index $[G:R]$ ist, so ist Q auch die Gesamtheit der q-Elemente aus G. Aus $[G:K] = pq$ und $[J:K] = q$ folgt $J = KQ$. Da jedes nicht in K gelegene Element aus J wegen (b*) die Ordnung q hat, so liegt jedes nicht in K gelegene Element aus J sogar in Q; und daraus folgt $J = Q$ wegen $K < J$. Damit sind aber J und K als q-Gruppen erwiesen; und dies ist ein Widerspruch, da wir ja oben die Teilbarkeit von $o(K)$ durch $p \neq q$ bewiesen hatten. Aus diesem Widerspruch folgt, daß G/K primär und also $[G:K]$ eine Primzahl ist.

Setzen wir $[G:K] = p$, so haben wegen (b*) alle nicht in K enthaltenen Elemente die Primzahlordnung p. Verstehen wir unter G^* die von den sämtlichen Elementen g aus G mit $o(g) \neq p$ erzeugte charakteristische Untergruppe von G, und erinnern wir uns daran, daß G keine p-Gruppe ist, so wird $1 < G^* \leqq K < G$. Aus einem Satz von HUGHES-THOMPSON folgt wieder $[G:G^*] = p$; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 1]. Also wird $K = G^*$ und K ist eine sog. H_p-Gruppe. Wir wenden ein anderes Resultat von HUGHES-THOMPSON an, um zu zeigen, daß K eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe ist; vgl. HUGHES-THOMPSON [p. 1099, Theorem 3]*). Dann ist aber auch G eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine p-Gruppe.

Sei $V \neq 1$ ein in K enthaltener, σ-zulässiger Normalteiler von G. Dann können wir die bereits gewonnenen Resultate mutatis mutandis auch auf G, σ, V anwenden. Es folgt insbesondere, daß $[G:V]$ eine Primzahl ist, woraus wir $K = V$ erschließen können. Der einzige in K enthaltene, σ-zulässige Normalteiler $\neq 1$ von G ist also K selbst.

Natürlich ist $\mathfrak{F}K$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers K ein Normalteiler von G. Wäre nun $\mathfrak{F}K$ keine Primärgruppe, so wäre auch $\mathfrak{F}\mathfrak{F}K$ keine Primärgruppe; und es würde aus Folgerung 2.3 folgen, daß $\mathfrak{F}K$ ganz in einer Komponente X von σ enthalten ist. Dann wird X wegen Lemma 2.5 von G normalisiert. Aus

$$1 \neq \mathfrak{F}K \leqq X \cap K$$

und der Zulässigkeit von K folgt, daß der Normalteiler X von G, der als Komponente σ-zulässig ist, ganz in K liegt. Also wird $K = X$ eine Komponente von σ.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. Inzwischen hat O. KEGEL die Nilpotenz der H_p-Gruppen bewiesen. Durch Benutzung dieses Kegelschen Satzes ließe sich der Beweis abkürzen.

Wir können also von jetzt an annehmen, daß $\mathfrak{F}K$ primär ist. Da mit G wegen $[G:K]=\mathfrak{p}$ auch K nicht primär sein kann, und da K Erweiterung einer nilpotenten durch eine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist, so ist sicherlich $\mathfrak{F}K \neq 1$; und hieraus folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K \neq 1$. Außerdem sind $o(\mathfrak{F}K)$ und $o(\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K)$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd, da $\mathfrak{F}K$ primär ist.

Sei weiter P eine $\mathfrak{p}$-Sylow-Untergruppe von G. Dann ist $G=KP$ wegen $[G:K]=\mathfrak{p}$; und der Normalteiler $K\cap P$ von P hat wegen $G/K\cong P/(K\cap P)$ den Index $\mathfrak{p}$ in P. Da $K\cap P$ eine $\mathfrak{p}$-Sylow-Untergruppe von K ist, so folgern wir $K\cap P\neq 1$ aus (a). Aus den bekannten Eigenschaften der $\mathfrak{p}$-Gruppen folgt dann $\mathfrak{Z}P\cap K\neq 1$. Da die nicht in K enthaltenen Elemente wegen (b*) Primzahlordnung haben, so gibt es in P Elemente der Ordnung $\mathfrak{p}$, die nicht zu K gehören. Folglich existiert eine elementar-abelsche Untergruppe A der Ordnung $o(A)=\mathfrak{p}^2$ mit $A\cap\mathfrak{Z}P\cap K\neq 1$, die zwar in P, aber nicht in K liegt. Es wird dann $A\cap K=A\cap\mathfrak{Z}P\cap K$ zyklisch von der Ordnung $\mathfrak{p}$.

Wir erinnern zunächst daran, daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ eine $\mathfrak{q}$-Gruppe mit $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$ und als charakteristische Untergruppe des Normalteilers K ein Normalteiler von G ist. Wir können also die Untergruppe $B=A\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ von G bilden. Liegt das Element a aus A nicht in K, so kann a mit keinem Element $z\neq 1$ aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ vertauschbar sein, da sonst z und a wegen Lemma 2.1 in der gleichen Komponente von σ liegen würden, was mit der Zulässigkeit von K unverträglich wäre. Da A mehr als eine zyklische Untergruppe der Ordnung $\mathfrak{p}$ besitzt, so kann A in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ nach einem Burnsideschen Resultat nicht nur Automorphismen $\neq 1$ induzieren, deren einziges Fixelement die Eins ist; vgl. BURNSIDE p. 335/36. Ist also $t\neq 1$ ein Element aus $A\cap K$, so gibt es ein Element $s\neq 1$ in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ mit $st=ts$. Dieses Element st der Ordnung $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ liegt in einer Komponente S von σ, die natürlich auch s und t enthält. Ist x irgendein Element aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$, so ist $xs=sx$; und es folgt

$$1\neq s=s^x\in S\cap S^x,$$

woraus $S=S^x$ [wegen der Normalität von σ] folgt. Ebenso folgert man für y aus A zunächst $yt=ty$ und dann

$$1\neq t=t^y\in S\cap S^y,$$

also ebenfalls $S=S^y$. Folglich liegt $B=A\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ ganz in $\mathfrak{N}S$. Wir setzen $T=SB=SA\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$. Dann ist S ein Normalteiler von T. Da S das Element $st\neq 1$ aus K enthält, und da K eine σ-zulässige Untergruppe ist, so ist S ganz in K enthalten. Da andererseits A nach Konstruktion nicht ganz in K enthalten ist, so wird

$$S\subseteqq S\cdot\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K\subseteqq K\cap T\subset T.$$

Die Partition $\sigma\cap T$ von T ist sicherlich normal. Die Komponente S von [σ und] $\sigma\cap T$ ist ein eigentlicher Normalteiler von T. Die Gruppe S enthält das Element st der Ordnung $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ verschiedene Primzahlen sind. Also ist weder S noch T eine Primärgruppe. Wenden wir den bereits bewiesenen Teil von (c) auf die Partition $\sigma\cap T$ von T an, so ergibt sich:

entweder ist $\sigma\cap T$ eine Frobenius-Partition oder $[T:S]$ ist eine Primzahl.

Angenommen nun $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ wäre nicht in S enthalten. Dann wäre die Untergruppe $S \cdot \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K/S$ von T/S eine von 1 verschiedene q-Gruppe, da ja $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ eine q-Gruppe ist. Die Untergruppe SA/S von T/S ist eine von 1 verschiedene p-Gruppe, da ja S in K enthalten ist, A aber nicht. Da p und q verschiedene Primzahlen sind, so ist $[T:S]$ durch pq teilbar. Bedenken wir weiter, daß $B=A \cdot \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ das Produkt des q-Normalteilers $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}K$ und der p-Gruppe A ist, so folgt, daß p und q die einzigen $o(B)$ teilenden Primzahlen sind; und aus $[T:S]=[B:S\cap B]$ folgt also, daß p und q die einzigen Primteiler von $[T:S]$ sind. Da $[T:S]$ als Vielfaches von pq keine Primzahl ist, so folgt aus der obigen Bemerkung, daß $\sigma\cap T$ eine Frobenius-Partition von T ist. Wegen Satz 4.5, (4), den wir auf die Komponente S der Frobenius-Partition $\sigma\cap T$ von T anwenden können, gibt es dann einen Primteiler r von $[T:S]$, der $o(S)$ nicht teilt. Da aber p und q die einzigen Primteiler von $[T:S]$ sind, so ist $r=p$ oder q; und da $o(S)$, wie früher bemerkt, durch pq teilbar ist, so muß r doch $o(S)$ teilen. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir

$$1 < \mathfrak{Z}\mathfrak{F}K \leqq S$$

folgern. Aus Lemma 2.5 ergibt sich, daß die Komponente S von σ von G normalisiert wird und also ein Normalteiler von G ist. Da S in K enthalten ist, und da wir schon gezeigt haben, daß K der einzige in K enthaltene, von 1 verschiedene, σ-zulässige Normalteiler von G ist, so folgt $S=K$; und damit ist der Beweis der Tatsache, daß K eine Komponente von σ ist, voll erbracht. Also haben wir (c) bewiesen; und (b) ergibt sich sofort aus (b*) und (c).

Bemerkung 5.2. Die Voraussetzung, daß G keine Primärgruppe sei, ist für die Gültigkeit von (c) unentbehrlich. Sei etwa G eine elementar abelsche p-Gruppe der Ordnung p^n mit $3<n$. Dann besitzt G eine Untergruppe K der Ordnung p^{n-2}, die also gewiß nicht zyklisch ist. Eine Partition σ von G besteht aus allen zyklischen Untergruppen der Ordnung p. Diese ist normal und weder trivial noch eine Frobenius-Partition. K ist ein eigentlicher σ-zulässiger Normalteiler von G. Aber weder ist $[G:K]$ eine Primzahl noch ist K eine Komponente von σ.

Zusatz 5.3. *Eine nicht primäre Gruppe G besitzt höchstens eine normale Partition, die weder einfach noch eine Frobenius-Partition ist.*

Beweis. Es seien α und β normale Partitionen von G, die weder einfache noch Frobenius-Partitionen sind. Ist A ein α-zulässiger eigentlicher Normalteiler von G, so ist $[G:A]=a$ eine Primzahl, A und G sind Erweiterungen nilpotenter durch a-Gruppen, A ist eine Komponente von α und A wird von allen $g\in G$ mit $o(g)\neq a$ erzeugt, [Satz 5.1]. Ist x ein nicht in A gelegenes Element aus G, so ist $o(x)=a$ und x liegt in einer eindeutig bestimmten Komponente X von α. Da X nicht in A enthalten ist, so ist $A\cap X=1$; und aus $[G:A]=a$ folgt $o(X)=a$. Es ist dann klar, daß die von A verschiedenen Komponenten von α genau die nicht in A enthaltenen zyklischen Untergruppen [der Ordnung a] sind. Ist entsprechend B ein β-zulässiger Normalteiler von G, so ist $[G:B]=b$ eine Primzahl, B und G sind Erweiterungen nilpotenter durch b-Gruppen, B wird von den sämtlichen Elementen mit von b verschiedener

Ordnung erzeugt, B ist eine Komponente von β und die übrigen Komponenten von β sind genau die nicht in B enthaltenen zyklischen Untergruppen [der Ordnung b].

Wäre $a \neq b$, so wäre $G/\mathfrak{F}G$ sowohl eine a-Gruppe als auch eine b-Gruppe und also gleich 1. Also wäre G eine nilpotente, nicht-primäre Gruppe, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ ebenfalls nicht-primär wäre. Eine solche Gruppe läßt nur die triviale Partition zu [Bemerkung 2.4]. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $a=b$ folgern. Dann wird aber $A=B$; und nun ist es klar, daß $\alpha=\beta$ ist.

FOLGERUNG 5.4. *Ist σ eine normale Partition der Gruppe G und die σ-zulässige Untergruppe U von G weder primär noch normalisatorgleich, so ist U eine Komponente von σ*).*

BEWEIS. Ist zunächst U nilpotent, so ist mit U auch $\mathfrak{Z}U$ nicht primär. Aus Folgerung 2.3 ergibt sich dann, daß U ganz in einer Komponente von σ enthalten ist. Da aber U eine von 1 verschiedene σ-zulässige Untergruppe von G ist, so ist U selbst die U enthaltende Komponente von σ. — Ist weiter U nicht nilpotent, so ist mit U auch $\mathfrak{N}U$ nicht primär; und U ist ein eigentlicher $(\sigma \cap \mathfrak{N}U)$-zulässiger Normalteiler von $\mathfrak{N}U$, der gewiß nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}U$ enthalten ist. Anwendung von Satz 4.1, (4) ergibt dann, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}U$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}U$ ist. Wir können also Satz 5.1, (c) anwenden, um zu zeigen, daß U eine Komponente von σ ist.

BEMERKUNG 5.5. Im Verlaufe der vorhergehenden Betrachtungen haben wir verschiedentlich die folgende Tatsache aus Satz 4.1, (4) und Satz 5.1, (c) hergeleitet:

ist die normale Partition σ der Gruppe G nicht einfach, ist G nicht primär, so gibt es einen und nur einen maximalen, eigentlichen σ-zulässigen Normalteiler von G.

ZUSATZ 5.6. *Ist G eine p-Gruppe mit $G^p \neq 1$ und σ eine normale Partition von G, so gibt es eine Komponente von σ, die ein Normalteiler von G ist und sowohl $\mathfrak{Z}G$ wie auch alle Elemente mit von p verschiedener Ordnung enthält.*

BEWEIS. Sei g irgendein Element aus G mit $g^p \neq 1$. Dann liegt g in einer eindeutig bestimmten Komponente X von σ. Aus Lemma 2.1 folgt sofort, daß jedes Element aus $\mathfrak{Z}G$ mit g in der gleichen Komponente liegt, daß also $\mathfrak{Z}G \subseteq X$ ist. Da das Zentrum einer von 1 verschiedenen p-Gruppe ebenfalls von 1 verschieden ist, so folgt aus der vorausgesetzten Existenz von Elementen g mit $g^p \neq 1$ in G die Existenz einer Komponente L von σ mit folgenden zwei Eigenschaften:

$1 < \mathfrak{Z}G \subseteq L$ und L enthält alle Elemente aus G mit von p verschiedener Ordnung [Lemma 2.1].

Aus Lemma 2.5 folgt weiter, daß L ein Normalteiler von G ist.

LEMMA 5.7. *Es sei σ eine normale Partition der Gruppe G und A eine Komponente von σ.*

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]: und U ist nilpotent, wie sich aus einem neuen Satz von O. KEGEL ergibt.

(a) *Ist die Primzahl p ein Teiler von $o(A)$, aber nicht von $[G:A]$, so ist die Komponente B von G [dann und nur dann] zu A konjugiert, wenn p ein Teiler von $o(B)$ ist.*

(b) *Ist die Primzahl p ein gemeinsamer Teiler von $o(A)$ und $[G:A]$, so ist p auch ein Teiler von $[\mathfrak{N}A:A]$.*

(c) *Dann und nur dann ist A eine Hallsche Untergruppe von G, wenn A eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}A$ ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß die Primzahl p ein Teiler von $o(A)$, aber nicht von $[G:A]$ ist. Ist S eine p-Sylow-Untergruppe von A, so ist $S \neq 1$ und auch eine p-Sylow-Untergruppe von G. Ist weiter die Ordnung der Komponente B von σ ebenfalls ein Vielfaches von p, so enthält B ein Element b der Ordnung p. Aus den Sylowschen Sätzen folgt die Existenz eines Elements g aus G derart, daß b^g in der p-Sylow-Untergruppe S von G liegt. Aus

$$1 \neq b^g \in S \cap B^g \subseteq A \cap B^g$$

und der Normalität von σ folgt $A = B^g$, womit (a) bewiesen ist.

Ist zweitens die Primzahl p ein gemeinsamer Teiler von $o(A)$ und $[G:A]$, so ist eine p-Sylow-Untergruppe S von A weder gleich 1 noch eine p-Sylow-Untergruppe von G. Ist P eine S enthaltende p-Sylow-Untergruppe von G, so wird also $S = A \cap P < P$; und hieraus folgt sogar $S < \mathfrak{N}S \cap P$. Ist t irgendein nicht in S enthaltenes Element aus $\mathfrak{N}S \cap P$, so liegt t auch nicht in A. Andererseits wird

$$1 \neq S = S^t \subseteq A \cap A^t;$$

und hieraus folgt $A = A^t$ wegen der Normalität von σ. Mithin liegt t in $\mathfrak{N}A$, aber nicht in A, so daß At ein von 1 verschiedenes p-Element aus $\mathfrak{N}A/A$ ist. Folglich ist $[\mathfrak{N}A:A]$ ein Vielfaches von p, womit (b) bewiesen ist. — (c) ist eine fast unmittelbare Folge von (b).

6. Hallsche Partitionen

Die Partition σ der Gruppe G möge als *Hallsche Partition von G* bezeichnet werden, wenn jede Komponente von σ eine Hallsche Untergruppe von G ist. Die triviale Partition ist stets Hallsch.

Aus Lemma 5.7, (a) folgt, daß zwei Komponenten einer normalen Hallschen Partition dann und nur dann konjugiert sind, wenn ihre Ordnungen nicht teilerfremd sind.

Satz 6.1. *Die folgenden Eigenschaften der normalen Partition σ der Gruppe G sind äquivalent:*

(a) *σ ist eine Hallsche Partition von G.*

(b) *Vertauschbare Elemente gleicher Primzahlordnung liegen in der gleichen Komponente von σ.*

(c) *Vertauschbare Elemente liegen in der gleichen Komponente von σ.*

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, daß σ Hallsch ist, und betrachten zwei vertauschbare Elemente a, b der gleichen Primzahlordnung p aus G. Dann ist $\{a, b\}$ eine abelsche p-Gruppe; und eine solche ist in einer p-Sylow-Untergruppe P von G enthalten. Weiter liegt a in einer Komponente A von σ. Das Element a der Ordnung p aus A liegt in einer p-Sylow-Untergruppe Q von A. Da $Q \neq 1$ und A nach Voraussetzung eine Hallsche Untergruppe von G ist, so ist Q sogar eine p-Sylow-Untergruppe von G. Da die p-Sylow-Untergruppen von G konjugiert sind, so gibt es ein $Q^g = P$ erfüllendes Element g in G. Da

$$\{a, b\} \subseteq P = Q^g \subseteq A^g$$

ist, und da A^g mit A eine Komponente der normalen Partition σ ist, so haben wir die Zugehörigkeit von a und b zur gleichen Komponente von σ dargetan. [Es ist sogar $A = A^g$.] Also folgt (b) aus (a).

Es ergibt sich ohne weiteres aus Lemma 2.1, daß (c) aus (b) folgt.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Ist U eine Untergruppe von G und $\mathfrak{Z}U \neq 1$, so gibt es ein Element $t \neq 1$ in $\mathfrak{Z}U$. Dieses liegt in einer Komponente T von σ. Da jedes Element aus U mit t vertauschbar ist, so folgt aus (c), daß alle Elemente aus U in der gleichen Komponente wie t liegen. Da $t \neq 1$ in einer und nur einer Komponente enthalten ist, so folgt $U \subseteq T$. — Sei nun X eine Komponente, deren Ordnung durch die Primzahl p teilbar ist. Dann enthält X ein Element a der Ordnung p; und dieses liegt in einer p-Sylow-Untergruppe P von G. Nach dem eben Gezeigten liegt P in einer Komponente Y von σ. Aus

$$1 \neq a \in X \cap P \subseteq X \cap Y$$

folgt $X = Y$, so daß X eine ganze p-Sylow-Untergruppe von G enthält, wenn $o(X)$ ein Vielfaches von p ist. Also ist X Hallsch; und damit haben wir (a) aus (c) hergeleitet.

BEMERKUNG 6.2. Die Normalität von σ wurde nur bei der Herleitung von (b) aus (a) benutzt. Der Verfasser hat nicht entscheiden können, ob diese Voraussetzung entbehrlich ist oder nicht.

BEMERKUNG 6.3. Wir haben im Verlaufe des Beweises von Satz 6.1 gezeigt:

ist σ eine normale Hallsche Partition der Gruppe G und U eine Untergruppe von G mit $\mathfrak{Z}U \neq 1$, so ist U ganz in einer Komponente von σ enthalten.

BEMERKUNG 6.4. *Ist σ eine normale Hallsche Partition und U eine Untergruppe von G, so ist auch $\sigma \cap U$ eine normale Hallsche Partition von U,* da sich die Bedingungen (b) und (c) des Satzes 6.1 offenbar auf Untergruppen vererben.

FOLGERUNG 6.5. *Ist σ eine normale Hallsche Partition der Gruppe G, so ist* $o(G) = \prod_{\mathfrak{X} \subseteq \sigma} o(\mathfrak{X})$.

Hierbei ist, wie angedeutet, das Produkt über alle Klassen $\mathfrak{X}$ konjugierter Komponenten von σ zu erstrecken; und $o(\mathfrak{X})$ ist die gemeinsame Ordnung der Untergruppen aus der Klasse $\mathfrak{X}$ konjugierter Untergruppen.

BEWEIS. Aus Lemma 5.7, (a) folgt sofort $(o(\mathfrak{X}), o(\mathfrak{Y})) = 1$, falls $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei verschiedene Klassen konjugierter Komponenten von σ sind. Da jede Sylow-Untergruppe $\neq 1$ von G wegen Bemerkung 6.3 in einer und nur einer Komponente der normalen Hallschen Partition σ von G enthalten ist, so teilt jeder Primzahlpotenzteiler $\neq 1$ von $o(G)$ genau eine der Zahlen $o(\mathfrak{X})$; und hieraus folgt unsere Behauptung.

Ist σ eine Frobenius-Partition der Gruppe G, so ist $\mathfrak{F}G$ ein σ-zulässiger, eigentlicher, Hallscher Normalteiler von G und die Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G sind genau die normalisatorgleichen Komponenten von σ [Satz 4.1]. Wir erhalten also in der aus $\mathfrak{F}G$ und den Komplementen von $\mathfrak{F}G$ bestehenden Untergruppenmenge σ^* eine Frobenius-Partition von G. Diese Konstruktion legt es nahe, eine *Frobenius-Partition von G minimal* zu nennen, wenn $\mathfrak{F}G$ eine ihrer Komponenten ist. Vgl. hierzu Satz 4.7.

SATZ 6.6. *Eine Gruppe besitzt höchstens eine minimale Frobenius-Partition.*

Denn die Komponenten einer minimalen Frobenius-Partition der Gruppe G sind wegen Satz 4.1 notwendig $\mathfrak{F}G$ und die sämtlichen Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G.

BEMERKUNG 6.7. Dieses Resultat stellt eine Verschärfung eines Resultats von G. BACHMANN [p. 470, Theorem 3.2] dar.

SATZ 6.8. *Die folgenden Eigenschaften der normalen, nicht-trivialen Partition σ von G sind äquivalent:*

(a) *σ ist eine minimale Frobenius-Partition.*

(b) *σ ist eine Hallsche Frobenius-Partition.*

(c) *σ ist eine Hallsche Partition, von deren Komponenten wenigstens eine ein Normalteiler ist.*

(d) *σ ist eine Hallsche Partition und einfache Untergruppen von G sind in Komponenten von σ enthalten.*

(e) *Ist $U \neq 1$ eine Untergruppe von G, so gibt es eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von U, die ganz in einer Komponente von σ enthalten ist.*

(f) *σ ist eine nicht-einfache, Hallsche Partition.*

BEWEIS. Ist σ eine minimale Frobenius-Partition, so besteht σ aus dem Hallschen Normalteiler $\mathfrak{F}G$ und den Komplementen von $\mathfrak{F}G$ in G, die dann notwendig auch Hallsch sind [Satz 4.1]. Damit haben wir (b) aus (a) hergeleitet.

Ist σ eine Hallsche Frobenius-Partition, so ist $\mathfrak{F}G$ ein eigentlicher, Hallscher, nilpotenter, σ-zulässiger Normalteiler von G [Satz 4.1]. Aus Bemerkung 6.3 ergibt sich, daß $\mathfrak{F}G$ ganz in einer Komponente von σ enthalten und also selbst eine Komponente von σ ist. Damit haben wir (c) und (a) aus (b) hergeleitet. — Aus (c) folgt wegen Satz 4.5 sofort, daß σ eine Hallsche Frobenius-Partition ist, womit die Äquivalenz von (a), (b) und (c) dargetan ist.

Sei nun σ eine Hallsche Frobenius-Partition und E eine einfache Untergruppe von G. Ist E zyklisch, so liegt E natürlich in einer Komponente von σ. Wir können also annehmen, daß E nicht abelsch ist. Dann ist $E \not\subseteq \mathfrak{F}G$ und also $E \cap \mathfrak{F}G = 1$; und es folgt aus Satz 4.1, (3), daß E in einer normalisatorgleichen Komponente von σ enthalten ist. Damit haben wir (d) aus (b) hergeleitet.

Wir nehmen die Gültigkeit von (d) an und betrachten eine Untergruppe $U \neq 1$ von G. Ist zunächst $\mathfrak{F}U \neq 1$, so ist $\mathfrak{F}U$ eine von 1 verschiedene, nilpotente, charakteristische Untergruppe von U. Da σ Hallsch ist, so folgt aus Bemerkung 6.3, daß die nilpotente Untergruppe $\mathfrak{F}U$ ganz in einer Komponente von σ enthalten ist. Ist aber $\mathfrak{F}U = 1$, so ist der Sockel $\mathfrak{S}U$ von U eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von U, die das Produkt nicht-abelscher einfacher Gruppen $E(i)$ ist. Jedes $E(i)$ ist wegen (d) in einer Komponente $F(i)$ von σ enthalten. Ist $i \neq j$, so können wir ein Element a in $E(i)$ und ein Element b in $E(j)$ finden, deren Ordnungen verschiedene Primzahlen sind. Aus Lemma 2.1 folgt dann, daß die natürlich vertauschbaren Elemente a und b in derselben Komponente von σ liegen. Da a in $F(i)$ und b in $F(j)$ liegt, so wird $F(i) = F(j)$; und damit haben wir gezeigt, daß alle $F(i)$ einander gleich sind. Also liegen alle $E(i)$ in der gleichen Komponente von σ; und damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}U$ in einer Komponente von σ enthalten ist. (e) ist mithin eine Folge von (d).

Wir nehmen die Gültigkeit von (e) an. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $C \neq 1$ von G, die ganz in einer Komponente K von σ enthalten ist. Aus Lemma 2.5 folgt, daß die Komponente K ein Normalteiler von G ist. — Sei weiter $U \neq 1$ eine elementar-abelsche p-Untergruppe von G. Dann ist U charakteristisch-einfach; und Anwendung der Bedingung (e) ergibt, daß U in einer Komponente von σ enthalten ist. Sind a und b vertauschbare Elemente gleicher Primzahlordnung aus G, so ist $\{a, b\}$ eine elementar-abelsche p-Untergruppe; und a und b sind also in derselben Komponente von σ enthalten. Anwendung von Satz 6.1 zeigt, daß σ eine Hallsche Partition ist. Da eine der Komponenten von σ ein Normalteiler ist, so haben wir gezeigt, daß σ eine nicht-einfache, Hallsche Partition ist, haben also (f) aus (e) hergeleitet.

Gilt (f), so ist σ eine Hallsche Partition von G und es gibt einen eigentlichen, σ-zulässigen Normalteiler K von G. Dieser ist mit σ Hallsch; und es folgt aus Satz 5.1, (a) [oder aus Satz 4.5, (3)], daß σ eine Hallsche Frobenius-Partition ist. Also ist (b) eine Folge von (f); und die Äquivalenz von (a) bis (f) ist erwiesen.

BEMERKUNG 6.9. Eine normale Hallsche Partition ist entweder trivial oder einfach oder eine minimale Frobenius-Partition, wie sich sofort aus der Äquivalenz der Bedingungen (a) und (f) des Satzes 6.8 ergibt. Für eine wesentliche Verschärfung dieser Bemerkung vgl. Satz 6.11.

BEMERKUNG 6.10. Im Zusammenhang mit der zweiten Hälfte der Bedingung (d) von Satz 6.8 sei zunächst auf Folgerung 3.7 hingewiesen. Zieht man

aber noch den Satz 6.11 heran, so erweist sich diese Bedingung als unnötig scharf; ist nämlich die normale Partition σ von G Hallsch, aber nicht trivial, und ist weiter G nicht einfach, so ist σ eine Hallsche Frobenius-Partition, also sogar eine minimale Frobenius-Partition. Man kann also (d) durch die Forderung

(d*) *σ ist Hallsch und G ist nicht einfach*

ersetzen. Zwischen den Bedingungen (d) und (d*) steht die offenbar gleichwertige Bedingung

(d**) *σ ist Hallsch und einfache charakteristische Untergruppen von G sind in Komponenten von σ enthalten.*

Wir wenden uns jetzt dem Satz 6.11, auf den wir schon vorgegriffen haben, zu.

Satz 6.11. *Wenn die normale Hallsche Partition σ von G nicht trivial und auch keine Frobenius-Partition ist, so ist G einfach [und nicht abelsch]; und eine Untergruppe von G ist dann und nur dann eine Komponente von σ, wenn sie eine maximale nilpotente Untergruppe von G ist.*

Beweis. Ist X eine Komponente von σ, so folgern wir aus der Definition der Frobenius-Partition, daß $X < \mathfrak{N}X$ ist. Aus Bemerkung 6.4 ergibt sich weiter, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Hallsche Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Es ist $X \neq \mathfrak{N}X$ eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$, so daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ nicht trivial ist; und die Komponente X von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$. Wir können also Satz 6.8 anwenden und finden, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Der eigentliche $(\sigma \cap \mathfrak{N}X)$-zulässige Normalteiler X von $\mathfrak{N}X$ ist folglich wegen Satz 4.1, (1) nilpotent. Damit haben wir die Nilpotenz aller Komponenten von σ bewiesen. – Aus Bemerkung 6.3 folgt weiter, daß jede nilpotente Untergruppe von G in einer Komponente der Hallschen Partition σ enthalten ist. Aus diesen beiden Tatsachen zusammen ergibt sich die zweite Behauptung unseres Satzes, nämlich:

(a) die Untergruppe U von G ist dann und nur dann eine Komponente von σ, wenn U eine maximale nilpotente Untergruppe von G ist.

Ist K ein nilpotenter Normalteiler von G, so ist K wegen (a) ganz in einer Komponente H von σ enthalten. Wäre $K \neq 1$, so würde aus Lemma 2.5 folgen, daß H ein Normalteiler von G ist; und damit hätten wir gezeigt, daß die nicht-triviale Partition σ auch nicht einfach ist. Da aber H eine Hallsche Untergruppe von G ist, so würde aus Satz 5.1, (a) folgen, daß σ eine Frobenius-Partition von G ist, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Aus diesem Widerspruch folgt $K = 1$; und wir haben gezeigt:

(b) 1 ist der einzige nilpotente Normalteiler von G.

Wir betrachten einen eigentlichen Normalteiler K von G und eine $X \cap K = 1$ erfüllende Komponente X von G. Dann ist $o(K)$ ein Teiler von $[G:X]$. Da

aber X eine Hallsche Untergruppe von G ist, so sind $o(X)$ und $o(K)$ teilerfremd. In X gibt es ein Element t von Primzahlordnung $\mathfrak{p}$. Ist k ein mit t vertauschbares Element aus K, so haben k und t teilerfremde Ordnung. Aus Lemma 2.1 folgt, daß k und t der gleichen Komponente X von σ angehören. Also liegt k in $X \cap K = 1$. Folglich ist 1 das einzige Element aus K, mit dem t vertauschbar ist. Der von t in K induzierte Automorphismus besitzt also kein von 1 verschiedenes Fixelement und hat Primzahlordnung $\mathfrak{p}$, ist ein Frobenius-Automorphismus von K. Anwendung des Satzes von THOMPSON ergibt die Nilpotenz von K; vgl. THOMPSON [1; p. 579, Theorem 1]. Dies widerspricht aber (b). Folglich gilt:

(c) $K \cap X \neq 1$ für jede Komponente X von σ und jeden eigentlichen Normalteiler K von G.

Sei wieder K ein eigentlicher Normalteiler von G und X eine Komponente von σ. Ist g ein Element aus $\mathfrak{N}X$, so gilt

$$(K \cap X)^g = K^g \cap X^g = K \cap X,$$

so daß g auch zu $\mathfrak{N}(K \cap X)$ gehört. Liegt umgekehrt g in $\mathfrak{N}(K \cap X)$, so folgt aus (c) und Lemma 2.5 die Zugehörigkeit von g zu $\mathfrak{N}X$. Damit haben wir gezeigt:

(d) Ist K ein eigentlicher Normalteiler von G und X eine Komponente von σ, so ist $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}(X \cap K)$.

Ist K ein eigentlicher Normalteiler von G, so ist $\sigma \cap K$ eine normale Hallsche Partition von K [Bemerkung 6.4]. Ist X eine Komponente von σ und g ein Element aus G, so ist auch X^g eine Komponente von σ; und es folgt aus (c), daß $K \cap X \neq 1$ und $K \cap X^g \neq 1$ Komponenten von $\sigma \cap K$ sind. Wegen $K \cap X^g = (K \cap X)^g$ sind diese Komponenten sogar isomorph; und jetzt folgt aus Lemma 5.7, (a), daß $K \cap X$ und $K \cap X^g$ in K konjugiert sind. Es gibt also ein

$$(K \cap X)^g = K \cap X^g = (K \cap X)^k$$

erfüllendes Element k in K. Dann gehört gk^{-1} zu $\mathfrak{N}(K \cap X) = \mathfrak{N}X$ [wegen (d)]. Mithin liegt jedes Element g in $K \cdot \mathfrak{N}X$. Folglich gilt:

(e) Ist K ein eigentlicher Normalteiler von G und X eine Komponente von σ, so ist $G = K \cdot \mathfrak{N}X$.

Es sei K wieder ein eigentlicher Normalteiler von G. Ist x irgendein Element aus G, so liegt x in einer Komponente X von σ. Wegen (a) ist X nilpotent; und hieraus folgt die Nilpotenz von KX/K. Da aber X ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist KX/K ein Normalteiler von $K \cdot \mathfrak{N}X/K = G/K$ [wegen (e)]. Daraus folgt, daß jedes Element aus G/K in wenigstens einem nilpotenten Normalteiler von G/K liegt. Da das Produkt aller nilpotenten Normalteiler einer Gruppe selbst nilpotent ist [die Fittingsche Untergruppe], so gilt:

(f) G/K ist nilpotent für jeden eigentlichen Normalteiler K von G.

Ist K ein eigentlicher Normalteiler von G, so ist G/K nilpotent und es gibt also ein Element Kw in G/K, dessen Ordnung $o(Kw)$ durch jeden Prim-

teiler der Ordnung von G/K teilbar ist. Dann ist a fortiori $o(w)$ durch jeden Primteiler von $o(G/K)=[G:K]$ teilbar. Natürlich liegt w in einer Komponente W von σ. Da W eine Hallsche Untergruppe von G ist, und da $o(W)$ durch jeden Primteiler von $o(w)$ und also auch durch jeden Primteiler von $[G:K]$ teilbar ist, so enthält W für jeden Primteiler p von $[G:K]$ eine p-Sylow-Untergruppe von G; und KW/K enthält für jeden Primteiler p von $[G:K]=o(G/K)$ eine p-Sylow-Untergruppe von G/K. Also ist $G/K=KW/K$; und damit haben wir gezeigt:

(g) Ist K ein eigentlicher Normalteiler von G, so gibt es eine $KW=G$ erfüllende Komponente W von σ.

Wir betrachten wieder einen eigentlichen Normalteiler K von G. Wegen (g) gibt es eine $G=KW$ erfüllende Komponente W von σ; und wir folgern $W\cap K\neq 1$ aus (c). Wir haben schon bemerkt, daß W nicht normalisatorgleich sein kann, da ja sonst σ Frobenisch wäre. Es ist also $W<\mathfrak{N}W$; und aus dem Dedekindschen Modulsatz folgern wir $\mathfrak{N}W=W(K\cap\mathfrak{N}W)$ und $K\cap W<K\cap\mathfrak{N}W$, da ja sonst $W=\mathfrak{N}W$ sein würde. Wegen Bemerkung 6.4 ist $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ eine Hallsche normale Partition von $K\cap\mathfrak{N}W$; und $K\cap W\neq 1$ ist eine Komponente dieser Partition, die gleichzeitig Normalteiler ist. Aus Satz 6.8 erschließen wir, daß $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ eine minimale Frobenius-Partition ist, so daß also $K\cap W$ die Fittingsche Untergruppe von $K\cap\mathfrak{N}W$ ist. Aus Satz 4.1 folgt dann, daß die übrigen Komponenten von $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ normalisatorgleich, untereinander in $K\cap\mathfrak{N}W$ konjugiert und gerade die sämtlichen Komplemente von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$ sind. Ist X eine von $K\cap W$ verschiedene Komponente von $\sigma\cap(K\cap\mathfrak{N}W)$ und w ein Element aus W, so ist auch X^w ein Komplement von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$. Also ist X^w zu X in $K\cap\mathfrak{N}W$ konjugiert. Es gibt folglich ein $X^w=X^k$ erfüllendes Element k in $K\cap\mathfrak{N}W$. Folglich gehört wk^{-1} zum Normalisator von X. Aus $\mathfrak{N}W=W(K\cap\mathfrak{N}W)$ folgt, daß das Komplement X von $K\cap W$ in $K\cap\mathfrak{N}W$ auch ein Komplement von W in $\mathfrak{N}W$ ist. Da $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ eine normale Hallsche Partition von $\mathfrak{N}W$ ist [Bemerkung 6.4] und da der Normalteiler W von $\mathfrak{N}W$ eine Komponente von $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ ist, so folgt aus Satz 6.8, daß $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}W$ ist, daß W genau die Fittingsche Untergruppe von $\mathfrak{N}W$ ist, und daß die übrigen Komponenten von $\sigma\cap\mathfrak{N}W$ sämtlich normalisatorgleich und die Komplemente von W in $\mathfrak{N}W$ sind. Insbesondere ist also X eine normalisatorgleiche Untergruppe von $\mathfrak{N}W$, so daß wk^{-1} zu X gehört. Dann gehört w zu $XK=K$; und damit haben wir $W\leqq K$ bewiesen. Also wird $G=KW=K$; und damit haben wir gezeigt, daß die Annahme der Existenz eigentlicher Normalteiler von G zu einem Widerspruch führt. Also ist G einfach; und eine einfache Gruppe mit nicht trivialer Partition kann nicht zyklisch von Primzahlordnung und also auch nicht abelsch sein.

Der Satz 6.11 enthält offenbar auch die folgende Verschärfung von Satz 6.8 bzw. Satz 4.5, (4):

Zusatz 6.12. *Die Partition σ von G ist dann und nur dann eine minimale Frobenius-Partition von G, wenn σ normal, Hallsch und nicht-trivial ist, und wenn gleichzeitig G nicht einfach ist.*

Man kann dies auch so aussprechen: Eine normale Hallsche Partition σ der Gruppe G ist entweder trivial oder minimal Frobenisch oder aber G ist einfach und alle Komponenten von σ sind nilpotent. Die Gesamtheit der Sylow-Untergruppen der alternierenden Gruppe vom Grade 5 ist ein Beispiel einer normalen, Hallschen Partition einer einfachen Gruppe. Für eine umfangreiche Beispielklasse vgl. SUZUKI [3; p. 870].

FOLGERUNG 6.13. *Eine Gruppe besitzt höchstens eine normale, nicht-triviale Hallsche Partition.*

BEWEIS. Ist σ eine normale, nicht-triviale Hallsche Partition der Gruppe G, so bestehen zwei Möglichkeiten: Ist zunächst G nicht einfach, so folgt aus Zusatz 6.12, daß σ eine minimale Frobenius-Partition von G ist; und wegen Satz 6.6 besitzt G höchstens eine minimale Frobenius-Partition. Ist aber G einfach, so ergibt sich aus Zusatz 6.12, daß σ keine Frobenius-Partition ist — eine Hallsche Partition ist ja wegen Satz 6.8 dann und nur dann eine Frobenius-Partition, wenn sie eine minimale Frobenius-Partition ist. Aber in diesem Fall besteht σ wegen Satz 6.11 genau aus den maximalen nilpotenten Untergruppen, ist also ebenfalls eindeutig bestimmt.

FOLGERUNG 6.14. (a) *Eine aus genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen bestehende Partition ist eine Frobenius-Partition.*

(b) *Dann und nur dann ist die Partition σ von G eine minimale Frobenius-Partition von G, wenn σ eine aus genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen bestehende Hallsche Partition von G ist.*

BEWEIS. Es bestehe zunächst die Partition σ von G aus genau den zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konjugierter Untergruppen von G. Dann ist σ sicherlich eine normale, nicht-triviale Partition von G. Anwendung von (1.5) ergibt dann

$$1 < d(\mathfrak{A})^{-1} + d(\mathfrak{B})^{-1};$$

und dies ist gleichwertig mit

$$d(\mathfrak{A})\, d(\mathfrak{B}) < d(\mathfrak{A}) + d(\mathfrak{B}).$$

Folglich wird

$$0 \leqq [d(\mathfrak{A}) - 1][d(\mathfrak{B}) - 1] < 1,$$

da ja der Index $d(\mathfrak{X})$ eine positive ganze Zahl ist; und hieraus folgt sofort

$$0 = [d(\mathfrak{A}) - 1][d(\mathfrak{B}) - 1],$$

so daß $d(\mathfrak{A})$ oder $d(\mathfrak{B})$ gleich 1 ist. Also besteht eine dieser beiden Klassen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus normalisatorgleichen Untergruppen, so daß σ eine Frobenius-Partition ist. Damit ist (a) bewiesen.

Eine minimale Frobenius-Partition von G besteht, wie sich aus der Definition und Satz 4.1 ergibt, genau aus $\mathfrak{N}G$ und der Klasse der Komplemente von $\mathfrak{N}G$ in G, die alle untereinander konjugiert sind. Außerdem sind $\mathfrak{N}G$ und seine Komplemente Hallsche Untergruppen, womit die Notwendigkeit unserer Bedingungen [ad (b)] dargetan ist.

Sind umgekehrt die Bedingungen von (b) erfüllt, so ergibt sich aus (a), daß σ eine Hallsche Frobenius-Partition ist; und eine solche ist wegen Satz 6.8, (b) eine minimale Frobenius-Partition, womit auch (b) bewiesen ist.

BEMERKUNG 6.15. Ist G die alternierende Gruppe vom Grade 4, so besitzt G einen abelschen Normalteiler K der Ordnung 4 mit $K^2=1$; und alle nicht in K enthaltenen Elemente haben die Ordnung 3. Man überzeugt sich, daß alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 und auch alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 untereinander konjugiert sind. Die von 1 verschiedenen zyklischen Untergruppen haben alle die Ordnung 2 oder 3; sie bilden eine normale, nicht-triviale Frobenius-Partition σ von G, die nicht minimal ist, aber in genau zwei Klassen konjugierter Untergruppen zerfällt. Die zweite der ad (b) angegebenen Bedingungen ist also unentbehrlich.

7. Die Struktur der Komponenten und ihrer Normalisatoren

Ist A eine Komponente der normalen und nicht-trivialen Partition σ der Gruppe G, und ist zunächst $A=\mathfrak{N}A$, so folgt aus Satz 4.1 und Bemerkung 4.9, daß A weder nicht-triviale Partitionen noch elementar-abelsche Untergruppen der Ordnung p^2 besitzt. Ist zweitens $A\neq\mathfrak{N}A$, so ist die Komponente A der normalen, nicht-trivialen Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}A$ von $\mathfrak{N}A$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}A$; und es folgt aus Lemma 3.3, daß A nilpotent oder eine Erweiterung einer nilpotenten durch eine Primärgruppe ist*). Ähnlich kann man Satz 4.1 und Satz 5.1 benutzen, um Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{N}A$ zu gewinnen. Wir wollen darüber hinaus aber die Situation von A in G etwas aufklären.

SATZ 7.1. *Ist X eine Komponente der normalen Partition σ der Gruppe G, ist weiter $(\mathfrak{N}X)^p\neq 1$ für jede Primzahl p, ist sogar $X^p\neq 1$ für jede Primzahl p, im Falle $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist $\mathfrak{N}X=\mathfrak{N}\mathfrak{N}X$.*

BEWEIS. Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig, falls $X=\mathfrak{N}X$ ist; und wir wollen deshalb im folgenden $X\neq\mathfrak{N}X$ annehmen. Dann ist die Komponente X der normalen Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$, so daß diese Partition insbesondere nicht einfach ist.

Fall 1. $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ist keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

Dann folgt aus Satz 5.1, (b), daß die sämtlichen, nicht in X enthaltenen Elemente aus $\mathfrak{N}X$ die gleiche Primzahlordnung p haben. Sei T die Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, die von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von p verschiedener Ordnung erzeugt wird. Da nach Voraussetzung $(\mathfrak{N}X)^p\neq 1$ ist, so ist auch $T\neq 1$; und wir haben gerade erwähnt, daß die Erzeugenden von T, und also auch T selbst, in X liegen. Damit haben wir gezeigt, daß X eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ enthält.

Fall 2. $\sigma\cap\mathfrak{N}X$ ist eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

*) *Zusatz bei der Korrektur* [20. Januar 1961]. O. KEGEL hat inzwischen die Nilpotenz einer solchen Komponente A bewiesen.

Aus Satz 4.1, (4) folgt $X \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$. Da die nilpotente Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ dann und nur dann primär ist, wenn ihr Zentrum $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ primär ist, so folgt aus Zusatz 4.2, (a):

$$X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X, \quad \text{wenn } \mathfrak{F}\mathfrak{N}X \text{ nicht primär ist.}$$

Wir nehmen weiter an, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ eine p-Gruppe ist. Dann folgt aus unserer Voraussetzung $X^p \neq 1$. Es gibt also in der p-Gruppe X ein Element t der Ordnung p^2. Anwendung von Lemma 2.1 zeigt, daß jedes Zentrumselement aus $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ [wegen $X \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$] in derselben Komponente wie t, also in X liegt. Also wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X \leqq X$. Da das Zentrum einer von 1 verschiedenen nilpotenten Gruppe ebenfalls von 1 verschieden ist, so ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X \neq 1$.

Bedenken wir, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ sind, so haben wir wieder gezeigt, daß X eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ enthält.

Nach dem eben Bewiesenen gibt es eine $1 < S \leqq X$ erfüllende charakteristische Untergruppe S von $\mathfrak{N}X$. Ist g ein Element aus $\mathfrak{N}\mathfrak{N}X$, so induziert g einen Automorphismus in $\mathfrak{N}X$, der alle charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ invariant läßt. Also wird

$$1 < S = S^g \leqq X \cap X^g.$$

Da aber X^g mit X Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $X = X^g$. Also gehört g zu $\mathfrak{N}X$; und wir haben $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ bewiesen.

BEMERKUNG 7.2. Ist G eine nicht-abelsche Gruppe und $G^p = 1$ für eine geeignete Primzahl p, so bildet die Gesamtheit σ aller zyklischen Untergruppen der Ordnung p von G eine normale Partition von G. Ist X eine Komponente von σ, so ist $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}X = G$ ist; und dies ist gleichwertig damit, daß X ein Normalteiler von G ist. Aus $G^p = 1$ und der Nicht-Kommutativität von G folgt aber, daß nicht alle zyklischen Untergruppen Normalteiler von G sind. Also gilt $\mathfrak{N}X = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$ nicht für alle Komponenten X von σ. Damit ist die Unentbehrlichkeit der zweiten Voraussetzung von Satz 7.1 bewiesen.

BEMERKUNG 7.3. Ist etwa G die alternierende Gruppe vom Grade 4, so enthält G einen elementar-abelschen Normalteiler K der Ordnung 4. Alle Elemente $\neq 1$ in K haben die Ordnung 2; und die nicht in K enthaltenen Elemente aus K haben die Ordnung 3. Weiter ist K der minimale Normalteiler von G. Eine normale Partition σ von G besteht aus den sämtlichen zyklischen Untergruppen $\neq 1$ von G. Ist X eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2, so ist $\mathfrak{N}X = K < G = \mathfrak{N}\mathfrak{N}X$; und dies zeigt, daß auch die dritte Voraussetzung von Satz 7.1 unentbehrlich ist.

Wir benötigen eine leichte Verschärfung von Satz 4.1, (4).

LEMMA 7.4. *Ist der Subnormalteiler S von G nicht nilpotent und σ eine Frobenius-Partition von G, so ist $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$ und $\sigma \cap S$ ist eine Frobenius-Partition von S.*

Hierbei werden wir [mit H. WIELANDT] unter einem Subnormalteiler von G ein jedes Glied einer Normalkette von G verstehen.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Untergruppen $S(i)$ von G mit $S=S(n)$, $S(i)$ ist ein echter Normalteiler von $S(i-1)$, $S(0)=G$. Da S in allen $S(i)$ enthalten und nicht nilpotent ist, so ist auch kein $S(i)$ nilpotent. — Wir machen nun die für $i=0$ erfüllte Induktionsannahme, daß, für ein gewisses i, $\sigma\cap S(i)$ eine Frobenius-Partition von $S(i)$ und $\mathfrak{F}G=\mathfrak{F}S(i)$ ist. Da der Normalteiler $S(i+1)$ von $S(i)$ nicht nilpotent ist, so ist er auch nicht in $\mathfrak{F}S(i)$ enthalten. Also können wir aus Satz 4.1, (4) schließen, daß

$$\mathfrak{F}S(i)\subseteqq S(i+1)$$

ist. Hieraus folgt sofort, daß $\mathfrak{F}S(i)$ als nilpotenter Normalteiler von $S(i+1)$ sogar in $\mathfrak{F}S(i+1)$ enthalten ist. Weiter ist $\mathfrak{F}S(i+1)$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers $S(i+1)$ ein nilpotenter Normalteiler von $S(i)$; und folglich ist $\mathfrak{F}S(i+1)\subseteqq\mathfrak{F}S(i)$. Also wird

$$\mathfrak{F}G=\mathfrak{F}S(i)=\mathfrak{F}S(i+1)<S(i+1)$$

wegen der Nicht-Nilpotenz von $S(i+1)$. Nach Voraussetzung gibt es eine normalisatorgleiche Komponente A von σ; und es folgt aus Satz 4.1, (2), daß A ein Komplement von $\mathfrak{F}G$ in G ist. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt nun

$$S(i+1)=\mathfrak{F}G\cdot[A\cap S(i+1)]=\mathfrak{F}S(i+1)\cdot[A\cap S(i+1)].$$

Wegen $\mathfrak{F}S(i+1)<S(i+1)$ ist dann $1\neq A\cap S(i+1)=B$ eine Komponente von $\sigma\cap S(i+1)$. Ist s ein Element aus dem Normalisator von B in $S(i+1)$, so wird

$$1<B=B^s\subseteqq A\cap A^s.$$

Da A^s mit A eine Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $A=A^s$; und s gehört zu $\mathfrak{N}A\cap S(i+1)=B$. Also ist B eine normalisatorgleiche Komponente der normalen Partition $\sigma\cap S(i+1)$ von $S(i+1)$; und diese ist also eine Frobenius-Partition. Damit ist unser induktiver Beweis vollendet.

Satz 7.5. *Ist σ eine normale Partition der Gruppe G und $\mathfrak{F}G$ eine p-Gruppe, ist S ein Subnormalteiler von G und $\sigma\cap S$ eine Frobenius-Partition von S, dann ist $\mathfrak{F}S=\mathfrak{F}G$.*

Beweis. Als charakteristische Untergruppe des Subnormalteilers S ist $\mathfrak{F}S$ ein nilpotenter Subnormalteiler von G. Daraus folgt bekanntlich, daß $\mathfrak{F}S$ in einem nilpotenten Normalteiler von G enthalten ist — man benutze etwa die Tatsache, daß $T\cap P$ eine p-Sylow-Untergruppe von T ist für jeden Subnormalteiler T von G und jede p-Sylow-Untergruppe P von G. Also ist $\mathfrak{F}S\subseteqq\mathfrak{F}G\cap S$. Andererseits ist $\mathfrak{F}G\cap S$ ein nilpotenter Normalteiler von S und also in $\mathfrak{F}S$ enthalten. Mithin wird

$$\mathfrak{F}S=S\cap\mathfrak{F}G.$$

Wäre $\mathfrak{F}S\neq\mathfrak{F}G$, so wäre $\mathfrak{F}G$ nicht in S enthalten und S wäre eine echte Untergruppe von $S\cdot\mathfrak{F}G$. Als Subnormalteiler von G ist S auch ein Subnormalteiler von $S\cdot\mathfrak{F}G$. Folglich ist S echte Untergruppe seines Normalisators $T=\mathfrak{N}S\cap S\cdot\mathfrak{F}G$ in $S\cdot\mathfrak{F}G$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt

$T=S(T\cap\mathfrak{F}G)$, so daß der nilpotente Normalteiler $T\cap\mathfrak{F}G$ von T nicht in S enthalten ist. Es ist sicherlich $T\cap\mathfrak{F}G\subseteqq\mathfrak{F}T$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt weiter $\mathfrak{F}T=(T\cap\mathfrak{F}G)(S\cap\mathfrak{F}T)$. Da $S\cap\mathfrak{F}T$ ein nilpotenter Normalteiler des Normalteilers S von T ist, so wird $S\cap\mathfrak{F}T\subseteqq\mathfrak{F}S=S\cap\mathfrak{F}G$; und hieraus folgt

$$\mathfrak{F}T=T\cap\mathfrak{F}G.$$

Mit $\mathfrak{F}G$ sind $\mathfrak{F}T$ und $\mathfrak{F}S$ also $\mathfrak{p}$-Gruppen.

Da $\sigma\cap S$ eine Frobenius-Partition von S ist, so folgt aus Satz 4.1, daß $\mathfrak{F}S$ eine eigentliche Hallsche, nilpotente, charakteristische, $(\sigma\cap S)$-zulässige Untergruppe von S ist, und daß die normalisatorgleichen Komponenten von $\sigma\cap S$ genau die Komplemente von $\mathfrak{F}S$ in S sind. Da $\mathfrak{F}S$ eine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist, so ist die gemeinsame Ordnung $[S:\mathfrak{F}S]$ dieser Komplemente zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd. Ist R irgendein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S, so ist $R\cap\mathfrak{F}T=1$, da $o(R)$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd und $\mathfrak{F}T$ eine $\mathfrak{p}$-Gruppe ist; und aus

$$T=S(T\cap\mathfrak{F}G)=R\cdot\mathfrak{F}S\cdot(T\cap\mathfrak{F}G)=R(S\cap\mathfrak{F}G)(T\cap\mathfrak{F}G)=R(T\cap\mathfrak{F}G)=R\cdot\mathfrak{F}T$$

folgt, daß alle Komplemente von $\mathfrak{F}S$ in S auch Komplemente von $\mathfrak{F}T$ in T sind, deren Ordnung zur Ordnung der $\mathfrak{p}$-Gruppe $\mathfrak{F}T$ teilerfremd ist.

Aus $\mathfrak{F}S=S\cap\mathfrak{F}G=S\cap T\cap\mathfrak{F}G=S\cap\mathfrak{F}T$ folgt, daß $\mathfrak{F}S$ ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{F}T$ ist, da ja S ein Normalteiler von $T=S\cdot\mathfrak{F}T$ ist. Da $\mathfrak{F}T$ nilpotent ist, so wird also $\mathfrak{F}S\cap\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T\neq1$. Folglich gibt es ein Element $z\neq1$ in $\mathfrak{F}S\cap\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$.

Sei jetzt x ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus S. Dann liegt x in einer Komponente X von $\sigma\cap S$. Da X nicht in der $(\sigma\cap S)$-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{F}S$ enthalten ist, so wird $X\cap\mathfrak{F}S=1$; und wir folgern aus Satz 4.1, daß X ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S ist. Also liegt jedes nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltene Element aus S in einem Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S, so daß insbesondere die Ordnung eines solchen Elements zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist.

Sei wieder x ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus S und $f\neq1$ ein mit x vertauschbares Element aus $\mathfrak{F}T$. Dann ist $o(x)$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd und $o(f)$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$. Es folgt aus Lemma 2.1, daß x und f in der gleichen Komponente W von σ liegen. Da z in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$ liegt, so sind z und f vertauschbar. Also sind auch zx und f vertauschbar. Da z in $\mathfrak{F}S$ liegt, x aber nicht, so ist zx ein nicht in $\mathfrak{F}S$ gelegenes Element aus S. Also ist auch $o(zx)$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd; da die Ordnung von f eine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, so folgt aus Lemma 2.1, daß zx und f in der gleichen Komponente von σ liegen. Wegen $f\neq1$ liegt also auch zx in W. Folglich enthält W die Elemente x, zx und z. Aus $1\neq x$ folgt, daß $W\cap S$ die eindeutig bestimmte Komponente von $\sigma\cap S$ ist, die x enthält. Diese ist, wie oben gezeigt, ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S, so daß $1=(W\cap S)\cap\mathfrak{F}S=W\cap\mathfrak{F}S$ wird. Andererseits gehört $z\neq1$ zu $W\cap\mathfrak{F}S$; und wir sind zu einem Widerspruch geführt worden. Also ist 1 das einzige Element aus $\mathfrak{F}T$, mit dem ein nicht in $\mathfrak{F}S$ enthaltenes Element aus S vertauschbar ist.

Ist R ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S, so ist R auch ein Komplement von $\mathfrak{F}T$ in T. Wir bilden den Normalisator $R^*=\mathfrak{N}R\cap T$ von R in $T=R\cdot\mathfrak{F}T$.

Aus dem Dedekindschen Modulsatz und $R \leqq R^* \leqq R \cdot \mathfrak{F}T$ folgt $R^* = R(R^* \cap \mathfrak{F}T)$. Ist t ein Element aus $R^* \cap \mathfrak{F}T$, so wird

$$t \circ R \leqq R \cap \mathfrak{F}T = 1,$$

da $\mathfrak{F}T$ als Normalteiler von T von den Elementen aus R normalisiert wird. Das einzige Element aus $\mathfrak{F}T$, das mit allen Elementen aus R vertauschbar ist, ist aber, wie oben gezeigt, die Eins. Also wird $t = 1$; und hieraus folgt $R^* \cap \mathfrak{F}T = 1$ und also $R = R^*$. Jedes Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S ist also gleich seinem Normalisator in T.

Ist R ein Komplement von $\mathfrak{F}S$ in S, so ist R eine Komponente von $\sigma \cap S$. Also gibt es eine und nur eine Komponente V von σ mit $R = S \cap V$. Ist $U = T \cap V$, so wird $R \leqq U \leqq R \cdot \mathfrak{F}T$; und wir folgern

$$U = R(U \cap \mathfrak{F}T) = R(V \cap \mathfrak{F}T) = R(U \cap \mathfrak{F}G)$$

aus dem Dedekindschen Modulsatz. Angenommen $U \cap \mathfrak{F}T$ wäre nicht gleich 1. Dann wäre, da ja z in $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}T$ liegt,

$$1 \neq U \cap \mathfrak{F}T = (U \cap \mathfrak{F}T)^z \leqq V \cap V^z.$$

Da V^z mit V eine Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $V = V^z$ und also

$$U^z = T^z \cap V^z = T \cap V = U.$$

Folglich liegt $z \circ R$ in U. Da aber z in der charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{F}S$ des Normalteilers S von T liegt, so liegt $z \circ R$ auch in $\mathfrak{F}S$. Es folgt, daß

$$z \circ R \leqq U \cap \mathfrak{F}S = U \cap S \cap \mathfrak{F}S = T \cap V \cap S \cap \mathfrak{F}S = T \cap R \cap \mathfrak{F}S = 1$$

wird. Das einzige Element aus $\mathfrak{F}S$, das mit allen Elementen aus R vertauschbar ist, ist aber die 1. Dieses widerspricht $z \neq 1$; und aus diesem Widerspruch folgt $U \cap \mathfrak{F}T \neq 1$ und also $U = R$. Damit haben wir gezeigt, daß $U = R$ eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap T$ ist, daß also auch $\sigma \cap T$ eine Frobenius-Partition ist.

Da $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von S ist, so ist S gewiß nicht nilpotent. S ist aber ein Normalteiler von T und $\sigma \cap T$ ist eine Frobenius-Partition von T. Anwendung von Lemma 7.4 zeigt, daß $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}T$ ist. Also wird

$$T = S(T \cap \mathfrak{F}G) = S \cdot \mathfrak{F}T = S \cdot \mathfrak{F}S = S \neq T;$$

und aus diesem Widerspruch folgt das gewünschte $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.

Zusatz 7.6. *Ist σ eine normale Partition und S ein Subnormalteiler der Gruppe G, ist $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von S, enthält $\mathfrak{F}S$ eine Komponente von σ, so ist $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.*

Beweis. Dies ist wegen Satz 7.5 sicher richtig, wenn $\mathfrak{F}G$ eine Primärgruppe ist. Ist aber $\mathfrak{F}G$ keine Primärgruppe, so ist auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ keine Primärgruppe; und es folgt aus Folgerung 2.3 die Existenz einer $\mathfrak{F}G$ enthaltenden

Komponente B von σ. Da S ein Subnormalteiler von G ist, so ist auch $\mathfrak{F}S$ ein nilpotenter Subnormalteiler von G; und als solcher ist $\mathfrak{F}S$ in $\mathfrak{F}G$ enthalten. Nach Voraussetzung gibt es eine in $\mathfrak{F}S$ enthaltene Komponente A von σ. Folglich wird

$$A \leqq \mathfrak{F}S \leqq \mathfrak{F}G \leqq B.$$

Da aber keine Komponente von σ echte Untergruppe einer anderen Komponente sein kann, so wird $A = B$ und also auch $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}G$.

BEMERKUNG 7.7. Sind p und q Primzahlen, ist p ein Teiler von $q-1$, so gibt es eine nicht-abelsche Gruppe S der Ordnung pq. Diese besitzt einen zyklischen Normalteiler Q der Ordnung q. Weiter sei G das direkte Produkt von S und einer zyklischen Gruppe Z der Ordnung p. Jedes nicht in QZ gelegene Element von G hat die Ordnung p; und QZ ist ein zyklischer Normalteiler der Ordnung pq von G. Eine normale Partition σ von G besteht dann aus $\mathfrak{F}G = QZ$ und den nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen der Ordnung p. Weiter ist S ein Normalteiler von G, $\sigma \cap S$ eine Frobenius-Partition von S, aber $\mathfrak{F}S = Q < \mathfrak{F}G$. Es genügt also nicht, in Satz 7.5 und Zusatz 7.6 zu fordern, daß σ eine normale Partition von G und S ein Subnormalteiler von G mit Frobenius-Partition $\sigma \cap S$ sei, daß vielmehr die hierüber hinausgehenden Voraussetzungen wirklich benötigt werden.

Literatur

BACHMANN, G.: Geometry in certain finite groups. Math. Z. **70**, 466–479 (1959).

BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd Edit. Cambridge 1911.

HALL jr., M.: The Theory of Groups. New York 1959.

HUGHES, D. R., and J. G. THOMPSON: The H_p-problem and the structure of the H_p-groups. Pac. J. of Math. **9**, 1097–1102 (1959).

KEGEL, O. H.: Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z. **75**, 373–376 (1961).

KONTOROWITSCH, P.: Sur la réprésentation d'un groupe fini sous la forme d'une somme directe de sous-groupes. Mat. Sbornik **5**, 283–296 (1939); **7**, 27–33 (1940).

SAH, C.: On a generalization of finite nilpotent groups. Math. Z. **68**, 189–204 (1958).

SUZUKI, M.:

[1] On the finite groups with a complete partition. J. Math. Soc. Japan **2**, 165–185 (1950).

[2] On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes. Amer. J. Math. **77**, 657–691 (1955).

[3] A new type of simple groups of finite order. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **46**, 868–870 (1960).

THOMPSON, J. G.:

[1] Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **45**, 578–581 (1959).

[2] Normal p-complements for finite groups. Math. Z. **72**, 332–354 (1960).

YOUNG, J. W.: On the partitions of a group and the resulting classifications. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 453–461 (1927).

ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Berlin u. Leipzig 1937.

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt a. M.

(Eingegangen am 22. November 1960)

KEGEL, O. H.
Math. Zeitschr. 75, 373–376 (1961)

Die Nilpotenz der H_p-Gruppen

Von
OTTO H. KEGEL

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [3] beschäftigen sich HUGHES und THOMPSON mit endlichen Gruppen, die einen Automorphismus s der Primzahlordnung p besitzen, der für alle $g \in G$ die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad g^{1+s+s^2+\cdots+s^{p-1}} = 1 \quad \text{erfüllt.}$$

Für diese Gruppen bewiesen sie ([3], Theorem 2 und 3) die folgende Strukturaussage:

($H-T$) Besitzt eine endliche Gruppe G einen Automorphismus s von Primzahlordnung p, der auf G die Gleichung (I) *erfüllt, und ist G keine p-Gruppe, so wird G bereits von all den Elementen erzeugt, deren Ordnungen ungleich p sind; G besitzt eine nilpotente, charakteristische Untergruppe K derart, daß G/K eine p-Gruppe ist und $(o(K), p) = 1$. — G ist also auflösbar.*

(Gruppen, die den Voraussetzungen der Aussage ($H-T$) genügen, werden in [3] mit H_p-Gruppen bezeichnet.)

In dieser Note soll gezeigt werden, daß man diesen Satz zugleich verschärfen und (trivial) verallgemeinern kann zu

SATZ 1. *Besitzt die endliche Gruppe G einen Automorphismus s von Primzahlordnung p, der für alle $g \in G$ die Gleichung* (I) *erfüllt, so ist G nilpotent.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz sei falsch; dann gibt es unter den endlichen Gruppen, die Gegenbeispiele bilden, eine Gruppe G von minimaler Ordnung. — Da G nicht nilpotent ist, also auch keine p-Gruppe, so gelten die Ergebnisse aus [3] für G; insbesondere gilt für die Untergruppe $G\{s\} = H$ des Holomorphs von G die Gleichung $[H:G] = p$, und jedes Element $x \in H$, $x \notin G$ hat die Ordnung p. G besitzt einen nilpotenten Normalteiler K, derart daß $(o(K), p) = 1$ und G/K eine p-Gruppe ist. — Sei P_1 eine p-Sylow-Gruppe von H, die s enthält.

a) *G besitzt eine s-zulässige p-Sylow-Gruppe P und ein s-invariantes Element der Ordnung p*; denn da G Normalteiler von H ist, so ist $G \cap P_1 = P$ eine p-Sylow-Gruppe von G, die als Normalteiler von P_1 natürlich s-zulässig ist. Es ist $P \neq 1$; denn sonst wäre $G = K$ nilpotent. Ist aber der Normalteiler P von P_1 ungleich 1, so enthält er auch Zentrumselemente ungleich 1 von P_1. Ein Zentrumselement der Ordnung p ist aber natürlich s-zulässig.

b) *Jede echte s-zulässige Untergruppe von G und jede Faktorgruppe von G nach einem s-zulässigen Normalteiler $\neq 1$ von G ist nilpotent*; denn auf beiden induziert s Automorphismen, die für alle Elemente die Gleichung (I) erfüllen und entweder die Ordnung p haben, oder die Identität sind. Erfüllt die Identität die Gleichung (I), so heißt das, daß jedes Element die Ordnung p hat, und die Nilpotenz folgt. Ist aber der von s induzierte Automorphismus von der Identität verschieden, so folgt die Aussage b) aus der Minimalität von G.

c) *Das Zentrum* $\mathfrak{Z}G = 1$; denn es ist s-zulässig. Eine Gruppe ist aber genau dann nilpotent, wenn ihre Zentrumsfaktorgruppe nilpotent ist. G ist nicht nilpotent, und daher folgt aus b), daß $\mathfrak{Z}G = 1$ ist.

d) *Die nilpotente, charakteristische Untergruppe K von G ist abelsch.* Andernfalls wäre $\mathfrak{Z}K \neq K$ und $P \cdot \mathfrak{Z}K$ wäre eine echte s-zulässige Untergruppe von G und daher nach b) nilpotent. Dann zentralisierte aber P auch $\mathfrak{Z}K$, so daß $\mathfrak{Z}K \subseteq \mathfrak{Z}G$. Wegen $K \neq 1$ ist $\mathfrak{Z}K \neq 1$, und c) führt also die Annahme $\mathfrak{Z}K \neq K$ zu einem Widerspruch.

e) *P ist zyklisch der Ordnung p.* Es gibt nach a) ein s-invariantes Element t der Ordnung p in P. Wäre nun $o(P) \neq p$, so wäre $K\{t\}$ eine echte s-zulässige Untergruppe von G und daher nach b) sogar nilpotent. Dann läge aber t im Zentralisator $\mathfrak{C}K$ von K, und es wäre $t \in \mathfrak{Z}G$, was wegen c) unmöglich ist.

f) *Es gibt ein nicht in K enthaltenes Element w von G mit* $o(w) \neq p$. Die Gruppe G ist nach dem Struktursatz $(H-T)$ von Elementen der Ordnung ungleich p erzeugt. Gäbe es nun kein solches w, so wäre $G = K$, was der Aussage $P \neq 1$ widerspricht.

Nun ist $w^p = k \neq 1$ ein Element aus K, und w hat die Form $w = kg = gk$ mit $o(g) = p$. Aus d) und e) ergibt sich dann, daß $k \in \mathfrak{Z}G$ ist. Dies ist aber wegen c) unmöglich. — Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches G geben kann. Damit ist Satz 1 bewiesen.

BEMERKUNG. Satz 1 verallgemeinert einen Satz von THOMPSON ([4], Theorem 1), der besagt, daß eine Gruppe G nilpotent ist, wenn sie einen Automorphismus s von Primzahlordnung besitzt, der keine Fixelemente $\neq 1$ in G hat; denn eine solche Gruppe ist in der Untergruppe $H = G\{s\}$ des Holomorph von G von allen Elementen von H erzeugt, deren Ordnung ungleich $o(s)$ ist. Aus ([3], Theorem 2) folgt dann, daß s die Gl. (I) für alle Elemente $g \in G$ erfüllt.

Dagegen genügt es nicht, um auf die Nilpotenz von G schließen zu können, daß man von dem Automorphismus s von Primzahlordnung p nur fordert, daß seine Fixelemente in G höchstens p-Potenzordnung haben. Dies zeigt die nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6. Daß man unter dieser schwachen Voraussetzung nicht auf die Auflösbarkeit von G schließen kann, zeigt die einfache Gruppe der Ordnung 60.

Als Anwendung von Satz 1 ergibt sich eine recht scharfe Aussage über die Struktur der Komponenten einer nicht-trivialen Partition einer endlichen Gruppe G. — Dabei verstehen wir unter einer *nicht-trivialen Partition* π *von G eine Menge* (A_i) nicht-trivialer Untergruppen A_i von G derart, daß jedes

Element $g \neq 1$ aus G in genau einem der A_i liegt. Die Untergruppen A_i nennt man die *Komponenten* der Partition π von G. Eine ausführliche Diskussion nicht-trivialer Partitionen findet man bei BAER [1]. Eine Untergruppe $U \neq 1$ von G nennen wir *π-zulässig*, wenn jede Komponente von π entweder ganz in U enthalten ist, oder aber kein Element $\neq 1$ mit U gemein hat.

Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 2. *Ist π eine nicht-triviale Partition der endlichen Gruppe G, und ist $U \neq G$ eine π-zulässige Untergruppe von G, dann ist entweder $U = \mathfrak{N}U$, oder aber U ist nilpotent.* Dabei bedeutet $\mathfrak{N}U$ den Normalisator von U in G.

BEWEIS. Nimmt man $U < \mathfrak{N}U$ an, dann betrachte man die von π in $\mathfrak{N}U$ induzierte Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ (ihre Komponenten sind die Durchschnitte von $\mathfrak{N}U$ mit den Komponenten A_i von π, die $A_i \cap \mathfrak{N}U \neq 1$ erfüllen). Ausgehend von der nicht-trivialen Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ von $\mathfrak{N}U$ definieren wir nun eine (i.a. von $\pi \cap \mathfrak{N}U$ verschiedene) nicht-triviale Partition τ von $\mathfrak{N}U$: Jede Komponente von $\pi \cap \mathfrak{N}U$, die mit U kein Element $\neq 1$ gemein hat, ist Komponente von τ; U selbst ist Komponente von τ. — Es ist klar, daß hierdurch die Partition τ eindeutig definiert ist.

Aus $U \neq \mathfrak{N}U$ und der Nicht-Trivialität von τ folgt die Existenz von Elementen in $\mathfrak{N}U$, die nicht in U liegen und deren Ordnung eine Primzahl ist ([1], Lemma 2.1). Ist nun g ein solches Element, so folgt aus ([1], Lemma 2.1), daß jedes Element aus $U\{g\}$, das nicht in U liegt, die Ordnung p hat; denn es liegt in einer Komponente $\neq U$ von τ. Dann liegt aber die Gruppe $H_p(U\{g\})$, die von allen Elementen von $U\{g\}$ erzeugt wird, deren Ordnung ungleich p ist, in dem Normalteiler U von $U\{g\}$.

Wäre nun U nicht nilpotent, also insbesondere keine p-Gruppe, dann besagt ([3], Theorem 1), daß $[U\{g\} : H_p(U\{g\})] = p$ ist, also $H_p(U\{g\}) = U$. Nach ([3], Theorem 2) besitzt U aber dann einen Automorphismus der Ordnung p (z. B. den von g induzierten), der die Gl. (I) erfüllt. Dann folgt aber aus Satz 1 die Nilpotenz von U. Das wäre ein Widerspruch. — Also ist U nilpotent, und der Satz ist bewiesen.

BEMERKUNG. Ist $U = \mathfrak{N}U$, so scheint es schwer, etwas über die Struktur von U auszusagen. — Ist aber U eine Komponente von π und ist mit U auch jede zu U konjugierte Untergruppe von G eine Komponente von π (in Analogie zu [1] könnte man sagen, π ist *normal bezüglich der Komponente U*), so kann man aus einem Ergebnis von BURNSIDE ([2], p. 334–335) folgern, daß keine p-Sylow-Gruppe von U für $p \mid o(U)$ eine nicht-zyklische elementarabelsche Untergruppe enthält. — Da man zu einem solchen U eine nicht-triviale Partition von G konstruieren kann (nach FROBENIUS), die außer U und seinen Konjugierten nur noch eine Komponente besitzt (also eine Frobenius-Partition, die sogar Hallsch ist), so findet man weitere Auskunft über die Struktur solcher U in ([1], Kapitel 4). Insbesondere gestattet ein solches U selbst keine nicht-triviale Partition.

Hat man anstelle des Struktursatzes von HUGHES und THOMPSON den Satz 1 zur Verfügung, so vereinfachen sich in [1] einige Beweise, und einige

Sätze lassen sich schärfer fassen. Dies ist insbesondere an den Stellen von [1] der Fall, an denen π-zulässige Normalteiler $\neq G$ von G betrachtet werden. So zeigt Satz 2, daß die Voraussetzungen von ([1], Lemma 3.3) nicht erfüllt werden können, denn ein π-zulässiger Normalteiler $K \neq G$ ist nilpotent.

Literatur

[1] BAER, R.: Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
[2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition. Cambridge 1911.
[3] HUGHES, D. R., and J. G. THOMPSON: The H_p-problem and the structure of H_p-groups. Pac. J. Math. **9**, 1097—1102 (1959).
[4] THOMPSON, J. G.: Finite groups with fix-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sciences (USA) **45**, 578—581 (1959).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 24. Dezember 1960)

SCHOCH, M.
Math. Zeitschr. 75, 377–384 (1961)

Integration einer Klasse linearer Differentialgleichungen[1])

Von
MANFRED SCHOCH

1. Problemstellung

In dieser Untersuchung soll für die Klasse der Differentialgleichungen

$$y^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x)\,y(x)\right]^{(i)}=f(x) \tag{1}$$

die allgemeine Lösung bestimmt werden. Die freie Funktion $f(x)$ sei dabei in einem Intervall $[x_0, x_1]$ stetig. Das Polynom

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j x^j \tag{2}$$

höchstens $(n-1)$-ten Grades und die Funktion $Q(x)$ sollen so beschaffen sein, daß im Intervall $[x_0, x_1]$ die Ausdrücke

$$\frac{P^{(n-i-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x);\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

jeweils i-mal stetig differenzierbar sind.

Schreiben wir die Differentialgleichung (1) in der Form

$$y^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}b_i(x)\,y^{(i)}(x)=f(x), \tag{1'}$$

dann lauten die Koeffizienten von $y^{(i)}(x)$

$$b_i(x)=\sum_{j=i}^{n-1}\binom{j}{i}\left[\frac{P^{(n-j-1)}(x)}{P(x)}\,Q(x)\right]^{(j-i)};\quad i=0,1,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Diese Koeffizienten sind auf Grund der Voraussetzungen über $F(x)$ und $Q(x)$ in $[x_0, x_1]$ sicher i-mal stetig differenzierbar.

2. Überführung der Differentialgleichung (1) in eine Volterrasche Integralgleichung

Nach einem Verfahren, das von KNESCHKE [1] entwickelt wurde, lassen sich gewisse Randwertaufgaben für Differentialgleichungen der Gestalt (1) in

[1]) Über die folgenden Ergebnisse wurde schon zur GAMM-Tagung 1960 in Freiberg/Sa. kurz berichtet.

zu ihnen äquivalente Integralgleichungen überführen[2]). Dabei benutzt man jeweils ein den Randbedingungen entsprechendes Interpolationstheorem und wendet auf die Differentialgleichung einen Integraloperator an, der im wesentlichen durch die Interpolationspolynome bestimmt ist. Nach mehrfacher partieller Integration und einigen Umformungen erhält man dann eine der Randwertaufgabe äquivalente Integralgleichung. Ein besonderer Vorteil dieses Verfahrens ist, daß bei seiner Anwendung weder ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung verwendet wird noch ein anderes Randwertproblem zu lösen ist.

In dem einfachen Fall der Anfangswertaufgabe erhalten wir als Äquivalent eine Volterrasche Integralgleichung mit ausgeartetem Kern. Als zugehöriges Interpolationstheorem tritt hier die Taylorsche Formel

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\,y^{(j)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n)}(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

auf, während der auf die Differentialgleichung anzuwendende Integraloperator jetzt

$$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\cdots d\xi \tag{5}$$

ist. Im allgemeinen stimmt der Rang des Kernes der Volterraschen Gleichung mit der Ordnung der Differentialgleichung überein. Wir werden jedoch feststellen, daß sich in unserem Falle der Rang auf eins reduziert.

Wir denken uns die Differentialgleichung (1) durch die Anfangsbedingungen

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

mit völlig beliebigen Zahlen $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ zu einem Anfangswertproblem ergänzt und wenden auf die in der Variablen ξ geschriebene Differentialgleichung (1)

$$y^{(n)}(\xi)+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]^{(i)}=f(\xi)$$

den Operator (5) an. Dadurch ergibt sich

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n)}(\xi)\,d\xi+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]^{(i)}d\xi\\ \qquad=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(\xi)\,d\xi.\end{cases} \tag{6}$$

Mehrfache partielle Integration liefert

$$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n)}(\xi)\,d\xi=y(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\,y^{(n-j-1)}(x_0) \tag{7}$$

[2]) Dieses Verfahren wurde hinsichtlich der Randbedingungen erweitert [2], [3].

und

$$(8)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]^{(i)} d\xi = -\sum_{j=0}^{i-1} \frac{(x-x_0)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \times \\ \times \left[\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\right]_{\xi=x_0}^{(i-j-1)} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,\frac{P^{(n-i-1)}(\xi)}{P(\xi)}\,Q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi . \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (6) die Integralgleichung

$$(9)\quad y(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,P^{(n-i-1)}(\xi)\right\} y(\xi)\,d\xi = F(x),$$

wobei die freie Funktion $F(x)$ die Gestalt

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i \frac{(x-x_0)^{i-1}}{(i-1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(\xi)\,d\xi$$

bzw.

$$(10)\quad F(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i x^{i-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(\xi)\,d\xi$$

besitzt. Wegen der ausgeführten partiellen Integrationen treten in $F(x)$ ursprünglich die frei wählbaren Größen $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ auf, die durch Umordnen die willkürlichen Konstanten $\overline{C}_i$ bzw. C_i erzeugen. Die in (9) unter dem Integralzeichen auftretende Summe ist gerade die Taylor-Entwicklung von $P(x)$ an der Stelle ξ, es gilt also

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,P^{(n-i-1)}(\xi) = P(x).$$

Aus (9) ergibt sich somit

$$(11)\quad y(x) + P(x) \int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,y(\xi)\,d\xi = F(x).$$

Dies ist eine Volterrasche Integralgleichung mit ausgeartetem Kern vom Rang eins. Nach unseren Voraussetzungen sind die Funktionen $P(x)$ und

$$(12)\quad R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

im Intervall $[x_0, x_1]$ stetig.

3. Lösung der Integralgleichung (11)[3])

Die Lösung der Integralgleichung (11) hat für $x_0 \leqq x \leqq x_1$ die Gestalt[4])

$$(13)\quad y(x) = F(x) - \int_{x_0}^{x} L(x,\xi)\,F(\xi)\,d\xi .$$

[3]) Das folgende Lösungsverfahren läßt sich auf jede Integralgleichung

$$y(x) + A(x) \int_{a}^{x} B(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = g(x)$$

mit stetigen A, B und g anwenden.

[4]) Siehe [4], S. 243 ff.

Dabei ist die Resolvente $L(x,\xi)$ durch

$$L(x,\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}K^{(\nu)}(x,\xi) \tag{14}$$

mit

$$\begin{cases} K^{(0)}(x,\xi)=P(x)\,R(\xi), \\ K^{(\nu)}(x,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}K^{(0)}(x,t)\,K^{(\nu-1)}(t,\xi)\,dt; \quad \nu=1,2,\dots \end{cases} \tag{15}$$

gegeben.

Wir behaupten, daß in unserem Falle

$$K^{(\nu)}(x,\xi)=\frac{P(x)\,R(\xi)}{\nu!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu}; \quad \nu=0,1,2,\dots \tag{16}$$

gilt. Für $\nu=0$ ist die Behauptung trivial. Unter der Annahme

$$K^{(\nu-1)}(x,\xi)=\frac{P(x)\,R(\xi)}{(\nu-1)!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu-1}; \quad \nu\geqq 1$$

beweisen wir die Gültigkeit von (16) für $K^{(\nu)}(x,\xi)$. Nach (15) ist

$$K^{(\nu)}(x,\xi)=\frac{P(x)\,R(\xi)}{(\nu-1)!}\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t}P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1}dt. \tag{17}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t}P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1}dt=\left\{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu}-$$

$$-(\nu-1)\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t}P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1}dt,$$

und daraus folgt

$$\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\left\{\int\limits_{\xi}^{t}P(z)\,R(z)\,dz\right\}^{\nu-1}dt=\frac{1}{\nu}\left\{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)R(t)\,dt\right\}^{\nu}.$$

Damit ergibt sich aus (17) die Behauptung (16).

Durch Einführen von (16) in (14) erhält die Resolvente die Form

$$L(x,\xi)=P(x)\,R(\xi)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left\{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\,dt\right\}^{\nu}.$$

Die hierin auftretende Reihe hat die Summe

$$e^{\int\limits_{\xi}^{x}P(t)\,R(t)\,dt}$$

so daß

$$L(x,\xi) = P(x)\,R(\xi)\,e^{\int_{\xi}^{\xi} P(t)\,R(t)\,dt} \tag{18}$$

gilt. Nach (14) lautet also die Lösung von (11)

$$y(x) = F(x) - P(x)\int_{x_0}^{x} R(\xi)\,e^{\int_{\xi}^{\xi} P(t)\,R(t)\,dt} F(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

4. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1)

In (19) führen wir jetzt die durch (10) gegebene von den willkürlichen Konstanten C_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ abhängige Funktion $F(x)$ ein und ersetzen $R(x)$ gemäß (12). Dadurch ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \left\{ x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_{\xi}^{\xi} Q(t)\,dt}\,\xi^{i-1}\,d\xi \right\} + \\ + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(\xi)\,d\xi - P(x)\int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_{\xi}^{\xi} Q(t)\,dt} \left\{ \int_{x_0}^{\xi} \frac{(\xi-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(z)\,dz \right\} d\xi. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Potenzen x^{i-1} sind auch die Funktionen

$$y_i(x) = x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_{\xi}^{\xi} Q(t)\,dt}\,\xi^{i-1}\,d\xi; \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

die in (20) als Faktoren bei den Konstanten C_i auftreten, linear unabhängig. Aus

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,y_i(x) = 0 \tag{21}$$

folgt nämlich

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,x^{i-1} - P(x)\int_{x_0}^{x} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_{\xi}^{\xi} Q(t)\,dt} \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i\,\xi^{i-1} \right\} d\xi = 0. \tag{22}$$

Als homogene Volterrasche Integralgleichung zweiter Art für $\sum_{i=1}^{n} q_i x^{i-1}$ besitzt (22) nur die triviale Lösung

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\,x^{i-1} \equiv 0,$$

weshalb (21) nur für $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ gelten kann.

Wegen der Äquivalenz zwischen den Problemen (1) und (11) löst die durch (20) gegebene Funktion $y(x)$ mit der Integralgleichung (11) auch die Differentialgleichung (1). Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $y_i(x)$ und weil die Konstanten C_i völlig beliebig sind, bilden die $y_i(x)$ ein Fundamentalsystem der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung,

während die Funktion

$$\eta(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)\,d\xi-P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\,e^{\int_x^{\xi}Q(t)\,dt}\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{(\xi-z)^{n-1}}{(n-1)!}f(z)\,dz\right\}d\xi$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. In (20) haben wir somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) gefunden.

5. Beispiele

Zum Schluß wollen wir durch spezielle Wahl von $P(x)$, $Q(x)$ und von n noch einige Beispiele angeben.

BEISPIEL 1. Wenn $P(x)=$ konst. ist, dann erhalten wir aus (1)

$$y^{(n)}(x)+[Q(x)\,y(x)]^{(n-1)}=f(x). \tag{23}$$

Aus (20) ergibt sich nach partieller Integration und Umbenennung der Konstanten als Lösung von (23) für $n\geqq 2$

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=C_1\,e^{-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,dt}+\sum_{i=2}^{n}C_i\int_{x_0}^{x}e^{\int_x^{\xi}Q(t)\,dt}\,\xi^{i-2}\,d\xi+\\ &\quad+\int_{x_0}^{x}e^{\int_x^{\xi}Q(t)\,dt}\left\{\int_{x_0}^{\xi}\frac{(\xi-z)^{n-2}}{(n-2)!}f(z)\,dz\right\}d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Im Falle $n=1$ erhalten wir

$$y(x)=C_1\,e^{-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x}e^{\int_x^{\xi}Q(t)\,dt}f(\xi)\,d\xi. \tag{24'}$$

Für $n=2$ und $Q(x)=k\,x^{q-1}$ $(q\neq 0)$ liegt die Differentialgleichung

$$y''(x)+\left[k\,x^{q-1}\,y(x)\right]'=f(x)$$

bzw.

$$y''(x)+k\,x^{q-1}\,y'(x)+k(q-1)\,x^{q-2}\,y(x)=f(x) \tag{25}$$

vor. Nach (24) lautet ihre Lösung

$$y(x)=D_1\,e^{-\frac{k}{q}x^q}+D_2\,e^{-\frac{k}{q}x^q}\int_{x_0}^{x}e^{\frac{k}{q}\xi^q}\,d\xi+e^{-\frac{k}{q}x^q}\int_{x_0}^{x}e^{\frac{k}{q}\xi^q}\left\{\int_{x_0}^{\xi}f(z)\,dz\right\}d\xi. \tag{26}$$

BEISPIEL 2. Ist speziell $P(x)=a_{n-1}x^{n-1}$, dann ergibt sich aus (1) vorerst

$$y^{(n)}(x)+[Q(x)\,y(x)]^{(n-1)}+\sum_{i=0}^{n-2}\left[\frac{(x^{n-1})^{(n-i-1)}}{x^{n-1}}\,Q(x)\,y(x)\right]^{(i)}=f(x).$$

Die hierin auftretende Summe bezeichnen wir mit S_1 und erhalten nach Ausführen der inneren Differentiation

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-2}(n-1)\dots(i+1)\left[\frac{1}{x^{n-i-1}}\,Q\,y\right]^{(i)}$$

oder

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1)\dots(i+1) \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left[\frac{1}{x^{n-i-1}}\right]^{(i-j)} [Q\,y]^{(j)}.$$

Durch Abspalten der Glieder für $j=i$ und Vertauschen der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-1)\dots(i+1)}{x^{n-i-1}} [Q\,y]^{(i)} + \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1}{x^{n-j-1}} [Q\,y]^{(j)} \sum_{i=j+1}^{n-2} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \times$$
$$\times (n-1)\dots(i+1)(n-i-1)\dots(n-j-2).$$

Die innere Summe bezeichnen wir mit S_2 und verschieben den Summationsindex gemäß $i-j=\tau$, dann wird

$$S_2 = \sum_{\tau=1}^{n-j-2} (-1)^{\tau} \binom{\tau+j}{j} (n-1)\dots(\tau+j+1)(n-\tau-j-1)\dots(n-j-2).$$

Wegen

$$\binom{\tau+j}{j}(n-1)\dots(\tau+j+1)(n-\tau-j-1)\dots(n-j-2)$$
$$= (n-1)\dots(j+1)\binom{n-j-2}{\tau}$$

gilt

$$S_2 = (n-1)\dots(j+1)\left\{\sum_{\tau=0}^{n-j-2} (-1)^{\tau}\binom{n-j-2}{\tau} - 1\right\} = -(n-1)\dots(j+1).$$

Wir erhalten also

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-1)\dots(i+1)}{x^{n-i-1}} [Q\,y]^{(i)} - \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(n-1)\dots(j+1)}{x^{n-j-1}} [Q\,y]^{(j)} = \frac{n-1}{x} [Q\,y]^{(n-2)},$$

so daß jetzt (1) in

$$y^{(n)}(x) + [Q(x)\,y(x)]^{(n-1)} + \frac{n-1}{x} [Q(x)\,y(x)]^{(n-2)} = f(x) \tag{27}$$

übergeht. Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus (20) nach partieller Integration und Umbenennung der Konstanten

$$\left\{\begin{aligned} y(x) = {} & C_1 x^{n-1} e^{-\int_{x_0}^{x} Q(t)\,dt} + \sum_{i=2}^{n} C_i x^{n-1} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} Q(t)\,dt} \frac{1}{\xi^{n-i+2}}\,d\xi + \\ & + x^{n-1} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} Q(t)\,dt} \frac{1}{\xi^{n}} \left\{\int_{x_0}^{\xi} \frac{(\xi-z)^{n-2}}{(n-2)!} z f(z)\,dz\right\} d\xi. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Für $n=2$ und $Q(x)=k x^{q-1}$ $(q \neq 0)$ liegt jetzt die Differentialgleichung

$$y''(x) + [k x^{q-1} y(x)]' + \frac{1}{x} [k x^{q-1} y(x)] = f(x)$$

bzw.

$$y''(x) + k x^{q-1} y'(x) + k q x^{q-2} y(x) = f(x) \tag{29}$$

vor. Aus (28) erhalten wir die Lösung von (29) zu

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} y(x) = D_1\, x\, e^{-\frac{k}{q}x^q} + D_2\, x\, e^{-\frac{k}{q}x^q} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{k}{q}\xi^q} \frac{1}{\xi^2}\, d\xi + \\ + x\, e^{-\frac{k}{q}x^q} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{k}{q}\xi^q} \frac{1}{\xi^2} \left\{ \int_{x_0}^{\xi} z\, f(z)\, dz \right\} d\xi . \end{aligned}\right.$$

Für die beiden Differentialgleichungen (25) und (29) wird von KAMKE [5] je eine partikuläre Lösung der homogenen Gleichung angegeben.

Literatur

[1] KNESCHKE, A.: Wechselbeziehungen zwischen Differentialgleichungen und Integralgleichungen (1. u. 2. Mitteilung), Dtsch. Math. **5** (1941); **6** (1942).

[2] SCHOCH, M.: Überführung gewisser differentieller Randwertaufgaben in lineare Integralgleichungen. Dissertation, Freiberg 1959.

[3] SCHOCH, M., u. A. KNESCHKE: Verfahren zur Überführung gewisser differentieller Randwertprobleme in lineare Integralgleichungen. J. reine u. angew. Mathematik 203 (1960).

[4] SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. I. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1950.

[5] KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1956.

Institut für Angewandte Mathematik der Bergakademie Freiberg (Sachsen)

(Eingegangen am 28. Juli 1960)

SHAH, S. M.
Math. Zeitschr. 75, 385—391 (1961)

On Exceptional Values and the Genus of a meromorphic Function

By
S. M. SHAH[1])

1. Introduction

Let $f(z)$ be a meromorphic function of integer order ϱ and denote by $g(f)$ the genus of $f(z)$. R. NEVANLINNA conjectured [2, p. 106] that if

$$g(f') < g(f) \tag{1.1}$$

then

$$\Delta(f) \equiv \Sigma\,\delta(a,f) = 2. \tag{1.2}$$

A. EDREI and S. M. SHAH [1] constructed an entire function $f(z)$, with

$$\Delta(f) = 1, \tag{1.3}$$

to disprove this conjecture. We construct here a meromorphic function $f(z)$ for which (1.1) is true and

$$\Delta(f) = 0. \tag{1.4}$$

We also construct a class of functions for which NEVANLINNA's conjecture holds and another class of functions for which it does not hold.

2. G-exceptional values

Let $(z_n(x))$ denote the zeros of $f(z)-x$. If (i) $f(z)$ is of divergence class order ϱ and (ii) $\sum_1^\infty |z_n(x)|^{-\varrho} < \infty$ then x is called a G exceptional value (e.v.). Further, by the factorization theorem

$$f(z) = z^k \exp(q(z)) \prod_1^\infty E\left(z/z_n(0), p_1\right) \Big/ \prod_1^\infty E\left(z/z_n(\infty), p_2\right), \tag{2.1}$$

where $q(z) = cz^\varrho + \cdots$ is a polynomial of degree $p_3 \leqq \varrho$, and $c=0$ when $p_3 < \varrho$. The genus $g(f)$ is equal to $\max(p_1, p_2, p_3)$, and $\varrho - 1 \leqq g(f') \leqq g(f) \leqq \varrho$. If $g(f') < g(f)$ then $f(z)$ is zero type order ϱ and divergence class. We shall denote by D the class of meromorphic functions of zero type order ϱ and divergence class, and by E the class of functions for which (1.1) holds.

[1]) Sponsored by the United States Army under Contract No. DA-11-022-ORD-2059. Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison.

3. A Function with properties (1.1) and (1.4)

Theorem 1. *There exists a meromorphic function $f(z)\in E$ for which $\Delta(f)=0$.*

Proof. Let

$$x_1=10,\quad y_n=x_n^{n+1},\quad t_n=10\,y_n^{n+1},\quad x_{n+1}=\{(t_n)!\}!,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\varphi(z)=g(z)/h(z),\quad g(z)=\prod_1^\infty(1-z/a_n),\quad h(z)=\prod_1^\infty(1+z/b_n)$$

where $a_n>0$, $b_n>0$, $n=1,2,\ldots$ and are given by the functions $n(x,1/g)$ and $n(x,1/h)$ defined below.

$$\begin{aligned}
n(x,1/g)&=0,\quad x<x_2\\
&=[x/\log^2 x],\quad x_n\leqq x<y_n\\
&=[y_n/\log^2 y_n],\quad y_n\leqq x<t_n\\
&=[x^{\frac12}],\quad t_n\leqq x<x_{n+1},\quad n=2,3,\ldots\\
n(x,1/h)&=0,\quad x<t_2\\
&=[x^{\frac12}],\quad t_{2n}\leqq x<(\log x_{2n+1})^2\equiv X_n\\
&=[X_n^{\frac12}],\quad X_n\leqq x<t_{2n+1}\\
&=[x^{\frac12}],\quad t_{2n+1}\leqq x<(\log x_{2n+2})^2\equiv Z_n\\
&=[Z_n^{\frac12}],\quad Z_n\leqq x<t_{2n+2};\quad n=1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

Then $g(z)$ and $h(z)$ are functions of order 1 and $\frac13$ respectively. Further

$$\int_1^\infty r^{-2}\log M(r,g)\,dr>\tfrac12\int_{x_n}^{y_n}dt/t\log t\to\infty$$

with n, and so g and φ belong to the class of divergence order 1. Further [6, pp. 80–83] in the range (3.1)

$$\exp\{(\log t_n)^2\}\leqq r\leqq\log x_{n+1},\tag{3.1}$$

$$T(r,g)\sim 4r^{\frac12};$$

and in the range (3.2)

$$\exp\{(\log t_{2n})^2\}\leqq r\leqq\log x_{2n+1},\tag{3.2}$$

$$T(r,h)\sim 5r^{\frac12};\quad T(r,\varphi)\sim T(r,g)\sim N(r,1/\varphi).$$

In the range (3.3)

$$\exp\{(\log t_{2n+1})^2\}\leqq r\leqq\log x_{2n+2},\tag{3.3}$$

$$T(r,\varphi)\sim T(r,h)\sim 3r^{\frac12}\sim N(r,\varphi).$$

Hence $\delta(0,\varphi)=\delta(\infty,\varphi)=0$. Further $\varphi(z)$ has 0 and ∞ as G e.v. and belongs to the class of divergence and so it cannot have any N e.v., and $\Delta(\varphi)=0$. Let

$$F(z)=\varphi(z^\varrho),\quad f(z)=F(z)+a,\quad a\neq 0.$$

Then $F(z)$ is a meromorphic function of order ϱ zero type, divergence class and $g(F')=g(F)=\varrho-1$, $\Delta(F)=0$. Hence $f(z)\in E$ and $\Delta(f)=0$.

4. Functions with properties (1.1) and (1.2)

Let $f(z) \in D$. Then $N(r) = N(r, 1/f) + N(r, f)$ is of order ϱ and $N(r) = o(r^{\varrho})$. Denote by $\varrho(r)$ a proximate order of $N(r)$ [3; 4, p. 448]. If in (2.1), $p_1 = p_2 = \varrho$ then we can prove that

$$T(r, f) = \frac{r^{\varrho}}{\varrho \pi} \left| c\,\varrho + \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| \leq r} b_n^{-\varrho} \right| + O(r^{\varrho(r)}), \tag{4.1}$$

where $z_n(0) = a_n$, $z_n(\infty) = b_n$ and $c = 0$ if $p_3 < \varrho$.

If $\min(p_1, p_2) < \varrho$ then we obtain similarly

$$T(r, f) = \frac{r^{\varrho}}{\varrho \pi} \left| \sum_{|a_n| > r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| > r} b_n^{-\varrho} \right| + O(r^{\varrho(r)}), \tag{4.2}$$

where the terms involving b_n disappear, if f has no poles.

Suppose now that $f(z)$ satisfies the conditions

$$\max(p_1, p_2) = \varrho - 1, \tag{4.3}$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{\varrho - \varrho(r)} \left| \sum_{|a_n| > r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| > r} b_n^{-\varrho} \right| = \infty; \tag{4.4}$$

then from (4.2) and (4.4) we have $\delta(0, f) = \delta(\infty, f) = 1$. If we write $h(z) = f(z) + a$, $a \neq 0$, then

$$g(h') < g(h), \quad \Delta(h) = 2.$$

Example. Let [2, pp. 18—19]

$$f(z) = \prod_{2}^{\infty} E(z/a_n, \varrho - 1), \quad a_n = -\{n(\log n)^{\alpha}\}^{1/\varrho}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Then for $f(z) + a$, $a \neq 0$, NEVANLINNA'S conjecture holds.

5. Functions with properties (1.1) and (1.3)

Let $f(z) \in D$ and satisfy the conditions (4.3), (5.1):

$$\delta(0, f) = 0. \tag{5.1}$$

Let $h(z) = f(z) + a$, $a \neq 0$. Then since $f(z)$ has 0 and ∞ as G e.v. it cannot have any N e.v. other than ∞. Hence

$$g(h') < g(h), \quad \Delta(h) \leq 1. \tag{5.2}$$

If we now take $f(z)$ to be an entire function or a meromorphic function with $N(r, f)$ of sufficiently slow growth, then for $h(z) = f(z) + a$, we will have (5.2) with equality sign in the last relation of (5.2).

6. Functions with no finite G e.v.

If $f(z) \in D$ and $g(f + a) = \varrho$ for every (finite) a, then is it true that $g(f') = \varrho$? This question was raised by G. VALIRON [5, p. 443]. We give here an entire function $f(z)$ of order 2 satisfying the above hypothesis and such that $g(f') < 2$.

We also give a function $F(z) \in D$ such that $F(z)$ and $F'(z)$ have no G e.v. and $\Delta(F) = 2$.

(i) Let[2])

$$f'(z) = \prod_{2}^{\infty} \{1 + z^2/n(\log n)^{\alpha}\}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Then $g(f') = 1$, $\varrho = 2$, $f'(z) \in D$ and it can be shown by considering the behaviour of $f'(z)$ and $f(z) + a$ in sectors

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

that $g(f + a) = 2$ for every a.

(ii) We require two lemmas.

Lemma 1[3]). *If $\theta_1, \theta_2, \ldots$ denote given real numbers such that for each i, $|\theta_i| \leqq 1$, then it is possible to choose $\varepsilon_k = 1$ or -1 $(k = 1, 2, \ldots)$ such that for each positive integer n,*

$$-2 \leqq \sum_{1}^{n} \varepsilon_k - \sum_{1}^{n} \theta_k \leqq 2. \tag{6.1}$$

Proof. Choose $\varepsilon_1 = 1$. Then $-2 \leqq \varepsilon_1 - \theta_1 \leqq 2$. Let m be a positive integer. Assume that we have chosen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ each equal to 1 or -1 in such a way that (6.1) holds for $n = 1, 2, \ldots, m-1$. Now we choose ε_m equal to 1 or -1 in such a way that (6.1) holds also for $n = m$. Write

$$S_n = \sum_{1}^{n} \varepsilon_k - \sum_{1}^{n} \theta_k.$$

According to (6.1) applied with $n = m-1$, we have

$$-2 \leqq S_{m-1} \leqq 2.$$

If $0 \leqq S_{m-1} \leqq 2$, then we choose $\varepsilon_m = -1$ so that

$$S_m = S_{m-1} - 1 - \theta_m \leqq 2 - 1 - \theta_m \leqq 2,$$
$$S_m \geqq 0 - 1 - \theta_m \geqq -2.$$

On the other hand if $-2 \leqq S_{m-1} < 0$, then we choose $\varepsilon_m = 1$ so that

$$S_m = S_{m-1} + 1 - \theta_m < 0 + 1 - \theta_m \leqq 2,$$
$$S_m \geqq -2 + 1 - \theta_m \geqq -2.$$

This completes the proof.

Lemma 2. *Given a positive integer ϱ, there exists a non-absolutely convergent series $\sum_{1}^{\infty} a_n^{-\varrho}$ such that $0 < |a_1| < |a_2| < \cdots$, and such that if $n(x, a)$ denotes the number of a_n with $|a_n| \leqq x$ and*

$$N(x, a) = \int_{0}^{x} \{n(t, a)/t\}\, dt,$$

---

[2]) I am thankful to Dr. E. F. COLLINGWOOD for this counter-example. We omit the details of proof.

[3]) I am thankful to Prof. J. G. VAN DER CORPUT for this lemma.

then

$$n(r, a) = o(r^{\varrho}); \quad \lim_{r\to\infty} r^{\varrho-\varrho(r)} \Big| \sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho} \Big| = \infty.$$

Here $\varrho(r)$ is a proximate order of $N(r, a)$.

Proof. Take

$$|a_n|^{\varrho} = n \log (n + a), \quad 0 < a \leqq 1.$$

In Lemma 1, take

$$\theta(n) = \frac{n}{\{\log (n+b)\}^{\alpha}} - \frac{(n-1)}{\{\log (n-1+b)\}^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \ b = 100, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Then

$$S^{*}(n) = \sum_{1}^{n} \varepsilon_k = n/\{\log (n+b)\}^{\alpha} + K(n),$$

where $-2 \leqq K(n) \leqq 2$. We take a_n such that

$$a_n^{\varrho} = \{n \log (n + a)\}\, \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

It is easily seen, by partial summation, that $\sum a_n^{-\varrho}$ is convergent. Let p denote the least non-negative integer such that $\sum |a_n|^{-1-p}$ is convergent. Then $p = \varrho$. Further

$$\sum_{M}^{\infty} \varepsilon_n / n \log (n + a) = \{1 + o(1)\}/\alpha (\log M)^{\alpha}.$$

Now $n(r, a) = n$, if $|a_n| = r_n \leqq r < r_{n+1}$. Hence

$$n(r, a) \sim r^{\varrho}/(\varrho \log r), \quad N(r, a) \sim r^{\varrho}/(\varrho^2 \log r) \sim r^{\varrho(r)}.$$

If $r_{M-1} \leqq r < r_M$, then

$$\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho} = \sum_{M}^{\infty} \varepsilon_n / n \log (n + a) = \{1 + o(1)\}/\alpha\, \varrho^{\alpha} (\log r)^{\alpha}.$$

Hence

$$\lim_{r\to\infty} r^{\varrho-\varrho(r)} \Big| \sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho} \Big| = \infty.$$

Corollary. *Given a positive integer ϱ and*

$$|a_n|^{\varrho} = n \log (n + 1), \quad |b_n|^{\varrho} = n \log (n + \tfrac{1}{2}),$$

we can choose ε_n such that

$$\sum_{1}^{\infty} a_n^{-\varrho} = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n / n \log (n + 1), \quad (\arg a_n = 0 \text{ or } \pi/\varrho)$$

$$\sum_{1}^{\infty} b_n^{-\varrho} = \sum_{1}^{\infty} (-\varepsilon_n)/n \log (n + \tfrac{1}{2}), \quad (\arg b_n = \pi/\varrho \text{ or } 0)$$

are both convergent. Further $(a_n^{\varrho}/b_n^{\varrho})$ is real and negative for $n = 1, 2, \ldots$ and

$$\sum_{|a_n|>r} a_n^{-\varrho} = \frac{1 + o(1)}{\alpha (\varrho \log r)^{\alpha}}; \quad \sum_{|b_n|>r} b_n^{-\varrho} = -\frac{1 + o(1)}{\alpha (\varrho \log r)^{\alpha}}.$$

Further if $n(r, b)$ *denotes the number of* b_n *with* $|b_n| \leqq r$, *and*

$$N(r) = \int_0^r \{n(r, a) + n(r, b)\}\, dr/r,$$

then

$$N(r) \sim 2r^{\varrho}/\varrho^2 (\log r) \sim r^{\varrho(r)}, \tag{6.2}$$

where $\varrho(r)$ *is a proximate order for* $N(r)$.

Now consider the function

$$f(z) = \exp(c z^{\varrho}) \prod_1^{\infty} E(z/a_n, \varrho) \Big/ \prod_1^{\infty} E(z/b_n, \varrho) \tag{6.3}$$

where a_n and b_n have been defined in the above corollary and

$$\varrho c = -\left\{\sum_1^{\infty} a_n^{-\varrho} - \sum_1^{\infty} b_n^{-\varrho}\right\}.$$

Then $f(z) \in D$. Further

$$\left| c\varrho + \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-\varrho} - \sum_{|b_n| \leq r} b_n^{-\varrho} \right| \sim 2/\{\alpha (\varrho \log r)^{\alpha}\}, \tag{6.4}$$

and so

$$T(r, f) \sim 2r^{\varrho}/\{\alpha \pi \varrho^{1+\alpha} (\log r)^{\alpha}\}.$$

Hence $\delta(0, f) = \delta(\infty, f) = 1$ and so $f(z)$ has no G e.v. Let $F(z) = (f(z))^2$. Then $F(z) \in D$ and $\delta(0, F) = \delta(\infty, F) = 1$. $F(z)$ has no G e.v. and $\delta(0, F') = \delta(\infty, F') = 1$ [7, p. 67] and so $F'(z)$ has no G e.v.

7. Remarks

Let $f(z) \in D$.

(i) If $f(z)$ has ∞ as G e.v., then with the help of NEVANLINNA's second theorem we can show that

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) \leqq 1, \quad \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') \leqq 1.$$

If $f(z)$ has α as G e.v., then

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) \leqq 1.$$

(ii) If $f(z)$ has two G e.v. a and b $(|a| \leqq |b|)$, then $f(z) \in E$ if and only if $a \neq 0$, $\neq \infty$, $b = \infty$.

(iii) If $f(z)$ has no G e.v. or one finite G e.v., then $f(z) \notin E$.

(iv) If $f(z) \in E$ and either $\Delta(f) = 2$ or $\Delta(f') = 2$, then $\delta(\infty, f) = 1$.

For ∞ is G e.v. of $f'(z)$ and so it is G e.v. of $f(z)$. If $\Delta(f) = 2$, then from (i) we have $\delta(\infty, f) = 1$. If $\Delta(f') = 2$ then since 0 and ∞ are G e.v. of $f'(z)$, $\delta(0, f') = \delta(\infty, f') = 1$. Further

$$N(r, f) \leqq N(r, f'), \quad T(r, f') < 2\, T(r, f) + O(\log r).$$

Hence $\delta(\infty, f) = 1$.

Added in proof. For the proof of (4.1) see S. M. SHAH, An extension of LINDELOF's theorem to Meromorphic Functions, Tohoku Math. J. (2) **12**, 333–338 (1960).

In (4.4) the function $\varrho(r)$ is the same as that in (4.2).

References

[1] EDREI, ALBERT, and S. M. SHAH: A Conjecture of R. NEVANLINNA concerning the genus of a meromorphic function. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 319–324 (1960).

[2] NEVANLINNA, R.: Le Theoreme de PICARD-BOREL et la theorie des fonctions Meromorphes. Paris 1929.

[3] SHAH, S. M.: On Proximate orders of Integral Functions. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 326–328 (1946).

[4] SHAH, S. M., and S. K. SINGH: Meromorphic Functions with maximum defect sum. Tohoku Math. J. (2) **11**, 447–452 (1959).

[5] VALIRON, G.: Le Theoreme de LAGUERRE-BOREL dans la theorie des fonctions Entieres. Bull. des Sc. Math. **46**, 432–445 (1922).

[6] VALIRON, G.: Remarques sur les Valeurs Exceptionelles des Fonctions Meromorphes. Rend. Circ. Mat. Palermo **57**, 71–86 (1933).

[7] WITTICH, H.: Defekte Werte eindeutiger analytischer Funktionen. Arch. der Math. **9**, 65–74 (1958).

Dept. of Math., Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)

(Eingegangen am 28. Juli 1960)

TSCHAUNER, J.
Math. Zeitschr. 75, 392–394 (1961)

Erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen

von

JOHANN TSCHAUNER

Durch Transformation ihrer Rekursionsformeln werden erzeugende Funktionen von Besselschen Funktionen beliebiger Art mit beliebigem Index hergeleitet, von denen Sonderfälle oder andere Formen – z. T. schon sehr lange – in der Literatur bekannt sind. Eine dieser erzeugenden Funktionen wird zur Darstellung von Besselschen Funktionen 1. Art mit mehreren Argumenten benützt.

Die erzeugende Funktion der $Z_{p+n}(x) : n!$

Aus der bekannten Rekursionsformel [2] der Besselschen Funktionen

$$x u_{n+2} - 2(n+1+p) u_{n+1} + x u_n = 0, \qquad u_n(x, p) = Z_{p+n}(x),$$

folgt bei $n \geqq 0$ die Rekursionsformel für die Funktionen $v_n(x, p) = Z_{p+n}(x) : n!$

$$x(n+2)(n+1) v_{n+2} - 2(n+1)(n+1+p) v_{n+1} + x v_n = 0. \tag{1}$$

Durch Transformation dieser Gleichung [5]

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) v_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1+p) v_{n+1} t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = 0$$

erhält man für die erzeugende Funktion $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ der Funktionen v_n die homogene, von Anfangswerten v_0 usw. unabhängige Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(x - 2t) \ddot{V} - 2(1+p) \dot{V} + x V = 0, \qquad \dot{V} = dV/dt. \tag{2}$$

Dies ist mit $s = \frac{1}{4}(x^2 - 2xt)$, $ds = -\frac{x}{2} dt$ eine mit der Besselschen Differentialgleichung verwandte einparametrige Gleichung

$$s V'' + (1+p) V' + V = 0, \qquad V' = dV/ds$$

mit der Lösung $s^{-\frac{p}{2}} Z_p(2\sqrt{s})$. Die mit der Anfangsbedingung (bei $t = 0$) $V(0) = v_0 = Z_p(x)$ verträgliche Lösung von (2) ist daher gleich

$$V(t) = A\,[\tfrac{1}{4}(x^2 - 2xt)]^{-\frac{p}{2}} \cdot Z_p\big(\sqrt{x^2 - 2xt}\big).$$

Der Normierungsfaktor A erhält aus der Anfangsbedingung den Wert $A = (\frac{1}{2}x)^p$. Man findet also die erzeugende Funktion der $Z_{p+n}(x) : n!$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{p+n}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{x}{x - 2t}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot Z_p\big(\sqrt{x^2 - 2xt}\big). \tag{3}$$

Sie gilt offenbar für alle Arten von Besselschen Funktionen, da die zuständige Differentialgleichung (2), welche durch Transformation der für alle Arten von Besselschen Funktionen gültigen Rekursionsformel (1) gewonnen wurde, von jeglichen Anfangswerten unabhängig ist.

Die erzeugende Funktion der $Z_{p-n}(x):n!$

In analoger Weise erhält man durch Transformation der für die Funktionen $w_n(x,p)=Z_{p-n}(x):n!$ gültigen Rekursionsformel

$$x(n+2)(n+1)w_{n+2}+2(n+1)(n+1-p)w_{n+1}+xw_n=0 \tag{4}$$

eine homogene Differentialgleichung für ihre erzeugende Funktion

$$(x+2t)\ddot{W}+2(1-p)\dot{W}+xW=0. \tag{5}$$

Ihre Lösung ist $W(t)=B[\frac{1}{4}(x^2+2xt)]^{\frac{p}{2}}\cdot Z_p\left(\sqrt{x^2+2xt}\right)$. Da der Faktor B aus der Anfangsbedingung $W(0)=w_0=Z_p(x)$ sich zu $B=(x/2)^{-p}$ ergibt, findet man die erzeugende Funktion der $Z_{p-n}(x):n!$

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}Z_{p-n}(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{x+2t}{x}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot Z_p\left(\sqrt{x^2+2xt}\right). \tag{6}$$

Auch sie gilt für alle Arten von Besselschen Funktionen.

Sonderfälle und andere Formen von (3) und (6)

Der Sonderfall von (3) bei $p=0$ und $Z_n=J_n$ ist in [3], [4] angegeben. Die Beziehungen (3), (6) sind für $Z_{p+n}=J_{p+n}$ bzw. $Z_{p-n}=J_{p-n}$ im wesentlichen schon in Ergebnissen enthalten, die auf Bessel und Lommel [1] zurückgehen. Eine Erweiterung dieser Ergebnisse auf Besselsche Funktionen beliebiger Art findet sich in [2]. Auf (3) beruht auch mit $x^2-2xt=a^2x^2$ das sogenannte Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen

$$Z_p(ax)=a^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{p+n}(x)}{n!}(1-a^2)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n. \tag{7}$$

Ersetzt man in (3) x durch $2\sqrt{x}$, t durch $-t:\sqrt{x}$ und in (6) x durch $2\sqrt{x}$, t durch $t:\sqrt{x}$, dann entstehen die Beziehungen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{p+n}(2\sqrt{x})}{n!}x^{-\frac{n+p}{2}}(-t)^n=(x+t)^{-\frac{p}{2}}\cdot Z_p\left(2\sqrt{x+t}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{p-n}(2\sqrt{x})}{n!}x^{-\frac{n-p}{2}}t^n=(x+t)^{\frac{p}{2}}\cdot Z_p\left(2\sqrt{x+t}\right).$$

Die in [4] S. 261 angegebenen Gln. (2), (3) enthalten daher einen Druckfehler. Statt $J_{\alpha+n}(x)$ bzw. $J_{\alpha-n}(x)$ lies $J_{\alpha+n}(2\sqrt{x})$ bzw. $J_{\alpha-n}(2\sqrt{x})$. Schreibt man in (3) $-t$ anstelle von t, so ergibt sich nach einem Vergleich mit (6) die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{p-n}(x)}{n!}t^n=\left(1+\frac{2}{x}t\right)^p\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{p+n}(x)}{n!}(-t)^n.$$

Durch Entwicklung des ersten rechten Faktors in eine Binomialreihe erhält man die Darstellung von $Z_{p-n}(x)$ in Form einer endlichen Summe von Besselschen Funktionen mit positiven Indizes

$$Z_{p-n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{p}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \frac{(-1)^{n-m} n!}{(n-m)!} Z_{p+n-m}(x). \tag{8}$$

Für $p = 0$ entsteht aus (8) die bekannte Formel $Z_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Z_n(x)$ [2].

Darstellung von Besselschen Funktionen mit mehreren Argumenten

Ersetzt man in der bekannten Potenzreihenentwicklung der Besselschen Funktionen 1. Art [2]

$$\left(\frac{s}{2}\right)^{-p} \cdot J_p(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(1+p+m)}. \tag{9}$$

p durch $p+n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), multipliziert mit $(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} : n!$ und summiert über alle n, dann entsteht die Beziehung

$$\left(\frac{s}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{p+n}(s)}{n!} \left(-\frac{t^2}{2s}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^n \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{m!\,n!\,\Gamma(1+p+m+n)}.$$

Da sich ihre linke Seite nach (3) mit s anstelle von x und mit $-t^2 : 2s$ anstelle von t explizit berechnen läßt, findet man die in beiden Argumenten s und t symmetrische Darstellung der Besselschen Funktion

$$\left(\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{2}\right)^{-p} \cdot J_p\left(\sqrt{s^2+t^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^n \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{m!\,n!\,\Gamma(1+p+m+n)} \tag{10}$$

als Doppelsumme. Offenbar darf man das gezeigte Verfahren beliebig oft wiederholen. Man erhält im Ergebnis die Darstellung der Besselschen Funktion 1. Art mit k gleichberechtigten Argumenten

$$\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}}{2}\right)^{-p} J_p\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}\right) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} \cdots (-1)^{m_k} \left(\frac{x_1}{2}\right)^{2m_1} \cdots \left(\frac{x_k}{2}\right)^{2m_k}}{m_1! \ldots m_k!\,\Gamma(1+p+m_1+\cdots+m_k)} \tag{11}$$

als k-fache Summe.

Literatur

[1] LOMMEL, E. v.: Studien über die Besselschen Funktionen, S. 11. Leipzig 1868.

[2] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel functions, S. 40, 82 u. 140–142. Cambridge 1922.

[3] TRUESDELL, C. A.: An essay toward a unified theory of special functions, S. 83. Princeton 1948.

[4] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions, Bd. 3, S. 261. New-York-Toronto-London 1955.

[5] TSCHAUNER, J.: Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen. Math. Z. **73**, 457–459 (1960). — Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome. Math. Z. **75**, 1–2 (1961).

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V. Oberpfaffenhofen, Post Weßling, Oberbayern

(Eingegangen am 14. Juli 1960)

EWALD, G.
Math. Zeitschr. 75, 395—418 (1961)

Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nichtdesarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern*)

Von
GÜNTER EWALD

Einleitung

Mit der vorliegenden Arbeit beginnen wir eine Untersuchung über verallgemeinerte projektive Raumgeometrien, die einem doppelten Zweck dient:

1. Wir geben Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume mit Hilfe schwacher Inzidenzvoraussetzungen an. Diese Kennzeichnungen werfen nicht nur neues Licht auf die Grundlagen der projektiven Raumgeometrie, sie sind auch für die Lösung anderer Probleme bedeutsam. Wir zeigen dies in einer folgenden Arbeit [1] am Beispiel eines Problems aus der Theorie der Möbius-Ebenen. (Diesem kommt wiederum eine Bedeutung für die Entwicklung nichteuklidischer Geometrien über beliebigen Schiefkörpern zu.)

2. Wir dehnen die Geometrie nichtdesarguesscher projektiver Ebenen, die in den letzten Jahren große Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat (vgl. [4]), in den Raum aus (die Ebenen eines drei- oder höherdimensionalen projektiven Raumes sind bekanntlich alle desarguessch)[1]. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Theorie der Ternärkörper[2] von Interesse. Es lassen sich Ternärkörpereigenschaften statt durch ebene Schließungssätze, wie es aus der Theorie der projektiven Ebenen bekannt ist, durch einfache Schnitteigenschaften von Ebenen im Raum charakterisieren. Man erhält auf diese Weise neuartige Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Sachverhalten.

Verbandstheoretisch gesehen stellen unsere Strukturen eine Klasse dualer Austauschverbände dar. Jedoch soll hierauf erst an anderer Stelle eingegangen werden[3].

*) Habilitationsschrift Mainz 1960, I. Teil (vgl. folgende Arbeit).

[1]) E. SPERNER [5] hat unabhängig vom Verfasser verallgemeinerte affine Räume angegeben, die für affine Ebenen einen ähnlichen Zweck erfüllen. Dies stellte sich auf dem Kongreß "On the algebraical and topological foundations of geometry" 1959 in Utrecht heraus, wo beide Verfasser über ihre Arbeiten vorgetragen haben (vgl. [2]).

[2]) Ein Ternärkörper ("ternary ring" bei HALL [3]) ist eine algebraische Struktur, durch die eine beliebig vorgegebene projektive Ebene koordinatenmäßig beschrieben wird. Vgl. Abschnitt 3. — Hinsichtlich der Bezeichnungen lehnen wir uns an das Buch „Projektive Ebenen" [4] von G. PICKERT an.

[3]) Während für die Probleme der vorliegenden Arbeit höhere Dimensionen von geringem Interesse sind, sollen dort beliebige Dimensionen zugelassen werden.

1. Ergebnisse

Die geometrischen Strukturen, mit denen wir uns beschäftigen, ordnen sich der folgenden Definition unter:

$\mathfrak{P}=\{A, B, \ldots\}$ und $\mathfrak{E}=\{\alpha, \beta, \ldots\}$ seien zwei Mengen von Dingen; die Elemente der ersteren nennen wir *Punkte*, die der letzteren *Ebenen*. $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}$ sei eine (nicht notwendig echte) Teilmenge der Punkte; ihre Elemente sollen auch *Grundpunkte* heißen. n sei die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}$. Zwischen Punkten und Ebenen sei eine Inzidenzbeziehung („$\in$") erklärt. Das Quadrupel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ heiße ein *projektives Gefüge*, auch *n-Gefüge* oder kurz *Gefüge* $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$, wenn es folgende Eigenschaften besitzt[4]):

(1) *Auf jeder Ebene liegt mindestens ein Grundpunkt.*
(2) *Durch einen Grundpunkt und zwei von ihm verschiedene Punkte geht stets eine Ebene.*
(3) *Drei Ebenen enthalten stets einen gemeinsamen Punkt.*
(4) *Enthalten drei verschiedene Ebenen zwei gemeinsame Punkte, so besitzen sie zu je zweien den gleichen Durchschnitt.*
(5) *Durch jeden Punkt verlaufen drei Ebenen, die nur diesen Punkt gemein haben. Es gibt zwei Grundpunkte und drei weitere Punkte, so daß keine vier dieser fünf Punkte komplanar sind*[5]).

Als Minimalmodell findet man ein 2-Gefüge, das aus dem Fano-Raum durch Weglassung eines Punktes entsteht. — Die Gefüge $\mathfrak{G}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ sind genau die projektiven dreidimensionalen Räume[6]).

Die Schnittgebilde verschiedener Ebenen bezeichnen wir als *Geraden* $a, b, \ldots$ Nach (5) und (3) enthält jede Gerade Punkte.

$(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}', \mathfrak{E}', \in')$ sei ein Gefüge, das folgendermaßen aus dem Gefüge $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ entsteht: Falls sämtliche Grundpunkte auf ein und derselben Geraden g liegen, sollen zu $\mathfrak{A}$ eventuell nicht in $\mathfrak{P}$ gelegene Grundpunkte hinzugefügt werden und ebenfalls mit g inzidieren. Andernfalls sei $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{P}$. In beiden Fällen gelte $\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}\cup\mathfrak{A}'$ (im letzteren Fall also $\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}$). Ferner sei $A\in\alpha$ bei $A\in\mathfrak{P}$, $\alpha\in\mathfrak{E}$ gleichbedeutend mit $A\in'\alpha$. Dies führt auch zu $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{E}'$. Wir nennen dann $\mathfrak{G}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ *Subgefüge* von $\mathfrak{G}'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}', \mathfrak{E}', \in')$, im Falle, daß $\mathfrak{A}$ echte Untermenge von $\mathfrak{A}'$ ist, auch *echtes* Subgefüge. Ein Gefüge heiße *maximal*, wenn es in keinem Gefüge als echtes Subgefüge enthalten ist.

[4]) Wir umschreiben die Inzidenzbeziehung in der üblichen Weise durch Begriffe wie „liegen auf", „komplanar", „schneiden" usw. Ferner identifizieren wir gelegentlich die Ebenen mit den Mengen der auf ihnen gelegenen Punkten (was bereits durch die Benutzung des Symbols „$\in$" angedeutet wird). — Entsprechendes gilt für die später eingeführten Geraden.

[5]) Es handelt sich bei den n-Gefügen um Systeme von (mindestens zwei) Ebenenbündeln, ähnlich wie bei den (ebenen) n-Geweben um Systeme von Geradenbüscheln (bei endlichem n). — Denkt man sich einen stets ruhenden „idealen" Beobachter, so erkennt dieser im streng geometrisch-optischen Sinn zunächst nur die Struktur eines 2-Gefüges (mit den Augen als Grundpunkten). Ebenen, die keines seiner Augen treffen, muß er sich erst indirekt aufbauen.

[6]) Läßt man in (1) bis (5) die Silbe „Grund-" weg, so erhält man im wesentlichen ein Axiomensystem der dreidimensionalen projektiven Geometrie von A. WINTERNITZ [7].

Aus elementaren Inzidenzeigenschaften der projektiven Räume folgt, daß ein dreidimensionaler projektiver Raum stets ein maximales Gefüge darstellt ($\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$). Ferner ist er, wie wir sehen werden, durch jedes seiner Subgefüge schon bestimmt. In diesem Sinne geben die beiden folgenden Sätze je eine Kennzeichnung der dreidimensionalen projektiven Räume (Beweis in Abschnitt 7):

SATZ I. *Jedes 4-Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten ist Subgefüge eines projektiven dreidimensionalen Raumes.*

Als Grundlage für Satz II dient die folgende Schließungseigenschaft, die einer eingeschränkten Fassung des „Veblen-Youngschen Viereckaxioms" (vgl. (VY) in Abschnitt 7) äquivalent ist:

OKTAEDERSATZ. *$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien Ebenen durch A_1, aber nicht durch A_2 und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ Ebenen durch A_2, aber nicht durch A_1. Je drei der ersteren Ebenen und je drei der letzteren Ebenen sollen keine gemeinsame Gerade enthalten. Das Symbol „$\varkappa\, \lambda\, \mu\, \nu$" besage: $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ schneiden sich in genau einem Punkt. Dann folgt aus $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, $\alpha\, \alpha'\beta\, \beta'$, $\beta\, \beta'\gamma\, \gamma'$, $\gamma\, \gamma'\delta\, \delta'$, $\delta\, \delta'\alpha\, \alpha'$, $\alpha\, \alpha'\gamma\, \gamma'$ auch $\beta\, \beta'\delta\, \delta'$* (Fig. 1).

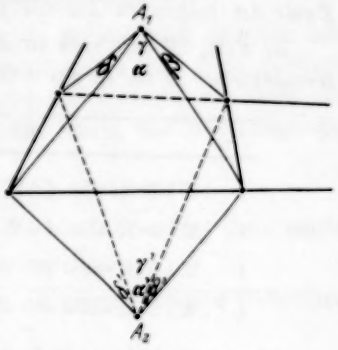


Fig. 1

SATZ II. *Ein 2-Gefüge ist genau dann Subgefüge eines dreidimensionalen projektiven Raumes, wenn in ihm der Oktaedersatz gilt.*

Satz II wird in der Theorie der Möbius-Ebenen (s. [1]) benötigt.

Allgemein interessiert das Problem, zu einem vorgegebenen Gefüge maximale Gefüge zu finden, in denen es als Subgefüge enthalten ist. Man erhält darüber eine Auskunft, wenn man in folgender Weise Koordinaten einführt:

Wir erklären eine Ebene, in der möglichst viele (mindestens zwei) Grundpunkte liegen, als unendlichferne Ebene. Dann führen wir wie im affinen Raum ein Koordinatensystem ein, und zwar so, daß möglichst viele (mindestens zwei) der unendlichfernen Achsenpunkte Grundpunkte sind („y-Richtung" und „z-Richtung"). Als Koordinatenbereich erhalten wir einen „zweifachen Ternärkörper", d. h. einen algebraischen Bereich $\mathfrak{R}$, der hinsichtlich zweier ternärer Verknüpfungen $T(u, v, w)$ und $T'(u, v, w)$ je einen Ternärkörper[2]) darstellt (mit gemeinsamem 0- und gemeinsamem 1-Element). Wie in der Theorie der projektiven Ebenen hängt $\mathfrak{R}$ im allgemeinen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Bildet man die allgemeine lineare Gleichung in zwei Variabeln:

$$z = T\left(a, x, T(b, y, c)\right),$$

so läßt sich dieser stets geometrisch eine verallgemeinerte Ebene („Quasiebene") zuordnen, ebenso wie jeder Gleichung $y = T'(c, x, d)$ und jeder Gleichung $x = e$. Die Gefügeebenen kommen unter diesen Ebenen vor. Umgekehrt kann man mit Hilfe solcher Gleichungen jedem zweifachen Ternärkörper ein Gefüge zuordnen. *Daraus ergibt sich insbesondere, daß jede projektive Ebene*

als Ebene eines projektiven Gefüges aufgefaßt werden kann. (Es lassen sich sogar zwei beliebige projektive Ebenen mit gleichmächtigen Geraden in ein und dasselbe Gefüge einbetten).

Die im folgenden Satz III auftretenden Links- bzw. Rechtsquasikörper sind aus der Theorie der projektiven Ebenen bekannte algebraische Bereiche ($T = T'$; s. Abschnitt 5; vgl. PICKERT [4]). $\mathfrak{K}_0$ sei der „Kern" eines Linksquasikörpers $\mathfrak{K}$, der entsprechend dem Kern eines Rechtsquasikörpers gebildet wird (s. Abschnitt 5; $\mathfrak{K}_0$ ist ein Schiefkörper).

SATZ III. *Für ein projektives Gefüge* $\mathscr{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $\mathscr{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ *ist Subgefüge eines Gefüges* $\mathscr{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$, *wo* $\mathfrak{A}'$ *die in der k-ten Zeile der folgenden Tabelle genannten Eigenschaften besitzt*[7]).

b) $\mathscr{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ *läßt sich in der oben erläuterten Weise durch einen Koordinatenternärkörper* $\mathfrak{K}$ *der in der k-ten Zeile aufgeführten Art beschreiben* ($k = 1, \ldots, 4$):

	$\mathfrak{A}'$	$\mathfrak{K}$
1.	$\lvert\mathfrak{A}'\rvert \geqq 3$; *alle* $A \in \mathfrak{A}'$ *kollinear*	*Linksquasikörper*
2.	$\lvert\mathfrak{A}'\rvert > 3$; *alle* $A \in \mathfrak{A}'$ *kollinear*	*Linksquasikörper mit* $\lvert\mathfrak{K}_0\rvert \geqq 3$
3.	$\lvert\mathfrak{A}'\rvert \geqq 3$; *nicht alle* $A \in \mathfrak{A}'$ *kollinear*	*Assoziativer Rechtsquasikörper*
4.	$\lvert\mathfrak{A}'\rvert > 3$; *nicht alle* $A \in \mathfrak{A}'$ *kollinear*	*Schiefkörper.*

Hinsichtlich der 2. Tabellenzeile von Satz III erhalten wir folgende genauere Aussage: Fügt man zu $\mathfrak{K}_0$ ein Element „∞" hinzu und ist $\mathscr{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ maximal, dann lassen sich die Grundpunkte von $\mathscr{G}'(\mathfrak{A}'\,\mathfrak{P}',)$ eineindeutig den Elementen von $\mathfrak{K}_0 \cup \{\infty\}$ zuordnen. — Darin steckt eine einfache geometrische Deutung des Kerns eines Linksquasikörpers. (Zum Beweis von Satz III s. unten (6.5) und (7.2)).

Aus Satz III kann man Schlüsse der folgenden Art ziehen: Wird ein 3-Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten durch einen assoziativen Rechtsquasikörper, der kein Schiefkörper ist, beschrieben, dann ist es maximal. Beherrscht man allgemein die Koordinatenbereiche eines Gefüges, dann beherrscht man auch die maximalen Gefüge, in denen es als Subgefüge enthalten ist.

Die Beziehungen zwischen Gefüge- und Ternärkörpereigenschaften in Satz III lassen sich weiter ausbauen. Wir beschränken uns jedoch im wesentlichen auf die in Satz III angeführten wichtigsten Stufen (Ausnahmen in Abschnitt 5).

Es sei noch besonders erwähnt, daß wir die definierenden Rechengesetze der in Satz III rechts stehenden Ternärkörper im allgemeinen direkt aus den Ebenengleichungen herleiten, nicht auf dem Umweg über ebene Schließungssätze. Gerade in diesem Verfahren werden neue Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Tatsachen sichtbar.

[7]) $\lvert\mathfrak{M}\rvert$ bedeute die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.

2. Eigenschaften der projektiven Gefüge

Gegeben sei ein n-Gefüge $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$. Wir nennen die Ebenen, die den Grundpunkt $A \in \mathfrak{A}$, aber nicht alle Grundpunkte enthalten, *A-Ebenen*. Ebenen, die durch sämtliche Grundpunkte verlaufen, sollen *$\mathfrak{A}$-Ebenen*, im Falle eines 2-Gefüges mit $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\}$ auch *$A_1 A_2$-Ebenen* heißen.

Die kleinsten Subgefüge eines Gefüges sind 2-Gefüge. Ferner sind unter den 2-Gefügen die Gefüge allgemeinster Art zu suchen, weil die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}$, wie wir sehen werden, auf die Einengung der Struktur eines Gefüges entscheidenden Einfluß nimmt (vgl. den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$). Wir werden es daher oft mit 2-Gefügen zu tun haben. — Es gilt:

(2.1) *Jedes Gefüge enthält mindestens ein 2-Gefüge als Subgefüge.*

Beweis. Man greife zwei Grundpunkte A_1, A_2 heraus und entferne alle von A_1, A_2 verschiedenen Punkte der Geraden $A_1 A_2$[8]) aus dem Gefüge. Ferner bezeichne man nur noch diejenigen Ebenen als Ebenen, die einen der Punkte A_1, A_2 enthalten. Dann bleibt ein 2-Gefüge übrig, das Subgefüge des gegebenen Gefüges ist.

Wir beweisen jetzt einige elementare Gefügeeigenschaften.

(2.2) *Zwei verschiedene Punkte liegen auf höchstens einer Geraden. Drei nichtkollineare Punkte inzidieren mit höchstens einer Ebene.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus (4), die zweite aus der Definition der Geraden.

(2.3) *Jede Ebene enthält mindestens drei nichtkollineare Punkte und ist durch die Menge ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen (2.2) genügt es, die Existenz dreier nichtkollinearer Punkte auf einer beliebig vorgegebenen Ebene α nachzuweisen. Seien A_1, A_2, P, Q, R Punkte der in (5) genannten Art, wo A_1, A_2 Grundpunkte darstellen. Verbindet man A_1 bzw. A_2 je mit allen Paaren der restlichen vier Punkte gemäß (2) durch Ebenen, so erhält man 9 verschiedene Ebenen. Je zwei dieser Ebenen bestimmen eine Verbindungsgerade zweier der fünf genannten Punkte. Enthält α sowohl A_1 wie A_2, dann schneidet nach (3) etwa PQ die Ebene α in einem Punkt S. Wäre S mit A_1, A_2 kollinear, so lägen wegen (4) P, Q mit A_1, A_2 in einer Ebene. — Liegt A_i nicht auf α, dann schneiden die Geraden A_iP, A_iQ, A_iR die gesuchten Punkte aus α aus ($i = 1$ oder 2).

(2.4) *Auf jeder Geraden, sofern sie im Falle $n = 2$ nicht beide Grundpunkte enthält, liegen mindestens drei Punkte. Es gibt zwei Geraden ohne Schnittpunkt.*

Beweis. Eine beliebige Gerade hat nach (3) mit jeder der im Beweis von (2.3) genannten Ebenen einen gemeinsamen Punkt. Sofern nicht A_1, A_2 die einzigen Grundpunkte sind und die Gerade mit $A_1 A_2$ zusammenfällt, gibt es drei verschiedene Punkte dieser Art. — Die Geraden $A_i P$ und QR schneiden sich nicht, da sonst A_i, P, Q, R komplanar wären.

[8]) Mit PQ bezeichnen wir allgemein bei $P \neq Q$ die Verbindungsgerade von P und Q (falls vorhanden). Existiert der Schnittpunkt zweier Geraden a, b, dann bezeichnen wir ihn mit ab.

(2.5) *Ein Grundpunkt bestimmt mit jedem von ihm verschiedenen Punkt genau eine Gerade. Zwei beliebige verschiedene Punkte, die nicht gemeinsam in einer $\mathfrak{A}$-Ebene liegen, sind ebenfalls durch genau eine Gerade verbunden.*

BEWEIS. Ist $S \neq A$ und ist A ein Grundpunkt, dann lege man durch A, S und jeden der im Beweis von (2.3) genannten Punkte je eine Ebene (Existenz nach (2)). Zwei dieser Ebenen sind gewiß verschieden und bestimmen eine Verbindungsgerade von A, S. — Liegen S, T nicht in einer $\mathfrak{A}$-Ebene (sofern eine solche überhaupt vorhanden ist), dann gibt es zwei Grundpunkte A, A', so daß A, S, T und A', S, T verschiedene Ebenen bestimmen. Diese definieren eine Verbindungsgerade von S und T. — In beiden Fällen ist die Verbindungsgerade wegen (4) eindeutig bestimmt.

Aus (3) und (4) ergibt sich schließlich:

(2.6) *Eine Gerade trifft jede Ebene, in der sie nicht liegt, in genau einem Punkt.*

Der folgende Satz gibt eine allgemeine Strukturaussage über Gefüge:

(2.7) *Alle A-Ebenen ($A \in \mathfrak{A}$ beliebig) sind projektive Ebenen. Je zwei A-Ebenen sind (bei gleichem A) isomorph*[9]*. Im Falle $n \geqq 3$ sind auch die A- zu den A'-Ebenen ($A \neq A'$ beliebig) isomorph.*

BEWEIS. Sei α die angenommene A-Ebene und sei $A' \notin \alpha$. Je zwei Punkte von α bestimmen dann mit A' eine Ebene, deren Schnittgerade mit α eine Verbindungsgerade der beiden Punkte darstellt. Wegen (2.2) ist diese Gerade eindeutig festgelegt. (3) garantiert, daß sich je zwei Geraden von α schneiden. Nach (2.4) liegen auf jeder Geraden von α mindestens drei Punkte und nach (2.3) enthält α drei nichtkollineare Punkte. α ist daher eine projektive Ebene.

Ist α' eine zweite A-Ebene und ist A' ein Grundpunkt mit $A' \notin \alpha'$, so kann man α von A' aus gemäß (2.4) und der Definition der Geraden auf α' projizieren, so daß diese Projektion eine Isomorphie der beiden Ebenen ergibt. Ist $A' \in \alpha'$, so existiert (nach Definition der A-Ebenen) ein A'' mit $A'' \notin \alpha'$. Ist $A'' \notin \alpha$, so projizieren wir α von A'' aus auf α'. Gilt aber $A'' \in \alpha$, so finden wir mit Hilfe von (5) eine A-Ebene α'' mit A', $A'' \notin \alpha''$ und projizieren erst α von A' aus auf α'' und dann α'' von A'' aus auf α'. — Duch sukzessives Projizieren dieser Art folgt im Falle $n \geqq 3$ auch die Isomorphie der A- und der A'-Ebenen ($A \neq A'$).

(2.8) *Je zwei Geraden eines Gefüges, von denen keine sämtliche Grundpunkte enthält, besitzen die gleiche Anzahl von Punkten.*

BEWEIS. Seien a, a' beliebige Geraden der genannten Art. Nach Annahme folgt, daß es durch a eine A-Ebene α und durch a' eine A'-Ebene α' gibt (für passende A, A'). Nach (2.7) sind α und α' projektive Ebenen. Bei $\alpha \neq \alpha'$ schneiden sie sich in einer Geraden. Sowohl in diesem Fall wie bei $\alpha = \alpha'$ folgt die Behauptung daraus, daß alle Geraden einer projektiven Ebene gleichmächtig sind.

[9] Zwei projektive Ebenen heißen isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung ihrer Punkte aufeinander gibt, die Geraden in Geraden überführt.

Wir zeichnen jetzt in einem 2-Gefüge $\mathcal{G}$ eine A_1A_2-Ebene ω als *uneigentliche Ebene* aus und nennen die in ω gelegenen Punkte und Geraden ebenfalls uneigentlich. Die übrigen Punkte, Geraden und Ebenen sollen *eigentlich* heißen; jedoch lassen wir den Zusatz „eigentlich" meist weg. Uneigentliche Punkte bezeichnen wir auch als *Richtungen*. Zwei eigentliche Geraden bzw. zwei eigentliche Ebenen bzw. eine eigentliche Gerade und eine eigentliche Ebene heißen *parallel*, wenn sie entweder miteinander inzidieren oder wenn ihr Durchschnitt nichtleer und ganz in ω enthalten ist. Diese Parallelität stellt offenbar sowohl auf der Menge der Geraden wie auf der Menge der Ebenen eine Äquivalenzrelation dar. — Auf diese Weise entsteht aus $\mathcal{G}$ ein verallgemeinerter affiner Raum; wir nennen ihn (ein zu $\mathcal{G}$ gehöriges) *affines Gefüge* $\mathcal{G}_\omega$. Die Bezeichnung „*A-Ebene*" behält auch für $\mathcal{G}_\omega$ ihren Sinn. — In $\mathcal{G}_\omega$ gelten folgende Sätze:

(2.9) *Durch eine vorgegebene Gerade gibt es in Richtung eines nicht auf der Geraden (als Richtung) gelegenen Grundpunktes genau eine Ebene.*

Beweis. Sind P, Q zwei verschiedene Punkte der Gerade und ist A_1 der angenommene Grundpunkt, dann sind P, Q, A_1 nicht kollinear. Daraus folgt nach (2), (2.2) und der Definition der Geraden die Behauptung.

(2.10) *Zu einer Ebene gibt es durch einen vorgegebenen Punkt stets genau eine parallele Ebene.*

Beweis. Die uneigentliche Schnittgerade der gegebenen Ebene und ω enthält einen Grundpunkt und bestimmt mit dem gegebenen Punkt, wieder nach (2) und (2.3), eine und nur eine Ebene. Dies ist die gesuchte Ebene.

(2.11) *Eine Gerade und eine Ebene sind entweder parallel oder schneiden sich in einem eigentlichen Punkt. Zwei Ebenen sind entweder parallel oder schneiden sich in einer eigentlichen Geraden.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus (2.6), der zweite aus der Definition der Geraden.

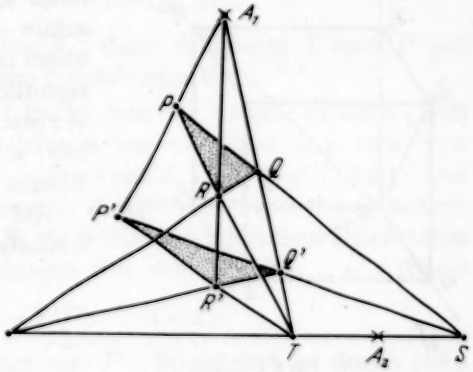


Fig. 2

Aus einem späteren Satz wird hervorgehen, daß die Gefügeebenen eines 2-Gefüges keinem ebenen Schließungssatz zu genügen brauchen (s. unten Korrolar zu Satz 2, wo man etwa freie projektive Ebenen zugrundelege). Anders verhält es sich mit dem Desarguesschen Satz im Raum:

(*DR*) Sind die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ perspektiv, aber nicht komplanar, dann sind die Punkte $(PQ)\,(P'Q')=S$; $(PR)\,(P'R')=T$ und $(QR)\,(Q'R')$ kollinear (Fig. 2).

Es gilt, wenn man die Gerade ST als Achse bezeichnet und das Zentrum wie üblich definiert:

SATZ 1. *Der Desarguessche Satz im Raum (DR) gilt in einem 2-Gefüge stets dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist (A_1, A_2 die Grundpunkte des 2-Gefüges):*

a) A_1 ist Zentrum, A_2 liegt auf der Achse,

b) A_2 ist Zentrum, A_1 liegt auf der Achse.

BEWEIS. Man kann die üblichen projektiven Schlußweisen anwenden (s. z.B. HALL [3], S. 232), da alle hierbei benötigten Ebenen existieren (vgl. Fig. 2).

3. Einführung von Koordinaten

Nach (2.1) gibt es zu jedem Gefüge ein Subgefüge, das 2-Gefüge ist. Ferner werden wir sehen, daß die Gefüge durch die gleichen algebraischen Bereiche wie ihre Subgefüge beschrieben werden. Für eine allgemeine gegenseitige Zuordnung von Gefügen und Koordinatenstrukturen genügt es daher, 2-Gefüge zu betrachten. Erst im 5. Abschnitt dehnen wir die algebraische Beschreibung der 2-Gefüge auf beliebige Gefüge aus. Man kann sicht hinterher auch die Koordinateneinführung so vorgenommen denken, wie es in Abschnitt 1 erläutert ist.

Seien A_1, A_2 die Grundpunkte eines 2-Gefüges $\mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}_\omega$ (ω irgendeine A_1A_2-Ebene) wählen wir einen (eigentlichen) Punkt O und in ω einen (uneigentlichen) Punkt $U \notin A_1A_2$ fest aus. Wir setzen $x = OU$; $y = OA_1$; $z = OA_2$. Diese Geraden x, y, z — wir nennen sie *Koordinatenachsen* — liegen nicht in einer Ebene, da diese wegen (2.2) mit ω zusammenfiele, O also nicht eigentlich wäre. Die durch x, y bzw. x, z bzw. y, z bestimmte Ebene bezeichnen wir als x, y- bzw. x, z- bzw. y, z-*Ebene*; wir nennen diese Ebenen auch *Koordinatenebenen*.

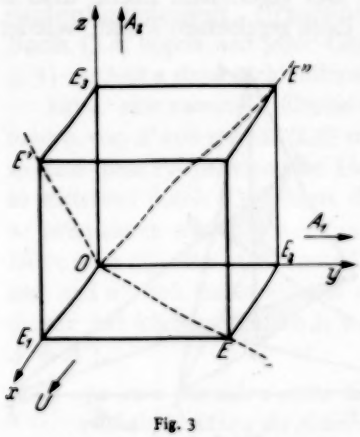


Fig. 3

Auf x, y, z wählen wir bzw. (eigentliche) Einheitspunkte E_1, E_2, E_3, alle $\neq O$, und setzen

$$E = (E_1A_1)(E_2U)$$
$$E' = (E_1A_2)(E_3U)$$
$$E'' = (E_2A_2)(E_3A_1) \qquad \text{(Fig. 3)}.$$

Wir erinnern an die Definition eines *Ternärkörpers:* (Bezeichnung nach PICKERT [4], S. 36; vgl. HALL [3]): Man versteht darunter eine Menge $\mathfrak{R}$ von Dingen $u, v, \ldots$, für die eine ternäre Verknüpfung $T(u, v, w)$ überall definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

(T 1) Es gibt $0, 1 \in \mathfrak{R}$, so daß $T(u, 0, v) = T(0, u, v) = v$ und $T(u, 1, 0) = T(1, u, 0) = u$ für beliebige $u, v \in \mathfrak{R}$ ist.

(T 2) Zu $x, y, u \in \mathfrak{R}$ gibt es stets genau ein $v \in \mathfrak{R}$, so daß $y = T(u, x, v)$ ist.

(T 3) Zu $u, u', v, v' \in \mathfrak{R}$ mit $u \neq u'$ gibt es genau ein $x \in \mathfrak{R}$, so daß $T(u, x, v) = T(u', x, v')$ ist.

(T 4) Zu $x, x', y, y' \in \mathfrak{R}$ mit $x \neq x'$, $y \neq y'$ existieren (eindeutig bestimmte[10]) Elemente $u, v \in \mathfrak{R}$ mit $y = T(u, x, v)$, $y' = T(u, x', v)$.

Für unsere Zwecke ist es nützlich, folgende Verallgemeinerung des Ternärkörperbegriffes einzuführen: Ist $\mathfrak{R}$ eine Menge, deren Elemente hinsichtlich zweier (nicht notwendig verschiedener) ternärer Verknüpfungen T, T' je einen Ternärkörper bildet und stimmen 0- und 1-Element für beide Verknüpfungen überein, dann nennen wir $\mathfrak{R}$ einen *zweifachen Ternärkörper*. Im Falle $T = T'$ erhalten wir wieder einen gewöhnlichen Ternärkörper.

Die x, y- und die x, z-Ebene sind nach (2.7) in $\mathfrak{G}$ projektive Ebenen, also in $\mathfrak{G}_\omega$ affine Ebenen. In diesen führen wir (in der Bezeichnungsweise von G. PICKERT [4], S. 36) die auf O, U, A_1, E bzw. O, U, A_2, E' bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ ein. Man identifiziert bei der Definition von $\mathfrak{R}_1$ die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ mit den (eigentlichen) Punkten von y, entsprechend die Elemente von $\mathfrak{R}_2$ mit den (eigentlichen) Punkten von z. Durch folgende Abbildungen überträgt man die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ auch auf die x-Achse (vgl. Fig. 5):

$$y \xrightarrow{\varrho} x\colon \quad Y^\varrho = \big([(Y\,U)\,(OE)]\,A_1\big)\,(O\,U) \quad \text{bei} \quad Y \in y;$$

$$z \xrightarrow{\sigma} x\colon \quad Z^\sigma = \big([(Z\,U)\,(OE')]\,A_2\big)\,(O\,U) \quad \text{bei} \quad Z \in z.$$

Dann ergibt $\varrho\,\sigma^{-1}$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{R}_2$. Ist T_1 die ternäre Verknüpfung von $\mathfrak{R}_1$, dann setzen wir für A, X, B auf der y-Achse:

$$T'(A^{\varrho\sigma^{-1}}, X^{\varrho\sigma^{-1}}, B^{\varrho\sigma^{-1}}) = T_1(A, X, B).$$

Ist T die ternäre Verknüpfung von $\mathfrak{R}_2$, dann definieren T und T' auf den Elementen von $\mathfrak{R}_2$ einen zweifachen Ternärkörper $\mathfrak{R}$.

Ist nun P irgendein (eigentlicher) Punkt von $\mathfrak{G}_\omega$, so gibt es nach (2.10) durch P eindeutig bestimmte Parallelebenen zur x, y- bzw. x, z- bzw. y, z-Ebene. Diese schneiden z, y, x bzw. in Punkten Z, Y, X (vgl. (2.11)). Den Punkten Z, Y, X sind aber drei Elemente $Z, Y^{\varrho\sigma^{-1}}, X^{\sigma^{-1}}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{R}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben und setzen (was kaum zu Verwechslungen mit den Geraden x, y, z führen dürfte):

$$x = X^{\sigma^{-1}}, \qquad y = Y^{\varrho\sigma^{-1}}, \qquad z = Z.$$

Wir nennen x, y, z die *Koordinaten* von P. Umgekehrt ist durch jedes Tripel $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ein Punkt P bestimmt, der x, y, z als Koordinaten besitzt. Wir erhalten also eine eineindeutige Abbildung zwischen den Punkten einerseits und den Elementen von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ andererseits.

In der x, y- bzw. der x, z-Ebene haben wir bzw. folgende Geradengleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(E 1)} & y = T'(a_1, x, b_1) \\ \text{(E 2)} & z = T(a_2, x, b_2) \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad (\text{E}^*) \quad x = c$$

[10]) Die Eindeutigkeit läßt sich beweisen.

mit $a_1, b_1, a_2, b_2, c \in \mathfrak{K}$. In $\mathfrak{G}_\omega$ interpretiert stellen diese Gleichungen Ebenengleichungen dar. Da wegen (2.11) jede Ebene mindestens eine Koordinatenebene in einer Geraden schneidet, werden auf diese Weise allen Ebenen von $\mathfrak{G}_\omega$ Gleichungen zugeordnet.

Mit Hilfe dieser Ebenengleichungen lassen sich auch die Geraden algebraisch repräsentieren: Sei zuerst die Gerade a nicht zur y,z-Ebene parallel. Dann bestimmt a nach (2.9) mit A_1 und A_2 je eine Ebene. Diese Ebenen sind verschieden und werden durch Gleichungen (E 1) bzw. (E 2) dargestellt. Wir ordnen a auf diese Weise ein Gleichungspaar

$$\text{(G 1)} \qquad \begin{cases} y = T'(a_1, x, b_1) \\ z = T(a_2, x, b_2) \end{cases}$$

zu. Jedes Gleichungspaar (G 1) stellt umgekehrt eine Gerade dar, weil die beiden in (G 1) aufgeführten Ebenengleichungen verschiedene Ebenen repräsentieren und diese sich in einer Geraden schneiden.

Eine in einer $A_1 A_2$-Ebene gelegene Gerade enthält entweder die Richtung A_1 oder die Richtung A_2. Wir ordnen ihr dementsprechend ein Gleichungspaar

$$\text{(G 2)} \begin{cases} x = c \\ z = c' \end{cases} \quad \text{oder} \quad \text{(G 3)} \begin{cases} x = c \\ y = c'' \end{cases}$$

zu. Umgekehrt stellt wieder jedes Gleichungspaar (G 2) bzw. (G 3) eine Gerade dar. – Damit haben wir:

(3.1) *Die Punkte von $\mathfrak{G}_\omega$ lassen sich so den Elementen von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ zuordnen, daß die Ebenen durch Gleichungen* (E 1), (E 2), (E*) *und die Geraden durch Gleichungspaare* (G 1), (G 2), (G 3) *dargestellt werden.*

(3.2) *Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn ihre Gleichungen einem Paar der folgenden drei Arten angehören:*

a)	$y = T'(a_1, x, b_1)$;	$y = T'(a_1, x, b_1^*)$
b)	$z = T(a_2, x, b_2)$;	$z = T(a_2, x, b_2^*)$
c)	$x = c$;	$x = c^*$.

BEWEIS. Die Gleichungen a) können als Geradengleichungen paralleler Geraden in der Ebene $z=0$ aufgefaßt werden (vgl. [4], S. 35). Da z in den Gleichungen nicht auftritt, sind auch die entsprechenden Ebenen identisch oder besitzen keinen Schnittpunkt, d.h. sind parallel. Genau so schließt man in den Fällen b) und c), daß es sich um parallele Ebenen handelt. – Daß bei allen anderen Kombinationen von Gleichungen keine parallelen Ebenen vorliegen, sieht man so ein: Zwei durch Gleichungen $y = T'(a_1, x, b_1)$; $y = T'(a_1^*, x, b_1^*)$ mit $a_1 \neq a_1^*$ dargestellte Ebenen sind gewiß verschieden und besitzen wegen (T 3) einen Schnittpunkt. Entsprechendes gilt für Gleichungen vom Typ b). Eine Gleichung a) und eine Gleichung b) definieren nach (G 1) eine Gerade. Die ersten Gleichungen von b) und c) bzw. a) und c) ergeben

gemäß (G 2) bzw. (G 3) die durch $z=T(a_2, c, b_2)$; $x=c$ bzw. $y=T'(a_1, c, b_1)$; $x=c$ definierte Gerade. — Damit ist (3.2) bewiesen.

Wir gehen jetzt umgekehrt von einem beliebigen zweifachen Ternärkörper aus und definieren:

Punkte: Elemente von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$.

Ebenen: Lösungsgebilde einer der Gln. (E 1), (E 2), (E*).

Geraden: Gemeinsames Lösungsgebilde eines der Gleichungspaare (G 1), (G 2), (G 3).

Zwei Ebenen $y=T'(a_1, x, b_1)$ und $y=T'(a_1^*, x, b_1^*)$ heißen *parallel*, wenn $a_1=a_1^*$ gilt; ebenso zwei Ebenen $z=T(a_2, x, b_2)$ und $z=T(a_2^*, x, b_2^*)$ bei $a_2=a_2^*$. Zwei Ebenen $x=c$ und $x=c^*$ nennen wir stets parallel. Demgemäß bezeichnen wir zwei Geraden als *parallel*, wenn die entsprechenden Ebenen in (G 1) bzw. (G 2) bzw. (G 3) parallel sind. Bei zwei Geraden (G 2) bzw. (G 3) ist das immer der Fall. — Diese Parallelität ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Wir ordnen den Klassen paralleler Geraden *uneigentliche Punkte (Richtungen)*, den Klassen paralleler Ebenen *uneigentliche Geraden* zu. Die den Geraden (G 2) bzw. (G 3) zugeordneten uneigentlichen Punkte nennen wir insbesondere *Grundpunkte* A_1 bzw. A_2. Die Gesamtheit der uneigentlichen Punkte definiere eine *uneigentliche Ebene* ω. Alle uneigentlichen Punkte und Geraden und nur diese sollen mit ω inzidieren. Die übrigen Inzidenzvorschriften werden in der gewohnten Weise festgelegt. Dann gilt:

(3.3) *Die Punkte, uneigentlichen Punkte, Ebenen und ω bilden zusammen ein 2-Gefüge.*

Beweis. Die Eigenschaft (1) eines Gefüges ist nach Definition der Punkte A_1, A_2 erfüllt.

Um (2) einzusehen, betrachte man zwei verschiedene Punkte $P=(x_0, y_0, z_0)$, $Q=(x_1, y_1, z_1)$. Ist $x_0=x_1$, so liegen P und Q in der Ebene $x=x_0$. Sei daher $x_0\neq x_1$. Die Punkte $(x_0, y_0, 0)$ und $(x_1, y_1, 0)$ bestimmen dann in der Ebene $z=0$ eine Gerade

$$y=T'(a_1, x, b_1).$$

Im Raum definiert diese Gleichung eine Ebene, der P, Q angehören. Entsprechend findet man eine Ebene

$$z=T(a_2, x, b_2),$$

in der P und Q liegen. (2) ist damit für eigentliche Punkte nachgewiesen. Sind P, Q beide uneigentlich, dann ist ω eine Ebene der gewünschten Art. Wir können somit etwa $P=(x_0, y_0, z_0)$ eigentlich und Q uneigentlich annehmen. Ist Q ein Grundpunkt, dann ist die Behauptung evident. Sei daher (G 1) eine Gerade der Richtung Q.

Die Ebene $z=0$ ist eine affine Ebene. In ihr sei

(*) $$y=T'(a_1, x, b_1')$$

eine Parallelgerade zu $y = T'(a_1, x, b_1)$. Entsprechend sei

$$(**) \qquad z = T(a_2, x, b_2')$$

eine Parallelgerade zu $z = T(a_2, x, b_2)$ in der Ebene $y = 0$. (*) und (**) definieren dann zwei Ebenen, in denen P und Q liegen. — Damit ist (2) erledigt.

Sind irgend drei Ebenen gegeben, so gehen zwei von ihnen gleichzeitig durch A_1 bzw. A_2. Verlaufen sie alle drei durch einen dieser Punkte, dann ist (3) erfüllt. Seien daher zuerst zwei (eigentliche) Ebenen durch A_1, aber nicht durch A_2 — wir nennen sie wieder A_2-*Ebenen* — und eine (eigentliche) Ebene durch A_1, aber nicht durch A_2 — eine A_1-*Ebene* — gegeben:

$$(***) \qquad \begin{cases} y = T'(a_1, x, b_1) \\ y = T'(a_1^*, x, b_1^*) \\ z = T(a_2, x, b_2). \end{cases}$$

Dann existiert im Falle $a_1 \neq a_1^*$ nach (T 3) eine gemeinsame Lösung (x_0, y_0) der beiden ersten Gleichungen, so daß $(x_0, y_0, T(a_2, x_0, b_2))$ einen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen darstellt. Ist $a_1 = a_1^*$, so ist die durch die erste und die dritte Gleichung definierte Gerade zu der durch die zweite und dritte Gleichung definierten parallel. Die drei Ebenen haben also einen uneigentlichen Punkt gemein. — Entsprechend schließt man im Falle zweier A_2-Ebenen und einer A_1-Ebene. — Ist eine der drei Ebenen uneigentlich ($= \omega$), so schneiden sich die beiden andern in einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden, die mit ω immer einen Punkt gemeinsam hat. — Damit ist (3) bewiesen.

Wir zeigen jetzt (4). Seien (***) wieder die Gleichungen der drei betrachteten Ebenen. Die oben als vorhanden nachgewiesene gemeinsame Lösung ist bei $a_1 \neq a_1^*$ wegen (T 3) und bei $a_1 = a_1^*$ nach Definition der uneigentlichen Punkte eindeutig bestimmt. Die Voraussetzungen von (4) sind also nicht erfüllbar. Entsprechend sieht man, daß es sich nicht um zwei A_2-Ebenen und eine A_1-Ebene handeln kann. Gehen alle drei Ebenen durch den gleichen Grundpunkt, etwa A_1, und ist (x_0, y_0, z_0) ein gemeinsamer Punkt der Ebenen, so sind die Punkte (x_0, y_0, z) mit beliebigem $z \in \mathfrak{R}$ genau die gemeinsamen (eigentlichen) Punkte je zweier der Ebenen. Haben die Ebenen einen zweiten uneigentlichen Schnittpunkt, dann zeigt eine einfache Überlegung, daß sie zu je zweien parallel sind, sich also in der gleichen uneigentlichen Geraden schneiden. — (4) ist somit gezeigt.

Um den zweiten Teil von (5) einzusehen, betrachten wir die Punkte (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1). Sie bilden zusammen mit A_1, A_2 ein Quintupel der gewünschten Art. Mit Hilfe dieses Quintupels zeigt man auch den ersten Teil von (5). — Damit ist (3.3) bewiesen.

Den durch die Geraden

$$\begin{cases} y = c \\ z = c' \end{cases}$$

bestimmten uneigentlichen Punkt nennen wir wieder U, den Ursprung des Koordinatensystems O. Dann bestimmen O, U, A_1, A_2 in dem 2-Gefüge von (3.3), wenn man noch die Einheitspunkte geeignet wählt, ein Koordinatensystem mit dem zugrunde gelegten zweifachen Ternärkörper als Koordinatenbereich. – (3.1) und (3.3) ergeben:

SATZ 2. *Ein 2-Gefüge $\mathfrak{G}$ läßt sich nach Wegnahme einer $A_1 A_2$-Ebene ω mit Hilfe eines zweifachen Ternärkörpers $\mathfrak{K}$ so beschreiben, daß die Punkte von $\mathfrak{G}_\omega$ eineindeutig den Elementen von $\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}$ entsprechen und die Ebenen durch Gln.* (E 1), (E 2), (E*) *dargestellt werden. Umgekehrt entspricht jedem zweifachen Ternärkörper $\mathfrak{K}$ ein 2-Gefüge, das in dieser Weise mittels $\mathfrak{K}$ beschrieben wird.*

Aus Satz 2 und der Definition eines zweifachen Ternärkörpers folgt:

KORROLAR ZU SATZ 2. *Zwei beliebige projektive Ebenen können als Ebenen eines und desselben 2-Gefüges aufgefaßt werden, sofern sie nur gleichmächtige Geraden besitzen.*

4. Natürliche Ergänzungsräume von Gefügen

Unser nächstes Ziel ist die Darstellung aller Ebenen eines beliebigen affinen Gefüges durch Ebenengleichungen. Wir führen zu diesem Zweck einen Begriff des natürlichen Ergänzungsraumes ein.

In den $A_1 A_2$-Ebenen eines affinen 2-Gefüges $\mathfrak{G}_\omega$ gibt es jeweils nur zwei Parallelscharen von Geraden (durch A_1 bzw. A_2); im allgemeinen besitzen also zwei Punkte keine Verbindungsgerade. Wir erklären daher folgendermaßen neue Geraden: Sei nach Wahl eines Koordinatensystems ε die durch O, E bestimmte A_2-Ebene (Bezeichnungen wie in Abschnitt 3). Wir nennen drei Punkte einer $A_1 A_2$-Ebene *kollinear*, wenn ihre Verbindungsgeraden mit U die Ebene ε in kollinearen Punkten treffen. Wir nehmen in $\mathfrak{G}_\omega$ also eine „Parallelprojektion" von ε auf die $A_1 A_2$-Ebenen in Richtung der x-Achse vor. Dadurch werden die $A_1 A_2$-Ebenen von $\mathfrak{G}_\omega$ zu affinen Ebenen und erhalten die gleiche Struktur wie die A_2-Ebenen. Die schon vorhandenen Geraden sind auch Geraden im neuen Sinne. Sämtliche Bildgeraden zweier paralleler Geraden von ε sollen zueinander *parallel* heißen. Dann zerfallen auch die neuen Geraden in Äquivalenzklassen paralleler Geraden. Jeder solchen Klasse ordnen wir einen uneigentlichen Punkt auf der uneigentlichen Geraden $A_1 A_2$ zu. Schließlich statten wir auch die so erweiterte uneigentliche Ebene ω mit der Struktur von ε aus, indem wir ε etwa von E_1 aus auf ω „projizieren". Mit den so neu definierten Punkten und Geraden wird $\mathfrak{G}$ zu einem *„halbprojektiven Raum"* [11]). Wir nennen ihn einen (den durch ε, U, E_1 bestimmten) *natürlichen* [12]) *Ergänzungsraum* $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$. Entsprechend definieren

[11]) Als halbprojektiven Raum bezeichnet man eine Menge von Punkten und Geraden mit einer Inzidenzbeziehung, so daß zwei verschiedene Punkte stets auf genau einer Geraden liegen und jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält.

[12]) Man kann die $A_1 A_2$-Ebenen statt durch Projektion von ε auf sie auch auf andere Weise zu projektiven Ebenen ergänzen. Dabei kann beispielsweise ein 2-Gefüge, das Subgefüge eines projektiven Raumes ist, einen nicht-desarguesschen halbprojektiven Raum als Ergänzungsraum erhalten. – Demgegenüber nennen wir die hier angeführte Ergänzung „natürlich".

wir als *natürlichen Ergänzungsraum* $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ von $\mathfrak{G}_\omega$ den bei der genannten Ergänzung aus $\mathfrak{G}_\omega$ entstehenden Raum. $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ ist bereits durch $\mathfrak{G}_\omega$, ε, U bestimmt.

Unter einer *Quasiebene* von $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ verstehen wir ein System von Punkten und Geraden der folgenden Art: Gegeben sei eine maximale Menge (= Schar) von untereinander parallelen Geraden, die 1. alle zur x, z-Ebene parallel sind und 2. eine feste evtl. uneigentliche Gerade der y, z-Ebene — die *Trägergerade* der Schar — schneiden (vgl. Fig. 4). Die Gesamtheit aller Punkte der Schargeraden fassen wir als Punktmenge einer Quasiebene auf. Die Gesamtheit aller Geraden, deren Punkte sämtlich in dieser Punktmenge liegen, wählen wir als Geradenmenge der Quasiebene. (Insbesondere gehören dazu die Geraden der genannten Schar sowie deren Trägergerade). Die Inzidenz von Punkten und Geraden mit einer Quasiebene ist dadurch in natürlicher Weise erklärt.

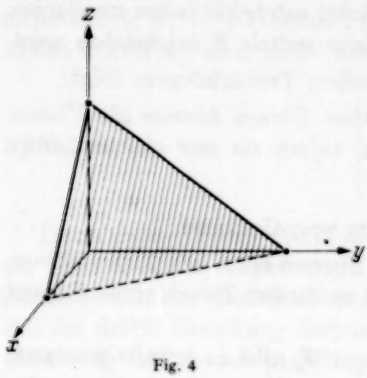


Fig. 4

Wegen (2.2) und (2.6) enthält jede Gefügeebene eine Geradenschar mit den Eigenschaften 1., 2. und kann daher — nach Weglassung ihrer „uneigentlichen Gerade" — als Quasiebene aufgefaßt werden.

Wir nennen zwei Quasiebenen *parallel*, wenn sie entweder zusammenfallen oder keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

(4.1) *Ist ein 2-Gefüge $\mathfrak{G}$ Subgefüge eines Gefüges $\mathfrak{G}'$, dann kann man $\overline{\mathfrak{G}}$ so wählen, daß jede Gerade von $\mathfrak{G}'$ auch Gerade von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Die Gefügeebenen von $\mathfrak{G}'_\omega$ können dann als Quasiebenen von $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ aufgefaßt werden.*

BEWEIS. Der Übergang von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}'$ läßt sich kurz so beschreiben, daß einmal auf $A_1 A_2$ (A_1, A_2 die Grundpunkte von $\mathfrak{G}$) neue Grundpunkte auftreten können und zum anderen nicht auf $A_1 A_2$ gelegene Punkte von $\mathfrak{G}$ zu Grundpunkten werden können. In beiden Fällen gibt es solche neue Ebenen, deren Schnittgebilde mit den Ebenen von $\mathfrak{G}$ keine Geraden im Sinne von $\mathfrak{G}$ sind, also neue Geraden definieren. Existiert ein Grundpunkt von $\mathfrak{G}'$, der nicht auf $A_1 A_2$ liegt, so legt man den Punkt U (s. die Definition eines Ergänzungsraumes) in einen solchen Punkt. Dann gehören auch die neuen Geraden von $\mathfrak{G}'$ definitionsgemäß zu denjenigen von $\overline{\mathfrak{G}}$.

Sind alle Grundpunkte von $\mathfrak{G}'$ kollinear, so kann U beliebig ($\notin A_1 A_2$) gewählt werden: Es treten nämlich in $\mathfrak{G}'$ nur solche neue Geraden auf, die durch einen Grundpunkt verlaufen; verbindet man diese (sofern sie U nicht enthalten) mit U durch Ebenen von $\mathfrak{G}'$, so schneiden diese Ebenen die Ebene ε (s. die Definition eines Ergänzungsraumes) in Geraden.

Der zweite Teil von (4.1) folgt unmittelbar aus der Definition der Quasiebenen als Systeme von Punkten und Geraden.

In der y, z-Ebene von $\mathfrak{G}$ führen wir nun den auf O, E'', A_1, A_2 bezogenen Ternärkörper ein (Fig. 5). Seine Elemente sind mit den eigentlichen Punkten der z-Achse identifiziert. Die ternäre Verknüpfung ist $= T$, wie man folgendermaßen sieht: Projiziert man die x, y-Ebene zuerst parallel zur y-Achse auf ε und dann parallel zur x-Achse auf die y, z-Ebene, dann bleiben alle Punkte auf der z-Achse fest und geht die „Einheitsgerade" OE' in die „Einheitsgerade" OE'' über. Also wird die Figur, mit deren Hilfe man in der x, z-Ebene $T(a, x, b)$ definiert, in eine ebensolche der y, z-Ebene über. — Die Geraden der y, z-Ebene erhalten somit Gleichungen $z = T(a, y, b)$ bzw. $y = c$. — Wir definieren noch:

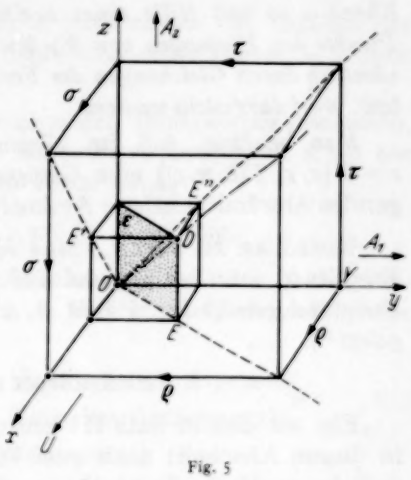


Fig. 5

$y \xrightarrow{\tau} z$: $\quad Y^{\tau} = \big([(Y A_2)(OE'')]\, A_1\big)(OA_2)$

für $Y \in y$.

(4.2) *Es gilt* $\varrho\sigma^{-1} = \tau$.

Beweis. Wir setzen

$$D = (E A_2)(E' A_1).$$

Projiziert man einen Punkt von OD parallel zu den Koordinatenachsen auf die Koordinatenebenen, dann liegen die Bildpunkte jedesmal auf einer der Einheitsgeraden OE, OE', OE'' (vgl. Fig. 5). Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

(4.3) *Quasiebenen, die nicht A_2-Ebenen sind, werden durch Gleichungen*

$$(E_Q) \qquad z = T\big(a, x, T(b, y, c)\big)$$

dargestellt. Umgekehrt repräsentiert jede derartige Gleichung eine Quasiebene.

Beweis. Eine Gleichung (E_Q) stellt diejenige Quasiebene dar, deren definierende Schargeraden durch Gleichungen

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = T\big(a, x, T(b, y_0, c)\big) \end{cases}$$

bei beliebig gewähltem y_0 dargestellt werden und deren Trägergeraden Gleichungen

$$(*) \qquad \begin{cases} z = T(b, y, c) \\ x = 0 \end{cases}$$

besitzt.

Ist umgekehrt eine Quasiebene gegeben, die nicht A_2-Ebene ist, so besitzt die Trägergerade der zugehörigen definierenden Parallelenschar Gln. $(*)$. Durch jeden Punkt (O, y_0, z_0) der Trägergerade verläuft eine Schargerade, die also Gleichungen

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = T(a, x, z_0) \end{cases}$$

haben muß. Dabei hängt a wegen der Parallelität der Schargeraden nicht von y_0 ab. Beachtet man noch, daß stets $z_0 = T(b, y_0, c)$ gilt, so hat man, daß ein Punkt (x, y, z) genau dann auf der Quasiebene liegt, wenn er der Gleichung $z = T(a, x, T(b, y, c))$ genügt. — Damit ist (4.3) bewiesen.

Aus Satz 2, (4.1) und (4.3) folgt:

SATZ 3. *Jedes Gefüge läßt sich nach Wegnahme einer „uneigentlichen" Ebene ω so mit Hilfe eines zweifachen Ternärkörpers $\mathfrak{R}$ beschreiben, daß die Punkte den Elementen von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ eineindeutig entsprechen und die Ebenen sämtlich durch Gleichungen der Form $z = T(a, x, T(b, y, c))$ bzw. $y = T'(d, x, e)$ bzw. $x = f$ dargestellt werden.*

Man beachte, daß im allgemeinen nicht umgekehrt jeder Gleichung $z = T(a, x, T(b, y, c))$ eine Gefügeebene entspricht. Darüber geben die folgenden Abschnitte nähere Auskunft.

KORROLAR ZU SATZ 3. *Sind die Punkte O, D, U, A, A' zu je vieren nicht komplanar, sonst beliebig und sind A, A' Grundpunkte, dann wird durch dieses Quintupel gemäß Fig. 5 (mit A, A' statt A_1, A_2) ein Koordinatensystem festgelegt*[13]).

5. Ternärkörper und cartesische Gruppen

Ehe wir den in Satz III genannten Stufenaufbau behandeln, geben wir in diesem Abschnitt noch zwei Vorstufen an. Einmal interessiert der Fall, daß der zweifache Ternärkörper, der ein affines Gefüge beschreibt, ein (einfacher) Ternärkörper ist; zum andern charakterisieren wir den Fall, daß der Koordinatenbereich eine „cartesische Gruppe" (s. weiter unten) ist.

SATZ 4. *Ist $\mathfrak{G}$ ein 2-Gefüge und $\mathfrak{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\mathfrak{G}_\omega$ läßt sich (gemäß Satz 2) mit Hilfe eines Ternärkörpers beschreiben $(T = T')$.

2. Es gibt in einem $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ eine Quasiebene, die affine Ebene, aber keine Ebene von $\mathfrak{G}_\omega$ ist.

BEWEIS. *2.→1.* Die vorhandene affine Ebene α schneidet jede A_2-Ebene in einer Geraden, denn nach (2.6) gibt es zwei gemeinsame Punkte der Ebenen, und da $\overline{\mathfrak{G}}$ ein halbprojektiver Raum ist, existiert die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte und ist eindeutig bestimmt; ferner liegt sie in beiden Ebenen. Man kann das Koordinatensystem so wählen, daß O und D (s. Fig. 5) in α liegen und die Schargeraden die Richtung U besitzen. Projiziert man dann in $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ die x, z-Ebene parallel zur y-Achse auf α und dann parallel zur z-Achse auf die x, y-Ebene, dann erfährt $\mathfrak{R}$ (also die z-Achse) die Abbildung τ^{-1}. Genauer hat man hierbei eine Isomorphie zwischen dem auf O, E, U, A_1 bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_1$ und dem auf O, E', U, A_2 bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_2$.

[13]) Wir werden das Koordinatensystem jeweils den Zwecken entsprechend wählen, beispielsweise U in einen Grundpunkt legen, falls ein nicht mit A, A' kollinearer Grundpunkt existiert.

Nach (4.2) ist aber $\varrho\sigma^{-1}=\tau$, so daß $T(a, x, b)=T'(a, x, b)$ für beliebige Elemente $a, x, b\in\mathfrak{R}$ folgt, d. h. $\mathfrak{R}$ ein Ternärkörper ist.

1.→2. Wir betrachten in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ die Quasiebene $z=y$. Sie sei mit α bezeichnet. Offenbar liegen sämtliche Geraden

$$\begin{cases} y=T(a, x, b) \\ z=T(a, x, b) \end{cases}$$

in α, so daß man sowohl alle Geraden der x, y-Ebene wie alle Geraden der x, z-Ebene auf α projizieren kann. α ist daher eine affine Ebene. — Damit ist Satz 4 bewiesen.

Wir stellen jetzt die Definitionen für die speziellen Ternärkörper zusammen, die wir in diesem und in den folgenden Abschnitten benötigen: $\mathfrak{R}$ sei ein (einfacher) Ternärkörper mit aufspaltbarer Verknüpfung:

$$T(u, v, w)=u\,v+w, \qquad u, v, w\in\mathfrak{R} \qquad \text{beliebig.}$$

$\mathfrak{R}$ heißt *cartesische Gruppe*, wenn die Addition assoziativ ist, $\mathfrak{R}$ also hinsichtlich der Addition eine Gruppe bildet. — Weiter interessieren folgende Rechenregeln:

(RD) $u(v+w)=u\,v+u\,w$ (Rechtsdistributivgesetz)
(LD) $(u+v)\,w=u\,w+v\,w$ (Linksdistributivgesetz)
(A) $(u\,v)\,w=u(v\,w)$ (Assoziativgesetz)

Eine cartesische Gruppe heißt

Rechtsquasikörper, wenn (RD) erfüllt ist,
Linksquasikörper, wenn (LD) gilt,
Assoziativer Rechtsquasikörper, wenn (RD) und (A) gelten,
Schiefkörper, wenn (RD), (LD) und (A) richtig sind.

In allen vier Fällen ist die *Addition kommutativ* (vgl. [4], S. 91).

Wir charakterisieren jetzt den Fall der cartesischen Gruppe:

Satz 5. *Ist $\mathcal{G}$ ein 2-Gefüge und $\mathcal{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge, dann entsprechen sich eineindeutig folgende Bedingungen:*

1. In einem natürlichen Ergänzungsraum $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ von $\mathcal{G}_\omega$ gibt es eine maximale Schar zu je zweien paralleler Quasiebenen, die affine Ebenen, aber keine Ebenen von $\mathcal{G}_\omega$ sind.

2. $\mathcal{G}_\omega$ läßt sich (gemäß Satz 2) mit Hilfe einer cartesischen Gruppe beschreiben.

1.→2 [14]). Wir führen in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ ein Koordinatensystem so ein, daß der Punkt U und der uneigentliche Punkt der Geraden OD (s. Korrolar zu Satz 3) auf der gemeinsamen uneigentlichen Geraden der angenommenen affinen Ebenen liegen. Dann erhalten diese Ebenen Gleichungen

$$z=y+c,$$

sofern man

$$T(1, y, c)=y+c$$

[14]) Diesen Teil des Beweises sowie andere wertvolle Bemerkungen verdankt Verf. dem Referenten.

setzt. Ihr Schnitt mit einer A_2-Ebene $y = T(a, x, b)$ muß stets eine Gerade sein, d.h. es gibt a', b' mit

$$z = T(a, x, b) + c = T(a', x, b')$$

für alle x. Dabei hängt a' nicht von c ab (vgl. (4.3)). Mit $x = 0$ erhält man $b + c = b'$ und $c = 0$ liefert $T(a, x, b) = T(a', x, b)$, also $a = a'$. Ferner ergibt $a = 1$ die Assoziativität der Addition:

$$(x + b) + c = x + (b + c).$$

Setzt man noch

$$T(a, x, 0) = a\,x,$$

so folgt mit $b = 0$:

$$a\,x + c = T(a, x, c),$$

d.h. die Verknüpfung T ist aufspaltbar. $\mathfrak{R}$ ist somit cartesische Gruppe.

2.→1. Ist $\mathfrak{R}$ eine cartesische Gruppe, so kann man die ternäre Verknüpfung aufspalten:

$$T(a, x, b) = a\,x + b,$$

wo $\mathfrak{R}$ bezüglich der Addition eine Gruppe bildet. Wir betrachten die Ebenen

$$z = y + c$$

mit beliebigem $c \in \mathfrak{R}$. Schneidet man mit einer beliebigen A_2-Ebene $y = a\,x + b$, so erhält man

$$z = (a\,x + b) + c = a\,x + (b + c),$$

so daß das Schnittgebilde eine Gerade ist. Daraus folgt 1.

6. Kollineare Grundpunkte. Linksquasikörper

Als *Kern* $\mathfrak{R}_0$ eines Linksquasikörpers $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller $x \in \mathfrak{R}$ mit

$$\text{(K)} \qquad \begin{cases} (x\,a)\,b = x\,(a\,b) \\ x\,(a + b) = x\,a + x\,b \end{cases}$$

für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{R}$. Definiert man in $\mathfrak{R}$ eine Multiplikation $a * b$ durch

$$a * b = b\,a,$$

so geht $\mathfrak{R}$ mit dieser neuen Multiplikation in einen Rechtsquasikörper und $\mathfrak{R}_0$ in den Kern des Rechtsquasikörpers über (vgl. [4], S. 204). *Man ersieht also aus den Ergebnissen über Translationsebenen* ([4], S. 204), *daß* $\mathfrak{R}_0$ *ein Schiefkörper ist.*

Wir definieren jetzt folgenden Operator (erklärbar in jeder cartesischen Gruppe):

$$\langle x, a, b, c \rangle \equiv [x\,(a + c)]\,b - x\,(a\,b + c) - (x\,c)\,b + x\,c.$$

Dann gilt:

(6.1) *Der Kern* $\mathfrak{K}_0$ *eines Linksquasikörpers* $\mathfrak{K}$ *besteht aus allen Elementen* x *mit*

(K′) $$\langle x, a, b, c\rangle = 0.$$

für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathfrak{K}$.

Beweis. Da (K′) sofort aus (K) folgt, brauchen wir nur zu zeigen, daß (K) eine Folge von (K′) ist. $(xa)b = x(ab)$ ergibt sich aus (K′), wenn man $c = 0$ setzt. Um die zweite Regel einzusehen, setze man $a = c$. Dann folgt:

$$x(2a)\,b - x(ab + a) - xab + xa = 0.$$

Nimmt man $x \cdot 2 = 2 \cdot x$ als bewiesen an, dann gilt:

$$x(ab + a) = x(ab) + xa.$$

Da ab bei festem $a \neq 0$ alle Werte von $\mathfrak{K}$ durchläuft ($ab = u$ ist stets nach b auflösbar), hat man damit die gewünschte Beziehung.

Es ist also noch $x \cdot 2 = 2x$ nachzuweisen (d.h. $x(1+1) = x + x$). Wir setzen zu diesem Zweck in (K′) $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$. Das ergibt

$$\begin{aligned} &x(-1+2)\,2 - x(-1\cdot 2 + 2) - (x\cdot 2)\,2 + x\cdot 2 \\ &= x\cdot 2 + x\cdot 2 - (x\cdot 2)\,2 = (2x - x\cdot 2)\,2 = 0. \end{aligned}$$

Im Falle Char. $\mathfrak{K} \neq 2$ folgt daraus $2x = x \cdot 2$. Im Falle Char. $\mathfrak{K} = 2$ ist diese Beziehung aber von selbst erfüllt. — Damit ist der Beweis von (6.1) vollendet.

Satz 6. *Sei* $\mathfrak{G}$ *ein 2-Gefüge,* $\mathfrak{G}_\omega$ *ein zugehöriges affines Gefüge. Dann sind folgende Bedingungen gleichwertig:*

1. $\mathfrak{G}$ *ist Subgefüge eines Projektiven Gefüges* $\mathfrak{G}'$ *mit* $n \geqq 3$ *kollinearen Grundpunkten.*

2. $\mathfrak{G}_\omega$ *läßt sich mit Hilfe eines Linksquasikörpers beschreiben, dessen Kern* $\mathfrak{K}_0$ *mindestens* $n - 1 \geqq 2$ *Elemente besitzt.*

Beweis. *1.→2.* $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ sei ein natürlicher Ergänzungsraum von $\mathfrak{G}_\omega$ und $\mathfrak{K}$ sei der zugehörige zweifache Ternärkörper. Wir können die Koordinateneinführung so vornehmen, daß OE'' einen (uneigentlichen) Grundpunkt, etwa A_3, als Richtung enthält. Dann ist nach Satz 5 $\mathfrak{K}$ eine cartesische Gruppe.

Nach (4.1) können die Ebenen von $\mathfrak{G}'_\omega$ als Quasiebenen von $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ aufgefaßt werden. Insbesondere erhalten gemäß Satz 3 die A_3-Ebenen Gleichungen

$$z = dx + y + e.$$

Wir nehmen speziell $e = 0$ an. Der Schnitt mit $y = ax$ ergibt nach Annahme eine Gerade, d.h. es gilt

$$z = dx + ax = ux$$

für ein bestimmtes u identisch in x. Für $x = 1$ erhält man $u = d + a$, es folgt also

$$dx + ax = (d + a)\,x$$

für alle $d, x, a \in \mathfrak{K}$, d.h. $\mathfrak{K}$ ist ein Linksquasikörper.

Durch O gehende A_i-Ebenen von $\mathfrak{G}'_\omega$ besitzen in $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ (bei gleichem $i \geqq 3$) Gleichungen

$$(*) \qquad z = dx + ky$$

mit demselben $k \neq 0$. Schneidet man mit einer beliebigen A_2-Ebene

$$(**) \qquad y = ax + c,$$

so folgt aus der Annahme 1.:

$$z = dx + k(ax + c) = ux + v$$

für ein Paar $u, v \in \mathfrak{R}$ identisch in x. Mit $x = 0$ erhält man $v = kc$ und mit $x = 1$ ergibt sich dann

$$u = d + k(a + c) - kc,$$

also

$$dx + k(ax + c) = dx + [k(a + c)]x - (kc)x + kc$$

oder

$$[k(a + c)]x - k(ax + c) - (kc)x + kc = 0,$$

also

$$\langle k, a, x, c \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad a, x, c \in \mathfrak{R},$$

d.h. nach (5.1): $k \in \mathfrak{R}_0$. Da jedem Grundpunkt $\neq A_2$ ein solches k zugeordnet ist, folgt 2.

2.→1. Sei umgekehrt $\mathfrak{R}$ ein Linksquasikörper und sei $k \in \mathfrak{R}_0$. Dann ergibt der Schnitt von (*) und (**) nach den Regeln (K):

$$z = dx + k(ax + c) + e = (d + ka)x + (kc + e),$$

d.h. das Schnittgebilde ist eine Gerade. Zu jedem k existiert also eine Richtung $A \neq A_2$ ($A \in \mathfrak{A}$), derart, daß alle Quasiebenen durch A affine Ebenen sind.

Bisher ist nur gezeigt, daß die A-Ebenen (wir bezeichnen so die Quasiebenen durch A) mit $A \neq A_1, A_2$ die A_1- und die A_2-Ebenen in Geraden schneiden. Da jedoch in $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ je zwei Punkte genau eine Verbindungsgerade besitzen, ergibt ein einfacher Schluß, daß auch eine A-Ebene stets eine A'-Ebene ($A' \neq A, A_1, A_2$) in einer Geraden schneidet. Daraus folgt 1.

$\mathfrak{R}_0$ enthält stets die Elemente 0, 1. Daher liefert Satz 6:

KORROLAR ZU SATZ 6. *Ein affines 2-Gefüge $\mathfrak{G}_\omega$ wird dann und nur dann durch einen Linksquasikörper beschrieben, wenn $\mathfrak{G}$ Subgefüge eines Gefüges mit mindestens 3 kollinearen Grundpunkten ist.*

Ist das in Satz 6 genannte Gefüge $\mathfrak{G}'$ insbesondere maximal, so bezeichnen wir n als die *lineare Ordnung l* von $\mathfrak{G}'$ und von jedem Subgefüge von $\mathfrak{G}'$, insbesondere also von $\mathfrak{G}$. Dann folgt aus Satz 6:

(6.2) *Zwischen der linearen Ordnung l eines Gefüges $\mathfrak{G}$ mit kollinearen Grundpunkten und der Anzahl $|\mathfrak{R}_0|$ der Elemente des Kerns eines Linksquasikörpers, der ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriges affines Gefüge beschreibt, besteht bei $l \geqq 3$ die Beziehung*

$$l = |\mathfrak{R}_0| + 1.$$

Im Falle endlicher linearer Ordnung folgt aus (6.2):

(6.3) *Ist die lineare Ordnung l von $\mathfrak{G}$ eine ungerade Zahl, dann besitzt ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriger Linksquasikörper stets die Charakteristik 2.*

Ferner ergibt (6.2) noch:

(6.4) *Ein Gefüge besitzt unendliche lineare Ordnung, wenn es durch einen Linksquasikörper mit Charakteristik 0 beschrieben wird.*

Ein Subgefüge eines projektiven dreidimensionalen Raumes P_3 besitzt stets eine lineare Ordnung, die mit der Anzahl der Punkte einer Geraden von P_3 übereinstimmt. (6.3) stellt also eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache dar, daß die Zahl der Punkte auf einer Gerade in einem endlichen dreidimensionalen projektiven Raum bzw. in einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene nur dann ungerade ist, wenn der zugehörige Koordinatenschiefkörper die Charakteristik 2 besitzt.

(6.5) *Die Aussage von Satz* III (*Abschnitt* 1) *gilt für die beiden ersten Tabellenzeilen.*

Beweis. Man wählt zunächst gemäß (2.1) ein 2-Gefüge $\mathfrak{G}^*$ aus, das Subgefüge von $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ ist und betrachtet einen nach (4.1) existierenden natürlichen Ergänzungsraum $\overline{\mathfrak{G}^*}$ von $\mathfrak{G}^*$, in dem die Geraden von $\mathfrak{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ ebenfalls Geraden sind. Zeichnet man eine $A_1 A_2$-Ebene ω von $\mathfrak{G}^*$ aus, so lassen sich die Ebenen von $\mathfrak{G}'_\omega(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ als Ebenen von $\overline{\mathfrak{G}^*_\omega}$ auffassen und algebraisch beschreiben. Die Voraussetzungen von Satz 6 gelten dann jeweils gleichzeitig für $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$. Daraus ergibt sich die Behauptung (vgl. auch Korrolar zu Satz 6).

7. Nichtkollineare Grundpunkte. Assoziative Koordinatenbereiche

Kollineare Grundpunkte nehmen, wie wir sahen, nur geringen Einfluß auf die Assoziativität der Koordinatenbereiche $\mathfrak{K}$. Lediglich der Kern $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ muß bei $n \geqq 4$ groß genug sein, weil er mindestens $n-1$ Elemente enthält. Anders verhält es sich bei den Gefügen mit nichtkollinearen Grundpunkten, die wir jetzt betrachten.

Satz 7. *Sei $\mathfrak{G}$ ein 2-Gefüge, $\mathfrak{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge. Dann besagen die folgenden Bedingungen das Gleiche:*

1. $\mathfrak{G}$ ist Subgefüge eines Gefüges $\mathfrak{G}'$ mit drei nichtkollinearen Grundpunkten.

2. $\mathfrak{G}_\omega$ läßt sich mit Hilfe eines assoziativen Rechtsquasikörpers beschreiben.

Beweis. *1.*$\rightarrow$*2.* In $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ setzen wir $U = A_3$ und haben zunächst nach Satz 5, daß $\mathfrak{K}$ eine cartesische Gruppe ist. In den A_2-Ebenen von $\mathfrak{G}_\omega$ gilt daher der affine kleine Desargues mit Zentrum A_2 (vgl. den Beweis von Satz 5), in den A_1-Ebenen der nämliche Satz mit Zentrum A_1. Da man jetzt in $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ alle diese Ebenen in der Richtung U auf die Ebenen durch A_1, A_2 projizieren kann, gilt in den letzteren der affine kleine Desargues für zwei verschiedene Zentren. Es handelt sich also um Translationsebenen ([4], S. 67 und 199f.) und $\mathfrak{K}$ ist daher ein Rechtsquasikörper.

Um die Assoziativität einzusehen, schneide man eine Ebene $z = a\,y$ mit einer Ebene $y = b\,x$. Man erhält

$$z = a\,(b\,x) = u\,x$$

für ein $u \in \mathfrak{R}$ identisch in x. Mit $x = 1$ folgt $u = a\,b$. Da a, b, x beliebig sind, liefert das die behauptete Beziehung.

2.→1. Ist

$$z = a\,y + b$$

eine beliebige Quasiebene, die U als Richtung enthält, und schneidet man sie mit der A_2-Ebene

$$y = c\,x + d,$$

so folgt aus der Assoziativität und Rechtsdistributivität:

$$z = a\,(c\,x + d) + b = (a\,c)\,x + (a\,d + b).$$

Das Schnittgebilde ist also wieder eine Gerade. Das Gleiche folgt für den Schnitt mit A_1-Ebenen. Man kann daher U als dritten Grundpunkt auffassen und erhält ein Gefüge $\mathscr{G}'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Zum Schluß folgen die angekündigten Kennzeichnungen der dreidimensionalen projektiven Räume (Satz I und Satz II im 1. Abschnitt):

SATZ 8. *Folgende Eigenschaften eines 2-Gefüges $\mathscr{G}$ sind gleichwertig:*

1. $\mathscr{G}$ ist Subgefüge eines 4-Gefüges $\mathscr{G}'$ mit nicht lauter kollinearen Grundpunkten.

2. In $\mathscr{G}$ gilt der Oktaedersatz (s. *Abschnitt* 1).

3. $\mathscr{G}$ ist Subgefüge eines dreidimensionalen projektiven Raumes, d.h. jedes zugehörige affine Gefüge $\mathscr{G}_\omega$ wird durch einen Schiefkörper beschrieben.

BEWEIS. *1.→3.* Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Grundpunkte A von $\mathscr{G}'$ sind nicht komplanar.

b) Die Grundpunkte A sind komplanar, aber zu je dreien nicht kollinear.

c) Drei der Grundpunkte A sind kollinear.

In allen drei Fällen können wir etwa annehmen, daß A_1, A_2, A_3 nicht kollinear sind (A_1, A_2 die Grundpunkte von $\mathscr{G}$). Dann folgt nach Satz 7, daß man bei geeigneter Koordinateneinführung einen assoziativen Rechtsquasikörper als Koordinatenbereich erhält. Wir haben daher nur noch das Linksdistributivgesetz einzusehen:

a) In einem $\overline{\mathscr{G}_\omega}$ setzen wir $O = A_4$. Dann schneiden sich $z = a\,x + b\,y$ und $y = x$ stets in einer Geraden, also gilt

$$z = a\,x + b\,x = u\,x = (a + b)\,x$$

für alle $a, b, x \in \mathfrak{R}$.

b) Wir wählen A_4 in einem $\overline{\mathscr{G}_\omega}$ als Richtung der „Raumdiagonalen" OD des „Einheitswürfels" (vgl. Fig. 5). Dann ist

$$z = a\,x + (1 - a)\,y$$

eine A_4-Ebene (man bestimmt b in $z=ax+by$, indem man $D=(1,1,1)$ einsetzt). Sie schneidet $y=bx$ in einer Geraden, also gilt

$$z=ax+(1-a)(bx)=ux=[a+(1-a)b]x.$$

Setzen wir $c=(1-a)b$, dann durchläuft c bei beliebigem, festem $a\neq 1$ sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$ (man kann stets nach b auflösen), also gilt

$$ax+cx=(a+c)x$$

für alle $a, c, x\in\mathfrak{R}$ (bei $a=1$ vertausche man a und c).

c) In $\mathfrak{G}'$ sind jetzt A_1, A_2, A_4 kollinear, d.h. man kann $\mathfrak{G}_\omega$ mit Hilfe eines Linksquasikörpers beschreiben. Wählt man dabei U als Richtung A_3, so erhält man einen Koordinatenbereich, der zugleich Links- und assoziativer Rechtsquasikörper, also Schiefkörper ist.

3.→1. und *3.→2.* folgen aus bekannten Eigenschaften des projektiven Raumes.

2.→3. Der Oktaedersatz läßt sich als Veblen-Youngsches Viereckaxiom deuten ([*6*], S. 16):

(VY) *Sind keine drei der Punkte A, B, C, D kollinear und schneiden sich AB und CD, dann schneiden sich auch AC und BD,*

jedoch mit der Einschränkung, daß keins der Paare A, B; C, D; A, C; B, D in einer A_1A_2-Ebene liegt (sonst existieren AB usw. im allgemeinen auch gar nicht). In einem $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ wenden wir diese Eigenschaft folgendermaßen an: Sei eine beliebige Quasiebene gegeben, seien a, b zwei ihrer Schargeraden und sei g ihre Schnittgerade mit ε, wo ε die zur Definition von $\overrightarrow{\mathfrak{G}_\omega}$ benutzte Ebene ist. Ist $P\in a$; $Q\in b$ und liegen P, Q nicht in der gleichen A_1A_2-Ebene, dann schneidet PQ nach (VY) die Gerade g in einem Punkt R (Fig. 6). Dann trifft aber PQ, wieder nach (VY), auch jede weitere Schargerade der Quasiebene. Folglich schneiden sämtliche A_1- und sämtliche A_2-Ebenen die Quasiebene in Geraden. — Hingegen wissen wir — nach Definition von $\overline{\mathfrak{G}_\omega}$ — von den A_1A_2-Ebenen nur, daß sie die Quasiebenen durch U in Geraden schneiden[15]). Zunächst hat man somit nach Satz 7 (mit $U=A_3$), daß $\mathfrak{R}$ ein assoziativer Rechtsquasikörper ist.

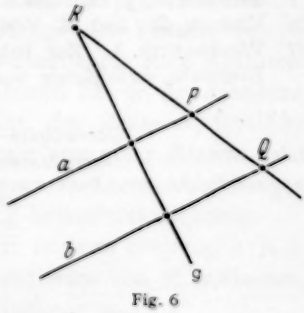


Fig. 6

Wir betrachten eine Quasiebene

$$z=ax+y$$

[15]) Für den Nachweis, daß die A_1A_2-Ebenen auch die anderen Quasiebenen in Geraden schneiden, scheinen die synthetischen Schlußweisen zu versagen. Hier kommt die Koordinatenrechnung zu Hilfe.

und schneiden sie mit der A_2-Ebene $y = b\,x$. Nach dem eben Bewiesenen ist das Schnittgebilde dieser Ebenen eine Gerade, also gilt

$$z = a\,x + b\,x = u\,x = (a + b)\,x$$

für beliebige $a, b, x \in \mathfrak{K}$. — Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Satz 8 werden $\mathcal{G}_\omega$ und $\mathcal{G}'_\omega$ durch den gleichen Schiefkörper beschrieben. Daraus (oder auch aus einer konstruktiven Überlegung mit Hilfe des Begriffes eines natürlichen Ergänzungsraumes) folgt:

(7.1) *Ein projektiver dreidimensionaler Raum ist durch jedes 2-Gefüge, das Subgefüge von ihm ist, bereits bestimmt.*

Wegen (7.1) kann man die Bedingungen 1., 2. von Satz 8 als Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume bezeichnen.

Abschließend zeigen wir:

(7.2) *Die Aussage von Satz* III (*Abschnitt* 1) *gilt für die 3. und 4. Tabellenzeile. Daraus folgt auch Satz* I (*Abschnitt* 1).

BEWEIS. Man stellt eine entsprechende Überlegung an wie in (6.5), wobei man die Sätze 7 und 8 benutzt.

Literatur

[1] EWALD, G.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität in Möbius-Ebenen. Math. Ann. **142**, 1—21 (1961).
[2] EWALD, G.: Schwach projektive Räume über dreifachen Ternärkörpern. Vortragsauszug, Utrecht 1959.
[3] HALL, M.: Projective Planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943).
[4] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.
[5] SPERNER, E.: Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen. J. für reine u. angew. Math. **204**, 205—215 (1959).
[6] VEBLEN, O., and W. YOUNG: Projective Geometry, 2. Aufl., Bd. I. Boston 1916.
[7] WINTERNITZ, A.: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Einführung idealer Elemente, unabhängig von der Anordnung. Ann. of Math. **41**, 365—390 (1940).

Oberwolfach-Walke, Mathematisches Forschungsinstitut
bzw. Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. Juni 1960)

EWALD, G.
Math. Zeitschr. 75, 419–425 (1961)

Translationsgruppen in verallgemeinerten dreidimensionalen projektiven Räumen*)

Von
GÜNTER EWALD

Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit [2] haben wir verallgemeinerte dreidimensionale projektive Räume, sog. *projektive Gefüge* oder *n-Gefüge* eingeführt und betrachtet. Wir studieren in der vorliegenden Arbeit Translationsgruppen in projektiven Gefügen. Grundlage hierfür bieten zwei Sätze über die Erweiterung von Translationen projektiver Ebenen zu solchen von projektiven Gefügen (s. unten Sätze 1 und 3).

Es ergeben sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit den Translationsgruppen von Translationsebenen[1]). Einmal lassen sich die n-Gefüge mit kollinearen Grundpunkten und $n \geqq 3$ durch direkte Produkte solcher Gruppen kennzeichnen (Satz 2); zum andern geben wir ein räumliches Gegenstück zu den Translationsgruppen von Translationsebenen an (Satz 4).

Eine Kenntnis der Arbeit [2] wird vorausgesetzt, insbesondere im Hinblick auf Bezeichnungen.

1. Kollineationen und Translationen in Gefügen

Unter einer *Kollineation* eines Gefüges $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ (s. [2], Abschnitt 1) verstehen wir eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathcal{G}$ auf sich, die kollineare Punkte in kollineare Punkte überführt. Eine Kollineation heiße *zentral*, wenn sie alle Punkte einer vorgegebenen Ebene, der *Fixebene*, und alle Geraden durch einen vorgegebenen Punkt, das *Zentrum*, festläßt. Liegt das Zentrum auf der Fixebene, so sprechen wir von einer *Elation* oder einer *Translation* (von einer Elation meist dann, wenn mehrere Abbildungen dieser Art mit verschiedenen Fixebenen gleichzeitig betrachtet werden).

Sei $\mathcal{G}_\omega$ ein zu $\mathcal{G}$ gehöriges affines Gefüge. Wir können diejenigen Kollineationen von $\mathcal{G}$, die ω festlassen, auch als Kollineationen von $\mathcal{G}_\omega$ auffassen. Insbesondere gilt das für die Translationen mit Fixebene ω.

In einer projektiven Ebene definieren wir die *(ebenen) Kollineationen* in derselben Weise als eineindeutige geradentreue Abbildungen der Menge der Punkte auf sich. Läßt eine Kollineation alle Punkte einer Geraden g und alle Geraden durch einen Punkt C fest, so heißt sie *(ebene) zentrale Kollineation* mit *Zentrum* C und *Achse* g. Ist $C \in g$, so sprechen wir wieder von einer *Elation* oder einer *Translation*.

*) Habilitationsschrift Mainz 1960, II. Teil (vgl. [2]).

[1]) Siehe J. ANDRÉ [1]; vgl. G. PICKERT [3], S. 199f.

Die identische Abbildung bezeichnen wir sowohl bei den ebenen wie bei den räumlichen Kollineationen mit 1. — Aus den Definitionen folgt:

(1.1) *Eine zentrale Kollineation eines Gefüges induziert in jeder projektiven Ebene, die durch das Zentrum verläuft, eine ebene zentrale Kollineation mit gleichem Zentrum und einer in der Fixebene der räumlichen zentralen Kollineation gelegenen Achse.*

Für Elationen gilt folgende teilweise Umkehrung von (1.1):

SATZ 1. *In einem Gefüge $\mathfrak{G}$, dessen Grundpunkte in einer Ebene α liegen, läßt sich jede Elation σ einer A-Ebene ε mit Zentrum A und einer mit A und α inzidenten Achse eindeutig zu einer Elation des Gefüges mit α als Fixebene und A als Zentrum erweitern.*

BEWEIS. Seien A_1, A_2 Grundpunkte und sei etwa $A_2 \notin \varepsilon$. Ist X ein beliebiger, nicht auf $A_1 A_2$ gelegener Punkt von $\mathfrak{G}$, so setzen wir („$a\ \varepsilon$" bedeute den Schnittpunkt von a und ε):

$$X^\sigma = (A_1 X)\,([(A_2 X)\,\varepsilon]^\sigma A_2)$$

(vgl. Fig. 1). Dieser Punkt existiert, da A_1, $(A_2 X)\,\varepsilon$ und $[(A_2 X)\,\varepsilon]^\sigma$ nach Annahme kollinear sind, also zusammen mit X in einer Ebene durch A_2 liegen. Für $X \in A_1 A_2$ setzen wir $X^\sigma = X$. Dann ist σ für alle Punkte von $\mathfrak{G}$ erklärt und stellt für sie eine eineindeutige Abbildung dar. α bleibt bei σ punktweise fest. Alle übrigen Ebenen durch A_1 gehen als Ganzes in sich über, während die Ebenen durch A_2 untereinander vertauscht werden. Mithin gehen alle Geraden in Geraden über, die Schnitt einer A_1- und A_2-Ebene bzw. Schnitt zweier A_1-Ebenen bzw. Schnitt zweier A_2-Ebenen sind. Es bleibt also noch der Fall zu untersuchen, daß eine Gerade a die Gerade $A_1 A_2$ schneidet. Wir legen durch a eine Ebene β, die weder A_1 noch A_2 enthält. γ sei die durch a, A_1, A_2 bestimmte Ebene. Punkte von β gehen bei σ wieder in komplanare Punkte über (man lege jeweils Geraden von β, die $A_1 A_2$ nicht treffen, hindurch; diese schneiden sich zu je zweien, also schneiden sich auch ihre Bildgeraden). Da γ bei σ in sich übergeht, wird a auf eine Gerade abgebildet.

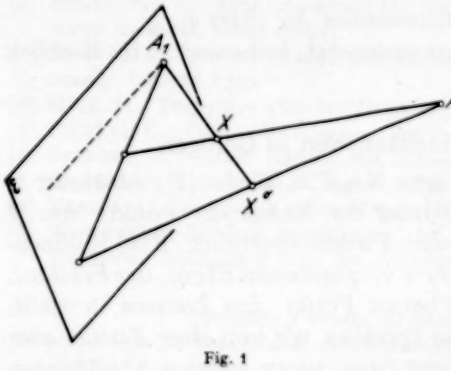


Fig. 1

Ist σ' eine weitere Elation von $\mathfrak{G}$ mit Fixebene α, die in ε die ebene Elation σ induziert, dann liefert $\sigma'\,\sigma^{-1}$ die Identität in ε und in α, läßt also sämtliche Punkte von $\mathfrak{G}$ fest (man lege durch einen beliebigen Punkt X zwei Geraden, die ε und α je in verschiedenen Punkten treffen). Folglich gilt $\sigma' = \sigma$. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist α eine Ebene, die sämtliche Grundpunkte enthält, dann bezeichnen wir mit $\mathsf{T}_A(\alpha)$ die von allen Translationen mit Zentrum A und Fixebene α erzeugte Gruppe. $\mathsf{T}_A(\alpha)$ induziert in einer A-Ebene nach (1.1) eine ebene Translationsgruppe $\mathsf{T}'_A(\alpha)$. Erweitert man diese wiederum gemäß Satz 1, dann erhält man $\mathsf{T}_A(\alpha)$ zurück. Aus dem Beweis von Satz 1 geht hervor:

(1.2) *Es gilt* $\mathsf{T}_A(\alpha) \cong \mathsf{T}_{A'}(\alpha)$.

Seien A, B zwei feste verschiedene Grundpunkte. Wir betrachten die Gruppen $\mathsf{T}_A(\alpha)$ und $\mathsf{T}_B(\alpha)$, wo α wieder sämtliche Grundpunkte (insbesondere also A, B) enthält. Wir bezeichnen mit $\mathsf{T}(A, B, \alpha)$ die von $\mathsf{T}_A(\alpha)$ und $\mathsf{T}_B(\alpha)$ erzeugte Gruppe.

(1.3) *Es gilt* $\mathsf{T}(A, B, \alpha) = \mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_B(\alpha)$ *(direktes Produkt).*

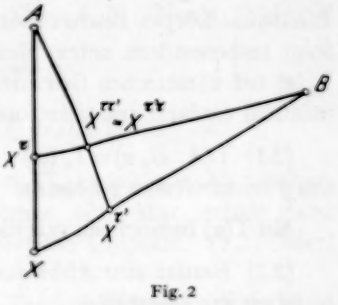


Fig. 2

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathsf{T}_A(\alpha) \cap \mathsf{T}_b(\alpha) = 1$: Ist $\tau \in \mathsf{T}_A(\alpha) \cap \mathsf{T}_B(\alpha)$ und ist X ein Punkt mit $X^\tau \neq X$, so folgt nach Definition von $\mathsf{T}_A(\alpha)$ bzw. $\mathsf{T}_B(\alpha)$, daß $A \in XX^\tau$ und $B \in XX^\tau$, also $X \in AB$ ist. Die Punkte von AB sind jedoch Fixpunkte, was einen Widerspruch ergibt. Also ist $\tau = 1$.

Seien nun $\tau \in \mathsf{T}_A(\alpha)$ und $\tau' \in \mathsf{T}_B(\alpha)$ beliebig. Wir zeigen $\tau\tau' = \tau'\tau$, woraus zusammen mit dem eben Bewiesenen (1.3) folgt: Für einen beliebigen Punkt $X \notin \alpha$ fallen die Geraden $AX^{\tau'}$ und $AX^{\tau'\tau}$ zusammen, ebenso BX^τ und $BX^{\tau\tau'}$ (Fig. 2).

Ferner gilt $$X^{\tau'\tau} = (X^{\tau'})^\tau \in BX^\tau$$

und $$X^{\tau\tau'} = (X^\tau)^{\tau'} \in AX^{\tau'},$$

also $X^{\tau'\tau} = (BX^\tau)\,(AX^{\tau'}) = X^{\tau\tau'}$. Dies ergibt $\tau\tau' = \tau'\tau$.

Jedes Gefüge $\mathfrak{G}$ kann man genau einer der folgenden 4 Klassen zuordnen:

a) $\mathfrak{G}$ ist maximales 2-Gefüge.

b) $\mathfrak{G}$ ist Subgefüge eines maximalen n-Gefüges mit lauter kollinearen Grundpunkten und $n \geqq 3$.

c) $\mathfrak{G}$ ist Subgefüge eines maximalen Gefüges mit genau drei nichtkollinearen Grundpunkten.

d) $\mathfrak{G}$ ist Subgefüge eines projektiven dreidimensionalen Raumes.

Jeder dieser Stufen läßt sich gemäß [2], Satz III eine bestimmte Klasse von Koordinatenkörpern zuordnen:

a) Zweifache Ternärkörper, die nicht Links- oder assoziative Rechtsquasikörper sind.

b) Linksquasikörper, die nicht Schiefkörper sind.

c) Assoziative Rechtsquasikörper, die nicht Schiefkörper sind.

d) Schiefkörper.

Fall d) führt auf die bekannten dreidimensionalen projektiven Räume; wir behandeln ihn daher nicht näher. — Hinsichtlich Fall a) sei ohne Beweis bemerkt, daß man — gestützt auf kollineationsfreie projektive Ebenen — solche 2-Gefüge finden kann, die keine Kollineationen gestatten. Die beiden folgenden Abschnitte sind den Fällen b) und c) gewidmet.

2. Die Elationsgruppe von Gefügen mit kollinearen Grundpunkten

Wir betrachten jetzt den oben genannten Fall b). Sei g die Trägergerade der sämtlichen Grundpunkte. Ebenen, die sämtliche Grundpunkte enthalten, nennen wir *g-Ebenen*. Nach [2], Satz III lassen sich die A-Ebenen durch Linksquasikörper beschreiben, sind also Duale von Translationsebenen. Daraus folgt insbesondere unter Beachtung von (1.1) und Satz 1, daß jede Gruppe $\mathsf{T}_A(\alpha)$ auf sämtlichen Geraden durch A (A weggelassen), die nicht in α liegen, minimal einfach transitiv operiert. Hieraus folgert man mit Hilfe von (1.3):

(2.1) $\mathsf{T}(A, B, \alpha) = \mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_B(\alpha)$ *operiert minimal einfach transitiv auf den um g verminderten g-Ebenen.*

Mit $\mathsf{T}(\alpha)$ bezeichnen wir die von allen $\mathsf{T}_A(\alpha)$ erzeugte Gruppe ($A \in \mathfrak{A}$ beliebig).

(2.2) *Besitzt eine Abbildung aus* $\mathsf{T}(\alpha)$ *einen nicht in* α *gelegenen Fixpunkt, so ist sie die Identität.*

BEWEIS. Sei F der Fixpunkt, X ein beliebiger Punkt mit $X \neq F$; $X \notin \alpha$; X sei nicht in der durch F bestimmten g-Ebene gelegen, und τ sei die angenommene Abbildung. Die Gerade XF schneidet α in einem Punkt $A \neq F$, geht also bei τ in sich über. Da auch die g-Ebenen bei τ auf sich abgebildet werden, bleibt daher im Falle, daß X und F nicht in der gleichen g-Ebene liegen, der Punkt X fest. Liegen aber X und F in derselben g-Ebene, so ersetzt man F durch einen Punkt einer anderen g-Ebene (dieser ist nach dem eben Bewiesenen Fixpunkt) und wendet den gleichen Schluß an.

(2.3) *Es gilt* $\mathsf{T}(\alpha) = \mathsf{T}(A, B, \alpha) = \mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_B(\alpha)$ *für beliebige* $A, B \in \mathfrak{A}$ *mit* $A \neq B$.

BEWEIS. Sei $\tau \in \mathsf{T}(\alpha)$ und $P^\tau \neq P$. Nach (2.1) existiert ein $\tau' \in \mathsf{T}(A, B, \alpha)$ mit $P^{\tau'} = P^\tau$. Es folgt $P^{\tau' \tau^{-1}} = P$, also nach (2.2): $\tau = \tau'$, d. h. $\mathsf{T}(\alpha) \subset \mathsf{T}(A, B, \alpha)$. Nach Definition von $\mathsf{T}(\alpha)$ ist $\mathsf{T}(A, B, \alpha) \subset \mathsf{T}(\alpha)$, mithin $\mathsf{T}(\alpha) = \mathsf{T}(A, B, \alpha)$. (2.3) folgt daher unter Beachtung von (2.1).

Wir bezeichnen mit E_A die von allen $\mathsf{T}_A(\alpha)$ bei beliebigem α und festem A erzeugte Gruppe. Schränkt man E_A gemäß (1.1) auf eine A-Ebene ε ein, so erhält man in ε die von allen Elationen mit Zentrum A erzeugte Gruppe E'_A. ε ist das Dual einer Translationsebene; daraus folgt, daß E'_A von zwei Gruppen $\mathsf{T}'_A(\alpha)$, $\mathsf{T}'_A(\beta)$ (vgl. (1.2)) mit $\alpha \neq \beta$ erzeugt wird und

$$\mathsf{E}'_A = \mathsf{T}'_A(\alpha) \times \mathsf{T}'_A(\beta)$$

gesetzt werden kann. (1.2) liefert dann:

(2.4) $\mathsf{E}_A = \mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_A(\beta)$ *für* $\alpha \neq \beta$ *beliebig.*

Schließlich bezeichnen wir mit E die von sämtlichen Elationen mit einem beliebigen Zentrum $A \in \mathfrak{A}$ und einer beliebigen g-Ebene als Fixebene erzeugte Gruppe und nennen sie die *Elationsgruppe* des Gefüges mit kollinearen Grundpunkten. E ist das Erzeugnis von allen $\mathsf{T}_A(\alpha)$ bei beliebigen A, α. (2.3) und (2.4) ergeben:

$$(2.5) \qquad \mathsf{E} = \mathsf{E}_A \times \mathsf{E}_B = \mathsf{T}(\alpha) \times \mathsf{T}(\beta) = \mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_A(\beta) \times \mathsf{T}_B(\alpha) \times \mathsf{T}_B(\beta)$$

mit beliebigen A, B, α, β; $A \neq B$; $\alpha \neq \beta$.

(2.6) *Es gilt* $\mathsf{T}_A(\alpha) \cong \mathsf{T}_B(\alpha) \cong \mathsf{T}_A(\beta)$ *und* $\mathsf{E}_A \cong \mathsf{E}_B$ *für beliebige* A, B, α, β.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $C \neq A, B$. Nach (2.3) gilt

$$\mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_C(\alpha) = \mathsf{T}_B(\alpha) \times \mathsf{T}_C(\alpha),$$

woraus

$$\mathsf{T}_A(\alpha) \cong [\mathsf{T}_A(\alpha) \times \mathsf{T}_C(\alpha)]/\mathsf{T}_C(\alpha) = [\mathsf{T}_B(\alpha) \times \mathsf{T}_C(\alpha)]/\mathsf{T}_C(\alpha) \cong \mathsf{T}_B(\alpha)$$

folgt. Entsprechend ergibt sich $\mathsf{E}_A \cong \mathsf{E}_B$. Um $\mathsf{T}_A(\alpha) \cong \mathsf{T}_A(\beta)$ einzusehen, schränke man $\mathsf{T}_A(\alpha)$ und $\mathsf{T}_A(\beta)$ auf eine A-Ebene ein. Man erhält dann nach Ergebnissen über Translationsebenen isomorphe Gruppen. (1.2) liefert somit die Behauptung.

Sei G eine Translationsgruppe, durch die eine Translationsebene $\tilde{\varepsilon}$ definiert wird. Zu $\tilde{\varepsilon}$ gehört eine duale Ebene ε. In ε gibt es einen Punkt T, so daß die Gruppe aller Elationen mit Zentrum T zu G isomorph ist (ε ist eine „(T, T)-transitive Ebene"). ε läßt sich durch einen Linksquasikörper $\mathfrak{K}$ beschreiben. Faßt man $\mathfrak{K}$ als Koordinatenbereich eines Gefüges mit kollinearen Grundpunkten auf, dann sind die A-Ebenen dieses Gefüges sämtlich zu ε isomorph ($A \leftrightarrow T$) und G ist zu den Gruppen E_A des Gefüges isomorph. Man hat also zusammen mit (2.5), (2.6):

Satz 2. *Die Elationsgruppe* E *eines n-Gefüges mit kollinearen Grundpunkten ist bei* $n \geqq 3$ *zum direkten Produkt* $G \times G$ *einer zu einer Translationsebene (bzw. deren Dual) gehörigen Translationsgruppe* G *mit sich selbst isomorph. Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Gruppe* G *ein n-Gefüge mit kollinearen Grundpunkten und* $n \geqq 3$, *dessen Elationsgruppe* E *zu* $G \times G$ *isomorph ist.*

3. Translationsräume

Wir betrachten jetzt ein maximales Gefüge $\mathfrak{G}$ mit drei nichtkollinearen Grundpunkten A_1, A_2, A_3 (Fall c) der in Abschnitt 1 gegebenen Einteilung). Die Ebene durch A_1, A_2, A_3 bezeichnen wir mit ω. Sie kommt als einzige Fixebene von Translationen in Betracht.

Nach [2], Satz 7 ist jede Gefügeebene $\neq \omega$ eine Translationsebene, wobei die Achsen der Translationen in ω liegen. Sei ε eine solche Ebene; wir setzen voraus, daß sie nur durch einen Grundpunkt, etwa A_1, verläuft ($A_2, A_3 \notin \varepsilon$). Sei g die Schnittgerade von ε und ω. Dann gilt:

Satz 3. *Jede Translation von* ε *(Achse* g, *Zentrum beliebig* $\in g$*) läßt sich zu einer Translation von* $\mathfrak{G}$ *erweitern.*

BEWEIS. Sei C das Zentrum der betrachteten (ebenen) Translation τ. Diese wird folgendermaßen auf die sämtlichen Punkte $\notin \omega$ fortgesetzt:

$$P^\tau = \left([(A_2\, P)\, \varepsilon]^\tau\, A_2\right)(CP)\,.$$

Dabei bleiben also alle Geraden durch C fest und die Ebenen durch A_2 gehen in Ebenen durch A_2 über. Dasselbe gilt aber auch für A_3, denn es ist auch

$$P^\tau = \left([(A_3\, P)\, \varepsilon]^\tau\, A_3\right)(CP)^\tau.$$

Diese Gleichung ist nämlich äquivalent mit der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes mit Zentrum C und Achse $A_2\, A_3$. Im Falle $C \in A_2\, A_3$ hat man den ebenen kleinen Satz von Desargues mit Achse $A_2\, A_3$, der, wie wir sahen (die Ebenen des Gefüges sind Translationsebenen), erfüllt ist. Bei $C \notin A_2\, A_3$ erhält man einen Fall des räumlichen Satzes von Desargues; dieser ist sofort einzusehen, da die Desarguessche Figur aus Gefügeebenen aufgebaut ist.

Somit werden auch die Geraden, die Schnitte von A_2 mit A_3-Ebenen sind, auf Geraden abgebildet. Für Geraden, die $A_2\, A_3$ schneiden, wendet man wieder einen Schluß wie im Beweis von Satz 1 an.

SATZ 4. *Ein 3-Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten besitzt eine Translationsgruppe $\Gamma(\omega)$ mit Fixebene ω durch die drei Grundpunkte, die auf jeder nicht in ω gelegenen Geraden (den Schnittpunkt mit ω ausgenommen) minimal einfach transitiv operiert.*

BEWEIS. Sei a eine Gerade $\notin \omega$ und sei A ihr Schnittpunkt mit ω. Man findet eine Gerade g von ω, die durch A und genau einen der Grundpunkte A_1, A_2, A_3 verläuft. Dann bestimmen a und g eine Ebene ε, die die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Da ε eine Translationsebene ist, gibt es eine (ebene) Translationsgruppe von ε, die auf den Punkten $\neq A$ von a minimal einfach transitiv operiert. Ihre Elemente können nach Satz 3 zu Translationen des Gefüges erweitert werden.

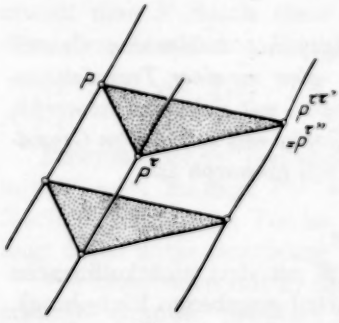


Fig. 3

Sind τ, τ' Translationen in verschiedenen Richtungen und ist $P^{\tau\tau'} \neq P$, so gibt es nach dem eben Bewiesenen eine Translation τ'' mit $P^{\tau\tau'} = P^{\tau''}$. Man hat $\tau'' = \tau\tau'$, wenn gezeigt ist, daß in $\mathfrak{G}_\omega$ der affine kleine Desargues gilt (vgl. Fig. 3). Dieser folgt aber daraus, daß man nach dem ersten Teil des Beweises jedes Dreieck in jeder Richtung beliebig parallel verschieben kann. — Somit ist $\tau\,\tau'$ wieder eine Translation und bilden alle Translationen mit Fixebene ω eine Gruppe $\Gamma(\omega)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Aus dem Beweis von Satz 4 gehen unmittelbar die beiden folgenden Korollare hervor:

KOROLLAR 1 ZU SATZ 4. *Es gilt (mit den Bezeichnungen von Abschnitt 1)* $\Gamma(\omega) = \mathsf{T}_1(\omega) \times \mathsf{T}_2(\omega) \times \mathsf{T}_3(\omega)$.

KOROLLAR 2 ZU SATZ 4. *In $\mathcal{G}_\omega$ ist überall der affine kleine Satz von Desargues erfüllt (räumlich und eben).*

Die Gruppe $\Gamma(\omega)$ kann als ein räumliches Analogon zu den Translationsgruppen von Translationsebenen aufgefaßt werden. Wir nennen daher ein Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten auch einen *Translationsraum.*

Sei $\mathfrak{R}$ ein assoziativer Rechtsquasikörper, der $\mathcal{G}_\omega$ als Koordinatenbereich zugeordnet ist (vgl. Abschnitt 1). $\mathfrak{R}_0$ sei der *Kern* von $\mathfrak{R}$, d.h. die Gesamtheit aller $x \in \mathfrak{R}$ mit

$$x(a+b) = xa + xb$$

für beliebige $a, b \in \mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}_0$ ist ein Schiefkörper. Die Gefügeebenen sind, wie wir schon sahen, Translationsebenen. Die Gruppen $\mathsf{T}_i(\omega)$ sind nach (1.2) zu Translationsgruppen $\mathsf{T}_i'(\omega)$ solcher Translationsebenen isomorph und können mithin (vgl. [4], S. 204) als Vektorräume über $\mathfrak{R}_0$ aufgefaßt werden. Damit hat man:

KOROLLAR 3 ZU SATZ 4. *Die Gruppe $\Gamma(\omega)$ ist ein Vektorraum der Dimension $3k$ (k eine Kardinalzahl) über einem Schiefkörper (nämlich $\mathfrak{R}_0$).*

Die Translationsgruppen der Translationsebenen des Gefüges sind Vektorräume der Dimension $2k$ über $\mathfrak{R}_0$. — Es ist eine offene Frage, zu welchen Vektorräumen der Dimension $2k$ über einem Schiefkörper umgekehrt Translationsebenen über *assoziativen* Rechtsquasikörpern gehören. Ist diese Frage beantwortet, dann weiß man auch, zu welchen Vektorräumen der Dimension $3k$ über Schiefkörpern Translationsräume gehören.

Im Falle $k=1$ ist $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$, das Gefüge $\mathcal{G}$ also Subgefüge eines projektiven Raumes.

Literatur

[1] ANDRÉ, J.: Über nichtdesarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156–186 (1954).

[2] EWALD, G.: Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nichtdesarguesche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern. Math. Z. **75**, 395–418 (1961).

[3] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.

Oberwolfach-Walke, Mathematisches Forschungsinstitut
bzw. Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. Juni 1960)

THIMM, W.
Math. Zeitschr. 75, 426—448 (1961)

Über starke und schwache Holomorphie auf analytischen Mengen

(Führeridealgarbe und adjungierte Idealgarbe)

Von

WALTER THIMM

Einleitung

1. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht in der Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei besonderen Holomorphiestrukturen auf ein und derselben analytischen Menge.

Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Man kann auf M in mannigfacher Weise einen Holomorphiebegriff einführen[1]). Indessen sind zwei besondere Holomorphiearten auf M ausgezeichnet:

(1) die durch die komplexe Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes R auf M induzierte komplexe Struktur J[2]),

(2) die (eindeutig bestimmte) normale Holomorphiestruktur $\mathfrak{R}$[3]).

Zu (1). In die Definition der induzierten komplexen Struktur geht wesentlich die Einbettung von M in R ein. Da jedoch eine beliebige komplexe Struktur auf M lokal durch eine geeignete lokale Einbettung von M in eine komplexe Mannigfaltigkeit als induzierte komplexe Struktur realisiert werden kann[4]), gelten alle Untersuchungen dieser Arbeit auch für den Fall, daß J durch eine beliebige komplexe Struktur auf M ersetzt wird.

Zu (2). Da die normale Holomorphie auf M keine komplexe Struktur auf M im Sinne der Definition von GRAUERT und REMMERT[4]) ist, wird für sie die Bezeichnung „Holomorphiestruktur" verwendet.

Um eine kurze Ausdrucksform zu haben, nennen wir die Funktionen und Funktionskeime der induzierten komplexen Struktur „*stark holomorph*" und diejenigen der normalen Holomorphiestruktur „*schwach holomorph*".

2. Die Strukturgarbe J der stark holomorphen Struktur ist kohärent, wie die Strukturgarbe jeder komplexen Struktur. Die Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie ist eine Folgerung aus dem Satze von CARTAN-OKA über die lokale normale Einbettung einer analytischen Menge. Da gegen die Beweise dieses Satzes neuerdings Einwände erhoben werden,

[1]) Vgl. [5] und [9].
[2]) Vgl. 1.4.
[3]) Vgl. 1.5.
[4]) [5], S. 280.

führen wir die Kohärenz von $\mathfrak{R}$ als Voraussetzung für diejenigen Sätze ein, deren Beweise auf dieser Kohärenz beruhen. Das sind die Sätze 2, 4, 7, 9 und 11. Dagegen gelten die Sätze 1, 3, 5, 6, 8 und 10 unabhängig von der Kohärenz von $\mathfrak{R}$[4a]).

3. Untersuchungen über die Beziehungen zwischen starker und schwacher Holomorphie werden auch in der Arbeit [9] des Verfassers angestellt — jedoch mit ganz anderer Zielsetzung als in der vorliegenden Arbeit. Dort handelt es sich um das Fortsetzungsproblem der Spureigenschaft schwach holomorpher Funktionen: Die Funktion f sei auf M schwach holomorph, $f \in \mathfrak{R}(M)$; sie sei auf der offenen Teilmenge $M' \subset M$ stark holomorph, $f \in J(M')$. Gibt es eine M' umfassende offene Teilmenge M'' von M, $M' \subset M'' \subset M$, derart, daß f sogar in M'' stark holomorph ist, d.h. $f \in J(M'')$? Insbesondere wird folgende Frage beantwortet: Welche Eigenschaften müssen M' und M'' haben, damit $J(M') = J(M'')$ ist?

4. In der vorliegenden Arbeit werden die Strukturgarben starker und schwacher Holomorphie mit einer Methode untersucht, die der Algebra und der algebraischen Geometrie entlehnt ist und die durch die Bezeichnungen *„Führerideal"* und *„adjungiertes Ideal"* charakterisiert werden kann. In der Algebra definiert man das Führerideal folgendermaßen[5]).

Es sei P ein Ring und Σ die algebraische Abschließung von P im Quotientenring P/P. Das Führerideal von Σ in P ist die Menge aller $c \in \mathsf{P}$ mit der Eigenschaft: $c \cdot \Sigma \subset \mathsf{P}$.

Das Führerideal ist das P-Ideal der Annulatoren des Restklassenringes Σ/P. Da der algebraischen Abschließung in der Lehre von den Holomorphiestrukturen die normale Holomorphiestruktur entspricht[6]), ist die sinngemäße Übertragung: Die Führeridealgarbe der Holomorphiestruktur $\mathfrak{R}$ in der komplexen Struktur J ist die Annulatoridealgarbe von J bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{R}/J$, vgl. Definition 2. $\mathfrak{F}$ ist eine J-Idealgarbe auf M. Eine einfache Folgerung aus der Definition von $\mathfrak{F}$ ist die genaue Bestimmung der *Nullstellenmenge von* $\mathfrak{F}$: Diese Menge *besteht aus den nicht normalen Punkten von* M (Satz 1). *Wenn die Strukturgarbe* $\mathfrak{R}$ *der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch die Führeridealgarbe kohärent* (Satz 2)[4a]).

5. In der algebraischen Geometrie stellt man dem Führerideal das adjungierte Ideal zur Seite; seine Definition lautet[7]): Es sei K ein Körper und $K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Es sei $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und P der Restklassenring $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{i}$. Ferner sei α der natürliche Homomorphismus $K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathsf{P}$. Dann sei Σ die

[4a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Der Verfasser hat inzwischen einen eigenen Beweis des Cartan-Okaschen Einbettungssatzes gefunden; dieser Beweis beruht auf Satz 1a seiner Arbeit [8]. Die Voraussetzung der Kohärenz der Garbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie in den Sätzen 2, 4, 7, 9 und 11 der vorliegenden Arbeit ist überflüssig.

[5]) [2], S. 135.

[6]) [5], S. 285.

[7]) [2], S. 135.

algebraische Abschließung von P im Quotientenring P/P und $\mathfrak{F}$ das Führerideal von Σ in P. Man bezeichnet das Ideal $\mathfrak{a}=\alpha^{-1}(\mathfrak{F})$ als adjungiertes Ideal von $\mathfrak{i}$.

In ähnlicher Weise verknüpfen wir mit der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ der analytischen Menge M in der komplexen Mannigfaltigkeit R (Strukturgarbe $\widetilde{R}$) eine $\widetilde{R}$-Idealgarbe, die für ganz R definiert und als adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ von M bezeichnet wird. Ihre Definition kann so formuliert werden: Ist $x\in R$ kein Punkt von M, so sei der Halm $\mathfrak{a}_x=\widetilde{R}_x$. Ist x ein Punkt von M, so sei $\mathfrak{a}_x$ die Menge aller Elemente von $\widetilde{R}_x$, deren Spur auf M zum Halm $\mathfrak{F}_x$ der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ gehört, vgl. Definition 3.

Die Nullstellenmenge der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$ ist die Menge der nicht normalen Punkte von M (Satz 3). *Wenn die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch $\mathfrak{a}$ kohärent* (Satz 4)[4a].

6. Der älteste Satz über die adjungierte Idealgarbe ist das *Lemma von* OSGOOD über den universellen Nenner. Eine in R holomorphe Funktion D heiße universeller Nenner von M in R, wenn D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet und in jedem Punkte $x\in R$ zum Halm $\mathfrak{a}_x$ der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$ gehört. Als Lemma von OSGOOD gilt die Aussage, daß *jeder Punkt x von M eine Umgebung U_x in R besitzt, in der $M\cap U_x$ einen universellen Nenner hat.*

Dieser Satz kann unabhängig von der Kohärenz der Strukturgarbe bewiesen werden, aus der er andererseits eine unmittelbare Folge ist. *Setzt man die Kohärenz von $\mathfrak{R}$ voraus und nimmt man dazu noch an, daß R eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist, so kann die Existenz eines universellen Nenners für ganz M in R bewiesen werden* (Satz 7)[4a].

7. Wie einfache Beispiele zeigen, ist die Berechnung der Halme der Führeridealgarbe — oder äquivalent dazu die der adjungierten Idealgarbe — eine schwierige Aufgabe. Dieses Problem wird (ohne die Voraussetzung der Kohärenz von $\mathfrak{R}$) für den folgenden Spezialfall gelöst: Im Punkte $x\in M$ habe M einen Primkeim M_x^d, dessen Singularitätenmenge in x einen gewöhnlichen Punkt hat oder leer ist, so daß bei der Wahl geeigneter lokaler Koordinaten in x M_x^d eine „Puiseuxentwicklung" mit holomorphen Koeffizienten besitzt (vgl. Formel (19)). Fassen wir die von M_x^d verschiedenen Primkeime von M in x zu dem analytischen Mengenkeim M_x^* zusammen, so lassen sich für alle Punkte $y\in M_x^d$ einer Umgebung von x, die nicht auf einer analytischen Ausnahmemenge der Dimension $d-2$ liegen, diejenigen Elemente von $\mathfrak{F}_y$ (bzw. $\mathfrak{a}_y$) bestimmen, die auf M_y^* identisch verschwinden, insbesondere also die vollen Halme $\mathfrak{F}_y$ bzw. $\mathfrak{a}_y$, wenn M_y^* leer ist. Diese Elemente werden nämlich in solchen Punkten durch eine Aussage über die Vielfachheit des Verschwindens auf der Singularitätenmenge von M_x^d bestimmt (Satz 8). Wenn die analytische Menge M lokal irreduzibel und rein d-dimensional ist, gelingt so die Berechnung der Führeridealgarbe und der adjungierten Idealgarbe in allen Punkten von M, die nicht zu einer bestimmten $d-2$-dimensionalen analytischen Teilmenge von M gehören.

8. Die Ergebnisse des Satzes 8 werden zum Beweise einer lokalen Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe verwendet (Satz 9): *Die adjungierte Idealgarbe* $\mathfrak{a}$ *sei in der Umgebung des Punktes* $x \in M$ *kohärent*[4a]). *Ist* $\mathfrak{a}_x$ *der Halm der adjungierten Idealgarbe* $\mathfrak{a}$ *in* x, *so ist die Spur eines meromorphen Funktionskeimes* p_x/q_x *auf* M *mit* p_x, $q_x \in \tilde{R}_x$, $q_x \not\equiv 0$ *auf den Primkeimen von* M *in* x, *dann und nur dann schwach holomorph, wenn für alle* $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ *die Spur von* $\alpha_x p_x/q_x$ *auf* M *stark holomorph ist.*

9. Die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit setzen die Existenz eines universellen Nenners D für M voraus, vgl. **6**. Unter dieser Annahme gelingt es, die Zählerfunktionen der stark und der schwach holomorphen Funktionskeime auf M zu charakterisieren. Dazu werden die folgenden $\tilde{R}$-Idealgarben eingeführt:

(a) Idealgarbe $\mathfrak{m}$ der analytischen Menge M, vgl. 3.1.

(b) $\mathfrak{i} = (\mathfrak{m}, D)$, vgl. 7.1.

(c) $\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}, D) : \mathfrak{a}$, vgl. 8.1.

$\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{i}$ sind kohärent. Setzen wir die Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie voraus, so ist auch $\mathfrak{n}$ kohärent. Sodann gelten die folgenden Sätze:

Die Spur eines meromorphen Funktionskeimes Q_x/D *auf* M, $Q_x \in \tilde{R}_x$, *ist dann und nur dann stark holomorph auf* M *in* x, *wenn* $Q_x \in \mathfrak{i}_x$ *ist* (Satz 10).

Die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie $\mathfrak{R}$ *sei kohärent*[4a]). *Die Spur eines meromorphen Funktionskeimes* Q_x/D, $Q_x \in \tilde{R}_x$, *auf* M *ist dann und nur dann schwach holomorph auf* M *in* $x \in M$, *wenn* $Q_x \in \mathfrak{n}_x$ *ist* (Satz 11).

Diese Ergebnisse können dazu verwendet werden, um die in der Arbeit [9] behandelten Fortsetzungsprobleme von einem allgemeineren und höheren Standpunkt aus zu behandeln. Diese Aufgabe soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

§ 1. Starke und schwache Holomorphie auf einer analytischen Menge

1.1. Bei den folgenden Untersuchungen werden Begriffe wie „komplexe Mannigfaltigkeit", „Strukturgarbe der komplexen Struktur", „analytische Garbe", „analytische Menge" u. a. in der üblichen Weise verwendet. Bezüglich ihrer Definition werde auf die Arbeiten von GRAUERT und REMMERT (vgl. [5] und [6]) verwiesen.

1.2. Es sei R eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Strukturgarbe der in R holomorphen Funktionen werde mit $\tilde{R}$ bezeichnet. Ist x ein Punkt von R, so bezeichne $\tilde{R}_x$ den Ring der holomorphen Funktionskeime in x.

1.3. Es sei M eine analytische Menge in R. Alle Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich auf die beiden folgenden Holomorphiebegriffe auf M:

(1) die durch die komplexe Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes R auf M induzierte komplexe Struktur, die wir „*starke*" Holomorphie nennen,

(2) die normale Holomorphiestruktur auf M, die sog. „*schwache*" Holomorphie.

1.4. **Starke Holomorphie.**

Die Strukturgarbe J der starken Holomorphie wird durch ein Garbendatum folgendermaßen definiert:

Es sei U eine offene Teilmenge von M. Eine Funktion f in U heiße holomorph in der induzierten komplexen Struktur oder kurz „stark" holomorph,

$$f \in J(U), \tag{1}$$

genau dann, wenn es im Einbettungsraum R eine offene Menge $\tilde{U}$ mit der Eigenschaft:

$$M \cap \tilde{U} = U \tag{2}$$

und in $\tilde{U}$ eine in der Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes holomorphe Funktion $\tilde{f}$,

$$\tilde{f} \in \tilde{R}(\tilde{U}), \tag{3}$$

gibt, so daß f die Spur von $\tilde{f}$ auf U ist:

$$\tilde{f}|_U = f. \tag{4}$$

Die Elemente der Halme J_x in den Punkten x von M kennzeichnen wir ebenso als „*stark*" holomorphe Funktionskeime.

Aus der allgemeinen Theorie komplexer Strukturen folgt[8]):
Die Strukturgarbe J der starken Holomorphie ist kohärent.

1.5. **Schwache Holomorphie.**

Die Definition der normalen Holomorphiestruktur erfolgt zunächst auf der Normalisierung (M^*, μ) von M[9]). Hierfür definieren wir die Strukturgarbe $\mathfrak{R}^*$ vermittels eines Garbendatums:

Es sei U^* eine offene Teilmenge von M^*. Eine Funktion f^* in U^* heiße holomorph,

$$f^* \in \mathfrak{R}^*(U^*), \tag{5}$$

wenn sie (a) stetig, (b) auf der komplexen Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von U^* holomorph ist.

Die Projektion μ von M^* auf M ermöglicht die Einführung der normalen Holomorphiestruktur auf M. In der Bezeichnung von LERAY[10]) ist ihre Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ die 0. Bildgarbe $\mu_0(\mathfrak{R}^*)$ der Garbe $\mathfrak{R}^*$.

Etwas konkreter kann die Garbe $\mathfrak{R}$ durch ein Garbendatum folgender Art definiert werden[11]):

---

[8]) [6], S. 420.
[9]) [5], S. 254.
[10]) [6], S. 413.
[11]) [9], §1.

Es sei U eine offene Teilmenge von M. Eine Funktion f in U heiße holomorph in der normalen Holomorphiestruktur $\mathfrak{R}$ oder kurz „schwach" holomorph,

$$f \in \mathfrak{R}(U), \tag{6}$$

wenn es eine holomorphe Funktion f^* in $U^* = \mu^{-1}(U)$ gibt,

$$f^* \in \mathfrak{R}^*(\mu^{-1}(U)), \tag{7}$$

so daß $f = f^* \circ \mu^{-1}$ ist. Die Klasse der schwach holomorphen Funktionen kann auch folgendermaßen beschrieben werden[11]: f ist genau dann schwach holomorph in U, wenn f (a) in der komplexen Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von U holomorph, (b) lokal beschränkt ist. Die zweite Bedingung bedeutet: Ist x ein Punkt von U, so gibt es eine Umgebung U_x von x mit $U_x \subset U$ und dazu eine Konstante $c(U_x) > 0$, so daß $|f| < c(U_x)$ in U_x ist.

Die Eigenart dieses Begriffes der schwachen Holomorphie liegt darin, daß eine Funktion $f \in \mathfrak{R}(U)$ in einem Punkte von U, in dem die analytische Menge M mehrere Primkeime hat, mehrdeutig sein kann, indem sie auf den verschiedenen Primkeimen verschiedene Grenzwerte annimmt. Übrigens findet sich dieser Holomorphiebegriff schon im Lehrbuch von OSGOOD[12]).

Als schwach holomorphe Funktionskeime in dem Punkte $x \in M$ bezeichnen wir die Elemente des Halmes $\mathfrak{R}_x$.

1.6. Aus den Definitionen 1.4 und 1.5 folgt, daß J eine Untergarbe von $\mathfrak{R}$ ist,

$$J \subset \mathfrak{R}, \tag{8}$$

denn jede in einem Gebiete $U \subset M$ stark holomorphe Funktion ist dort auch schwach holomorph. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig; vielmehr gibt sie Anlaß zur Definition der Normalität:

Definition 1.[13]). Die analytische Menge M heiße normal im Punkte $x \in M$, wenn die Halme starker und schwacher Holomorphie J_x und $\mathfrak{R}_x$ in x übereinstimmen.

§ 2. Die Führeridealgarbe

2.1. Zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Strukturgarben der starken und schwachen Holomorphie auf der analytischen Menge M wird in Analogie zur Algebra eine J-Idealgarbe über der analytischen Menge M, die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$, eingeführt, vgl. Einleitung 4.

Definition 2. Auf der analytischen Menge M sei J die Strukturgarbe der starken Holomorphie[14]) und $\mathfrak{R}$ die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie[15]). Die „Führeridealgarbe" $\mathfrak{F}$ der Holomorphiestruktur $\mathfrak{R}$ in der komplexen Struktur J sei eine J-Idealgarbe über M; sie werde durch Angabe der Halme $\mathfrak{F}_x$ in den Punkten $x \in M$ folgendermaßen definiert:

[12]) [1], S. 113.
[13]) [9], S. 100.
[14]) Vgl. 1.4.
[15]) Vgl. 1.5.

(1) $\mathfrak{F}_x$ bestehe aus stark holomorphen Funktionskeimen in x:

$$\mathfrak{F}_x \subset J_x. \tag{9}$$

(2) Ein Element $\varphi_x \in J_x$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{F}_x$, wenn

$$\varphi_x \cdot \mathfrak{R}_x \subset J_x \tag{10}$$

gilt.

Nach GRAUERT und REMMERT[16]) wird durch Definition 2 eine J-Idealgarbe über M bestimmt; in ihrer Bezeichnung handelt es sich um die Annulatoridealgarbe von J bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{R}/J$:

$$\mathfrak{F} = J^{\mathfrak{R}/J}. \tag{11}$$

2.2. Eine einfache Folgerung aus der Definition ist eine Aussage über die Nullstellenmenge der Führeridealgarbe.

Satz 1. *Es sei M eine analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit. Die Nullstellenmenge der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ ist genau die Menge der nicht normalen Punkte von M.*

Beweis. (1) In einem normalen Punkte $x \in M$ ist $\mathfrak{R}_x = J_x$, d.h. $\mathfrak{F}_x = (1)$ und daher $\mathfrak{F} \neq 0$ in x.

(2) In einem nicht normalen Punkte $x \in M$ ist $\mathfrak{F}_x \neq (1)$, und daher ist x Nullstelle von $\mathfrak{F}$.

2.3. Die Kohärenz der Führeridealgarbe hängt eng mit der Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ zusammen (vgl. Einleitung 2).

Satz 2. *Es sei M eine analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit. Wenn die Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ kohärent*[4a]).

Beweis. Die Kohärenz von $\mathfrak{F}$ folgt aus dem Satz von GRAUERT und REMMERT über die Kohärenz von Annulatoridealgarben[17]) bei kohärenten Garben[18]).

§ 3. Die adjungierte Idealgarbe

3.1. Wie man in der algebraischen Geometrie dem Führerideal das adjungierte Ideal zur Seite stellt, so verknüpfen wir mit der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ der analytischen Menge M in der komplexen Mannigfaltigkeit R eine $\tilde{R}$-Idealgarbe über ganz R, die wir adjungierte Idealgarbe nennen, vgl. Einleitung 5. Vor dieser Definition werde an einen bekannten Begriff der Theorie der analytischen Garben erinnert:

Zu der analytischen Menge M in R gehört eine kohärente $\tilde{R}$-Idealgarbe $\mathfrak{m}$, deren Definition lautet:

Ist U eine offene Teilmenge von R, so bestehe das Garbendatum $\mathfrak{m}(U)$ aus allen in U in der Struktur $\tilde{R}$ holomorphen Funktionen, die auf $M \cap U$ verschwinden.

---

[16]) [6], S. 399.
[17]) [6], S. 401.
[18]) [6], S. 400.

3.2. **Definition 3.** Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Zu M gehöre die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ (vgl. Definition 2). Die adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ werde durch die folgende Festsetzung ihrer Halme definiert:

(1) Ist x ein Punkt von $R-M$, so sei $\mathfrak{a}_x=\widetilde{R}_x$ (vgl. 1.2).

(2) Ist x ein Punkt von M, so bestehe $\mathfrak{a}_x$ aus allen Elementen von $\widetilde{R}_x$, deren Spur auf M ein Element von $\mathfrak{F}_x$ ist.

3.3. Da die Nullstellen der adjungierten Idealgarbe genau die Nullstellen der Führeridealgarbe sind, ergibt sich aus Satz 1:

Satz 3. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Die Nullstellenmenge der adjungierten Idealgarbe von M ist genau die Menge der nicht normalen Punkte von M.*

3.4. Ist $\mathfrak{m}$ die zu M gehörende Idealgarbe (vgl. 3.1), so folgt aus der Definition 3:

$$\mathfrak{m}\subset\mathfrak{a}. \tag{12}$$

Betrachten wir nun die exakte $\widetilde{R}$-Sequenz:

$$0\to\mathfrak{m}\to\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\to 0 \tag{13}$$

mit der Quotientengarbe $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$. Für alle Punkte $x\in R-M$ ist der Halm $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x=(0)_x$. In Punkten $x\in M$ besteht ein natürlicher $\widetilde{R}_x$-Isomorphismus $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x\leftrightarrow\mathfrak{F}_x$, der durch die Bildung der Spur der Funktionskeime von $\widetilde{R}_x$ auf M induziert wird. Dabei geht $\widetilde{R}_x$ in J_x und $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x$ in $\mathfrak{F}_x$ über. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ $\widetilde{R}$-isomorph ist zu der trivialen Fortsetzung $\widetilde{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ auf R, die wie üblich durch $\widetilde{\mathfrak{F}}_x=\mathfrak{F}_x$ in $x\in M$ und $\widetilde{\mathfrak{F}}_x=(0)_x$ in $x\in R-M$ definiert wird. Ohne die Exaktheit der $\widetilde{R}$-Sequenz (13) zu stören, können wir in ihr $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ durch die $\widetilde{R}$-isomorphe Garbe $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ersetzen; d.h. die $\widetilde{R}$-Sequenz:

$$0\to\mathfrak{m}\to\mathfrak{a}\to\widetilde{\mathfrak{F}}\to 0 \tag{14}$$

ist exakt. Ist die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ kohärent, so ist auch ihre triviale Fortsetzung $\widetilde{\mathfrak{F}}$ kohärent[19]). Daraus folgt wegen des Satzes 2:

Satz 4. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Wenn die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie auf M kohärent ist, so ist die adjungierte Idealgarbe von M kohärent*[4a]).

§ 4. Der universelle Nenner

4.1. Eine Aussage über die adjungierte Idealgarbe ist das sog. Lemma von Osgood. Dieser Satz handelt von der Existenz eines universellen Nenners. Um ihn einfach formulieren zu können, führen wir für einen Sachverhalt, der auch bei späteren Untersuchungen häufig wiederkehrt, eine kurze Bezeichnung ein.

[19]) [6], S. 409.

Definition 4. Es sei M_x ein analytischer Mengenkeim im Punkte x einer komplexen Mannigfaltigkeit R. Es seien p_x und q_x holomorphe Funktionskeime in x in der Struktur $\widetilde{R}_x$ des Einbettungsraumes R. $q(x)$ verschwinde auf keinem Primkeim von M_x identisch[20]). Der schwach holomorphe Funktionskeim $\varphi_x \in \mathfrak{R}_x$ heiße Spur des (meromorphen) Funktionskeimes p_x/q_x auf M_x.

$$\varphi_x = \frac{p_x}{q_x}\Big|_{M_x}, \tag{15}$$

wenn $\varphi(x)$ in allen denjenigen Punkten von M_x die Spur von p_x/q_x auf M_x ist, in denen $q_x \neq 0$ ist.

4.2. Nun werde der Begriff des universellen Nenners definiert.

Definition 5. (a) Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. $\mathfrak{a}$ sei die adjungierte Idealgarbe von M. Eine in R holomorphe Funktion D heiße universeller Nenner von M in R, wenn

(1) D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet,

(2) D in jedem Punkte $x \in R$ zum Halm $\mathfrak{a}_x$ von $\mathfrak{a}$ gehört.

(b) Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Es sei x ein Punkt von M. Eine in x holomorphe Funktion $D_x \in \widetilde{R}_x$ heiße (lokaler) universeller Nenner von M in x, wenn es eine Umgebung U_x von x in R gibt, derart, daß D_x universeller Nenner von $M \cap U_x$ in U_x ist.

4.3. Aus den Definitionen 3, 4 und 5 folgt unmittelbar:

Satz 5. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Für M existiere in R ein universeller Nenner D* (vgl. Definition 5). *Es sei y ein beliebiger Punkt von M und φ_y irgendein schwach holomorpher Funktionskeim auf M in y. Dann gibt es in y einen in der Struktur $\widetilde{R}_y$ des Einbettungsraumes holomorphen Funktionskeim $P_y \in \widetilde{R}_y$, so daß φ_y die Spur von P_y/D auf M ist, vgl. Definition* 4.

$$\varphi_y = \frac{P_y}{D}\Big|_M. \tag{16}$$

Bemerkung. Im Falle eines lokalen universellen Nenners D_x im Punkte $x \in M$ gibt es eine Umgebung U_x von x, derart, daß die Aussage von Satz 5 mit $D = D_x$ in jedem Punkte y von $M \cap U_x$ gilt.

4.4. Die Existenz des lokalen universellen Nenners ist der Inhalt des Lemmas von OSGOOD.

Satz 6. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R. Für jeden Punkt x von M gibt es einen lokalen universellen Nenner* (vgl. *Definition* 5).

Beweis. Für den Fall, daß M in x irreduzibel ist, findet sich dieser Satz bei OSGOOD[21]). OKA[22]) hat zuerst bemerkt, daß die Schlußweise von OSGOOD

[20]) Ist $\mathfrak{m}_x$ das Ideal von M_x in $\widetilde{R}_x$, so kann dieser Sachverhalt durch die Idealgleichheit $\mathfrak{m}_x: q_x = \mathfrak{m}_x$ ausgedrückt werden.

[21]) [*1*], S. 116.

[22]) [*3*], S. 263.

noch anwendbar ist, wenn M in x reindimensional ist. HITOTUMATU[23]) hat das Lemma sodann auch für gemischtdimensionales M bewiesen. Unabhängig von HITOTUMATU hat der Verfasser einen Beweis des Lemmas gefunden, der nun kurz skizziert werden soll.

Ist die Dimension von R in der Umgebung von x gleich n, so läßt sich ein rein $n-1$-dimensionaler analytischer Mengenkeim M_x^{n-1} in x mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(a) Der Mengenkeim M_x von M in x liegt auf M_x^{n-1}. Es gibt also eine Umgebung U_x von x in R, so daß für die Repräsentanten $M(U_x)$ und $M^{n-1}(U_x)$ von M_x bzw. M_x^{n-1} in U_x gilt:

$$M(U_x) \subset M^{n-1}(U_x).$$

(b) Kein Primkeim von $M(U_x)$ liegt auf der Singularitätenmenge von $M^{n-1}(U_x)$.

(c) Ist $y \in M(U_x)$ und $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$, so existiert in y ein schwach holomorpher Funktionskeim Φ_y auf $M^{n-1}(U_x)$, so daß gilt:

$$\Phi_y|_M = \varphi_y. \tag{17}$$

$M^{n-1}(U_x)$ wird durch eine einzige analytische Gleichung $F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ in den lokalen Koordinaten von R in x beschrieben. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß F ein Pseudopolynom von u_n ist. Die lokalen Koordinaten können wegen der Eigenschaft (b) von $M^{n-1}(U_x)$ so gewählt werden, daß die Diskriminante $D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ von F bezüglich u_n auf keinem Primkeim von $M(U_x)$ identisch verschwindet. Diese Diskriminante ist in U_x ein universeller Nenner von M; denn ist $y \in M(U_x)$ und $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$, so existiert in y wegen (c) ein schwach holomorpher Funktionskeim Φ_y auf M^{n-1}, so daß (17) gilt. Auf Φ_y ist die Okasche Verallgemeinerung des Ergebnisses von OSGOOD anwendbar:

$$\Phi_y = \frac{P_y}{D}\Big|_{M^{n-1}}, \qquad P_y \in \tilde{R}_y. \tag{18}$$

Weil D auf keinem Primkeim von $M(U_x)$ in y identisch verschwindet, gilt dann auch:

$$\varphi_y = \frac{P_y}{D}\Big|_M.$$

Bemerkung. Wenn die Garbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist Satz 6 eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Kohärenz.

4.5. Satz 6 sichert die Existenz eines lokalen universellen Nenners ohne die Voraussetzung der Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie. Setzen wir diese Kohärenz jedoch voraus, und ist ferner R eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so besitzt M sogar einen universellen Nenner in ganz R (vgl. Definition 5(a)).

[23]) [7].

Satz 7. *Es sei R eine Steinsche Mannigfaltigkeit und M eine analytische Menge in R. Die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie auf M sei kohärent*[23]). *Dann existiert für M in R ein universeller Nenner.*

Beweis. Gemäß Satz 4 ist die adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ kohärent. In der Steinschen Mannigfaltigkeit R gilt das Theorem A von H. CARTAN[24]). Dieser Satz liefert für $\mathfrak{a}$ das Ergebnis:

Es gibt ein abgeschlossenes $\widetilde{R}(R)$-Ideal $\mathfrak{A}$ von in R holomorphen Funktionen, so daß $\mathfrak{A}$ in jedem Punkte x von R den Halm $\mathfrak{a}_x$ des adjungierten Ideals $\mathfrak{a}$ von M erzeugt.

Auf das $\widetilde{R}(R)$-Ideal $\mathfrak{A}$ ist der folgende Satz von GRAUERT[25]) anwendbar:

Es sei $\{x_\nu\}$ eine Folge von Punkten in R, die keine Nullstellen des abgeschlossenen $\widetilde{R}(R)$-Ideals $\mathfrak{A}$ sind. Dann gibt es im Ideal $\mathfrak{A}$ eine Funktion D mit $D(x_\nu) \neq 0$ für alle ν.

Die analytische Menge M zerfällt in abzählbar unendlich viele irreduzible Komponenten. Auf jeder von diesen wählen wir einen gewöhnlichen Punkt aus. Nach Satz 3 ist keiner dieser Punkte eine Nullstelle von $\mathfrak{A}$. Aus dem Satze von GRAUERT ergibt sich Satz 7, wenn wir für die Punkte x_ν die soeben ausgewählten Punkte nehmen.

§ 5. Berechnung der Führeridealgarbe und der adjungierten Idealgarbe für spezielle analytische Mengen

5.1. Die Berechnung der Führeridealgarbe oder der adjungierten Idealgarbe ist im allgemeinen ein schwieriges Problem, das nur für spezielle analytische Mengen lösbar ist. Ein solcher Spezialfall wird in diesem Paragraphen behandelt. Wir beginnen mit einer Definition:

Definition 6. Es sei M_x^d ein Primkeim im Punkte x einer komplexen Mannigfaltigkeit. Es sei möglich, lokale Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in der Umgebung von x so einzuführen, daß M_x^d eine Darstellung der folgenden Art besitzt:

$$(19)\qquad \begin{cases} u_d = t^k, & k \geqq 1, \\ u_{d+\mu} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(\mu)}(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu, & \mu = 1, \ldots, n-d. \end{cases}$$

Ist J_{d-1} der Ring der holomorphen Funktionskeime von $u_1, \ldots, u_{d-1}$ im Punkte $\{u_1 = 0, \ldots, u_{d-1} = 0\}$, so sind alle Koeffizienten $a_\nu^{(\mu)} \in J_{d-1}$. Mit Q_x^{d-1} werde der Primkeim $u_d = 0, u_{d+1} = 0, \ldots, u_n = 0$ bezeichnet, der auf M_x^d durch $t = 0$ bestimmt wird. Jeder schwach holomorphe Funktionskeim $f_x \in \mathfrak{R}_x$ besitzt auf M_x^d eine Potenzreihendarstellung

$$(20)\qquad f_x\big|_{M_x^d} = t^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu, \qquad \lambda \geqq 0, \qquad c_0 \not\equiv 0,$$

---

[24]) [6], S. 420.

[25]) [4], S. 44. GRAUERT hat diesen Satz zwar nur für das Ideal einer analytischen Menge bewiesen; sein Beweis gilt jedoch ohne wesentliche Änderung für jedes abgeschlossene Ideal.

$c_\nu \in J_{d-1}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Wir bezeichnen λ als Ordnung von f_x auf Q_x^{d-1} und gebrauchen das Symbol:

$$\lambda = \mathrm{Og.}\,[f_x : Q_x^{d-1}].$$

Wenn $f_x \equiv 0$ auf M_x^d ist, werde $\lambda = \infty$ gesetzt.

5.2. Der folgende Satz faßt die Ergebnisse dieser Arbeit über die Berechnung der Führeridealgarbe zusammen. Er ist unabhängig von der Kohärenz der Garbe der schwachen Holomorphie.

Satz 8. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R (Struktur $\widetilde{R}$). Es sei x ein Punkt von M. In x besitze M einen Primkeim M_x^d, der in geeignet gewählten lokalen Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eine Darstellung der Form (19) habe. Auf M_x^d wird durch $t = 0$ der Primkeim Q_x^{d-1} mit den Gleichungen $u_d = 0$, $u_{d+1} = 0, \ldots, u_n = 0$ bestimmt. Die von M_x^d verschiedenen Primkeime des analytischen Mengenkeimes M_x von M in x seien zu dem analytischen Mengenkeim M_x^* zusammengefaßt:*

$$M_x = M_x^d \cup M_x^*. \tag{21}$$

M_x^* kann leer sein.

Es gibt eine Umgebung U von x, eine in U holomorphe Funktion $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_{d-1})$ und eine ganze Zahl $p \geqq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *M_x^d, M_x^*, Q_x^{d-1} bestimmen in U analytische Repräsentanten $M^d(U)$, $M^*(U)$, $Q^{d-1}(U)$.*

(2) *Es sei $y = \{u_1^0, \ldots, u_{d-1}^0, 0, \ldots, 0\}$ ein Punkt von $Q^{d-1}(U)$ mit $\Delta(u_1^0, \ldots, u_{d-1}^0) \neq 0$. Die durch $M^*(U)$ bzw. $Q^{d-1}(U)$ in y bestimmten Mengenkeime seien M_y^* bzw. Q_y^{d-1}. Dann ist jeder auf M_y^* verschwindende schwach holomorphe Funktionskeim in y stark holomorph, sobald seine Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist (vgl. Definition 6). Kein auf M_y^* verschwindender stark holomorpher Funktionskeim hat auf Q_y^{d-1} die Ordnung $p - 1$[26]).*

(3) *Ein auf M_y^* verschwindender stark holomorpher Funktionskeim in y gehört dann und nur dann zum Halm $\mathfrak{F}_y$ der Führeridealgarbe in y, wenn seine Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist.*

(4) *Kein Element von $\mathfrak{F}_y$ kann auf Q_y^{d-1} eine Ordnung $< p$ haben.*

Die letzten Aussagen liefern für die adjungierte Idealgarbe folgende Ergebnisse:

(3*) *Ein auf M_y^* verschwindender holomorpher Funktionskeim aus $\widetilde{R}_y$ gehört dann und nur dann zum Halm $\mathfrak{a}_y$ der adjungierten Idealgarbe, wenn seine M_y^d-Spur auf Q_y^{d-1} eine Ordnung $\geqq p$ besitzt.*

(4*) *Kein Element von $\mathfrak{a}_y$ kann eine M_y^d-Spur haben, deren Ordnung auf Q_y^{d-1} kleiner als p ist.*

Beweis. (I) *Bestimmung der Umgebung U von x.*

Wir fordern von der Umgebung U von x folgende Eigenschaften:

[26]) Darüber hinaus geht die Aussage von Hilfssatz 3, vgl. S. 442.

(a) U sei das topologische Produkt einer Umgebung U_{d-1} des Nullpunktes im $\{u_1, u_2, \ldots, u_{d-1}\}$-Raum und einer Umgebung U_{n-d+1} des Nullpunktes im $\{u_d, u_{d+1}, \ldots, u_n\}$-Raum.

$$U = U_{d-1} \times U_{n-d+1}. \tag{22}$$

(b) Die Mengenkeime M_x, M_x^d, M_x^*, Q_x^{d-1} haben in U analytische Repräsentanten: $M(U)$, $M^d(U)$, $M^*(U)$, $Q^{d-1}(U)$.

(c) Es seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^d$, $\mathfrak{m}^*$ die Idealgarben von $M(U)$, $M^d(U)$, $M^*(U)$. Für alle $y \in U$ werde $\mathfrak{m}_y$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y^d$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x^d$ und $\mathfrak{m}_y^*$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x^*$ erzeugt.

(d) $M^d(U)$ besitze in U die Darstellung (19).

(e) Der universelle Nenner D_x von M in x habe in U einen holomorphen Repräsentanten D, der in jedem Punkte y von U zum Halm $\mathfrak{a}_y$ der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$ von M gehöre und auf keinem Primkeim von $M(U)$ identisch verschwinde (vgl. Satz 6).

(II) *Bezeichnungen.*

(1) Es sei $J_{d-1}(U_{d-1})$ der Ring der holomorphen Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{d-1}$ in U_{d-1}.

(2) Ist $y = \{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{d-1}^0, u_d^0, \ldots, u_n^0\}$ ein Punkt von U, so werde der Ring der konvergenten Potenzreihen von $u_1 - u_1^0$, $u_2 - u_2^0, \ldots, u_{d-1} - u_{d-1}^0$ mit $J_{d-1}(y)$ bezeichnet.

(3) Ist $y \in U$, so seien die Mengenkeime von $M(U)$, $M^d(U)$, $M^*(U)$, $Q^{d-1}(U)$ in y bzw. M_y, M_y^d, M_y^*, Q_y^{d-1}.

(4) Es sei y ein Punkt von $M(U)$. Wir nennen J_y^* bzw. $\mathfrak{R}_y^*$ die Menge aller derjenigen Elemente von J_y bzw. $\mathfrak{R}_y$, die auf M_y^* identisch verschwinden. Falls y kein Punkt von $M^*(U)$ ist, werde $J_y^* = J_y$, $\mathfrak{R}_y^* = \mathfrak{R}_y$ gesetzt.

Wegen der Eigenschaft (d) von U sind die Koeffizienten $a_\nu^{(\mu)}$ in (19) Elemente von $J_{d-1}(U_{d-1})$.

Aus der Eigenschaft (e) von U folgt für die Spur des universellen Nenners D auf $M^d(U)$ eine Darstellung:

$$D|_{M^d(U)} = t^m \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu, \qquad d_0 \not\equiv 0, \tag{23}$$

mit $d_\nu \in J_{d-1}(U_{d-1})$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

(III) Grundlegend für den Beweis von Satz 8 ist das folgende Ergebnis:

Hilfssatz 1. *Es sei $y = \{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{d-1}^0, 0, \ldots, 0\}$ ein Punkt von $Q^{d-1}(U)$. In y sei $d_0(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{d-1}^0) \neq 0$ (vgl. (23)). Es gibt eine ganze Zahl $K_0 \geqq 0$, derart daß alle Funktionskeime aus $\mathfrak{R}_y^*$, deren Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens K_0 ist, zu J_y^* gehören. Die Zahl K_0 kann für alle Punkte $y \in Q^{d-1}(U)$ mit $d_0(y) \neq 0$ gleich groß gewählt werden.*

Beweis. (a) Wenn in (23) $m = 0$ ist, gilt $D(y) \neq 0$. Also ist y ein normaler Punkt von $M(U)$. Es ist dann $J_y = \mathfrak{R}_y$. Die Aussagen von Satz 8 sind mit $\Delta = d_0$ und $p = 0$ erfüllt. Es werde daher von nun an $m \geqq 1$ vorausgesetzt.

(b) Wir setzen (vgl. (23)):

$$\tau^m = t^m \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu. \tag{24}$$

Da $d_0(y) \neq 0$ ist, können wir die Gl. (24) durch eine konvergente Potenzreihe:

$$\tau = t \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu \tag{25}$$

mit $\delta_\nu \in J_{d-1}(y)$, $\nu = 0, 1, \ldots$, $\delta_0(y) \neq 0$, auflösen. Aus (25) errechnet sich:

$$t = \tau \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta'_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, \tau^\nu \tag{26}$$

mit $\delta'_0 = 1/\delta_0$, $\delta'_\nu \in J_{d-1}(y)$, $\nu = 0, 1, \ldots$.

Wie aus (25) folgt, ist für jedes ganze $K \geqq 0$ der Funktionskeim:

$$\varphi_K^* = \begin{cases} \tau^K & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases}$$

schwach holomorph im Punkte y, also $\varphi_K^* \in \mathfrak{R}_y^*$. Wir beweisen zunächst folgende Behauptung:

(c) *Für* $K \geqq K_0 = m^2 + 1$ *ist* $\varphi_K^* \in J_y^*$.

Wir verwenden die Darstellung (16) für φ_1^*:

$$D|_{M_y} \cdot \varphi_1^* = P_y(u_1, \ldots, u_n)|_{M_y}, \qquad P_y \in \tilde{R}_y.$$

Dann ist wegen (23) und (24):

$$D|_{M_y^d} = \tau^m,$$

und daher:

$$P_y|_{M_y^d} = \tau^{m+1}, \qquad P_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Für $K \geqq K_0 = m^2 + 1$ ist:

$$\varphi_K^* = D^{m+r-\lambda} P_y^\lambda|_{M_y}, \tag{27}$$

wobei r und λ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, die durch die Bedingungen $K = m^2 + rm + \lambda$ und $1 \leqq \lambda \leqq m$ bestimmt werden. Daraus folgt (c).

(d) Es sei $f_y \in \mathfrak{R}_y^*$ mit Og. $[f_y : Q_y^{d-1}] \geqq K_0$. Aus (26) folgt für f_y eine Potenzreihenentwicklung nach τ von der folgenden Gestalt:

$$f_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=K_0}^{\infty} c_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, \tau^\nu,$$

$c_\nu \in J_{d-1}(y)$, $\nu = K_0, K_0 + 1, \ldots$. Ferner ist:

$$f_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Wie aus (27) folgt, ist f_y auf M_y die Spur von:

$$F_y = \sum_{\mu=1}^{m} D_y^{m-\mu} P_y^\mu \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{m^2+\lambda m+\mu} D^\lambda \right\}.$$

Da $F_y \in \widetilde{R}_y$ ist, ergibt sich $f_y \in J_y^*$. Da $K_0 = m^2 + 1$ allein durch die Entwicklung (23) von D bestimmt wird, folgt die Aussage des Hilfssatzes über die Unabhängigkeit der Zahl K_0 von y.

(IV) Bei den folgenden Untersuchungen handelt es sich darum, Bedingungen dafür anzugeben, daß ein Funktionskeim aus $\mathfrak{R}_y^*$ zu J_y^* gehört. Es sei $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{m}_x^*$ mit der in (I) (c) formulierten Eigenschaft. Diese Funktionen sind demnach in U holomorph und bilden eine Basis jedes Halmes $\mathfrak{m}_y^*$ mit $y \in U$. Es sei y ein Punkt von $M(U)$ und $f_y \in J_y^*$. Dann gibt es einen Funktionskeim $F_y \in \widetilde{R}_y$, so daß

$$F_y|_{M_y} = f_y.$$

Insbesondere muß also: $F_y|_{M_y^*} \equiv 0$ sein. Daher besitzt F_y eine Darstellung:

$$F_y = g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots + g_s h_s \quad \text{mit} \quad g_\lambda \in \widetilde{R}_y, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, s. \tag{28}$$

Wir setzen die Funktionen g_λ mit unbestimmten Koeffizienten als Potenzreihen von $u_d, u_{d+1}, \ldots, u_n$ an:

$$g_\lambda = \sum_{\nu_d, \nu_{d+1}, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} \xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} u_d^{\nu_d} u_{d+1}^{\nu_{d+1}} \ldots u_n^{\nu_n}, \qquad \lambda = 1, \ldots, s. \tag{29}$$

Substituieren wir diese Entwicklungen in (28), so ist bei beliebigen $\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} \in J_{d-1}(y)$ — Konvergenz natürlich vorausgesetzt — die Spur $F_y|_{M_y^*} \equiv 0$. Nun berechnen wir durch Einsetzen der Potenzreihen (19) die Spur von F_y auf M_y^d. Ordnen wir nach Potenzen von t, so folgt:

$$F_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu(\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n})\, t^\nu. \tag{30}$$

Hier sind die l_ν homogene Linearformen in je endlich vielen Unbestimmten $\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n}$, deren Koeffizienten zu $J_{d-1}(U_{d-1})$ gehören.

(V) **Hilfssatz 2.** *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $d_0(y) \neq 0$ (vgl. Hilfssatz 1). Es sei $\varphi_y \in \mathfrak{R}_y^*$ und:*

$$\varphi_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu, \quad \eta_\nu \in J_{d-1}(y), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

$$\varphi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Es ist dann und nur dann $\varphi_y \in J_y^*$, wenn sich holomorphe Funktionen $\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} \in J_{d-1}(y)$ so bestimmen lassen, daß die K_0 Gleichungen:

$$l_\nu(\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n}) = \eta_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, K_0 - 1 \tag{32}$$

bestehen. (Zur Bedeutung von K_0 vgl. Hilfssatz 1).

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist nach (IV) klar. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, nehmen wir an, es sei $\{\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} \in J_{d-1}(y)\}$ ein System von Lösungsfunktionen von (32). Es handelt sich um ein endliches System, da in die K_0 Gln. (32) nur endlich viele Unbestimmte eingehen.

Wir setzen diese Funktionen in die Entwicklungen (29) ein, wobei wir alle übrigen Koeffizienten, die also in den linken Seiten der Gln. (32) nicht vorkommen, gleich 0 setzen. Die Spur der mit diesen Funktionen g_λ gebildeten Funktion F_y hat die Form:

$$F_y|_{M_y^q} = \sum_{\nu=0}^{K_0-1} \eta_\nu t^\nu + \sum_{\nu=K_0}^{\infty} \zeta_\nu t^\nu \quad \text{mit} \quad \zeta_\nu \in J_{d-1}(y)$$

$$F_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Es ist also:

$$F_y|_{M_y^q} - \varphi_y|_{M_y^q} = \sum_{\nu=K_0}^{\infty} (\zeta_\nu - \eta_\nu)\, t^\nu$$

und

$$F_y|_{M_y^*} - \varphi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Nach Hilfssatz 1 ist $F_y|_{M_y} - \varphi_y \in J_y^*$; d. h. es gibt einen Funktionskeim $G_y \in \tilde{R}_y$ mit:

$$G_y|_{M_y^q} = \sum_{\nu=K_0}^{\infty} (\zeta_\nu - \eta_\nu)\, t^\nu$$

$$G_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Daher ist φ_y auf M_y die Spur von $F_y - G_y$; d. h. $\varphi_y \in J_y^*$. Dies ist die Behauptung.

(VI) Wir wenden den Hilfssatz 2 auf die folgenden schwach holomorphen Funktionskeime in y an:

$$\varphi_K|_{M_y^q} = t^K, \qquad K \geqq 0, \text{ ganz}, \tag{33}$$

$$\varphi_K|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Aus dem Hilfssatz 1 folgt: $\varphi_K \in J_y^*$ für $K \geqq K_0$. Für $K < K_0$ führt die Forderung $\varphi_K \in J_y^*$ auf das folgende lineare Gleichungssystem L_K:

$$l_\nu(\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n}) = \delta_{\nu K}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, K_0 - 1, \tag{34}$$

($\delta_{\nu K} \doteq$ Kronecker-Symbol). Für jedes solche Gleichungssystem L_K bestehen zwei Möglichkeiten:

Fall 1. Der Rang der Koeffizientenmatrix von L_K ist verschieden von dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix von L_K. Dann ist L_K unlösbar und zwar auch mit meromorphen Funktionen von $u_1, \ldots, u_{d-1}$. Dies bedeutet: φ_K ist kein Element von J_y^*, und das gleiche gilt auch für jedes Produkt $c\varphi_K$ mit $c \in J_{d-1}(y)$ und $c \not\equiv 0$.

Fall 2. Die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix von L_K stimmen überein. L_K besitzt nun Lösungen

$$\xi^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} = q^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} | \Delta_K \quad \text{mit} \quad q^{(\lambda)}_{\nu_d \nu_{d+1} \ldots \nu_n} \in J_{d-1}(y),$$

wobei Δ_K eine Determinante mit Koeffizienten von L_K ist. $\Delta_K(u_1, \ldots, u_{d-1})$ ist Element von $J_{d-1}(U_{d-1})$, da die Koeffizienten der Linearformen l_ν zu $J_{d-1}(U_{d-1})$ gehören (vgl. (IV)).

Es sei $d(u_1, \ldots, u_{d-1})$ das Produkt der Determinanten Δ_K aller derjenigen Gleichungssysteme L_K für $K=0, 1, 2, \ldots, K_0-1$, die den Fall 2 realisieren, d.h. die meromorph lösbar sind. Die Funktion d ist in U_{d-1} holomorph. Nunmehr kann die Funktion $\Delta(u_1, \ldots, u_{d-1}) \in J_{d-1}(U_{d-1})$ definiert werden, die in den Aussagen des Satzes 9 vorkommt. Wir setzen:

$$\Delta(u_1, \ldots, u_{d-1}) = d_0(u_1, \ldots, u_{d-1})\, d(u_1, \ldots, u_{d-1}).$$

Wir haben sodann folgendes Ergebnis:

Hilfssatz 3. *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. Für jedes ganzzahlige $K \geqq 0$ und beliebiges $c \in J_{d-1}(y)$ gilt: $c\varphi_K \in \mathfrak{N}_y^*$ (vgl. (33)) gehört dann und nur dann zu J_y^*, wenn schon $\varphi_K \in J_y^*$ ist.*

(VII) Jetzt kann die Aussage (2) von Satz 8 bewiesen werden.

Hilfssatz 4. *Es sei p die kleinste ganze Zahl, derart, daß für jedes ganze $K \geqq p$ das Gleichungssystem L_K zu Fall 2* (vgl. VI) *gehört. Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. Jeder Funktionskeim $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$, dessen Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist, gehört zu J_y^*. Kein Funktionskeim $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ mit* Og. $[f_y : Q_y^{d-1}] = p-1$ *gehört zu J_y.*

Beweis. Wegen der Definition von p gibt es für jedes $K \geqq p$ einen Funktionskeim $F_K \in \widetilde{R}_y$, so daß $\varphi_K = F_K|_{M_y}$ ist. Nun sei $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ mit Og. $[f_y : Q_y^{d-1}] \geqq p$. Auf M_y^d besitzt f_y eine Entwicklung:

$$f_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=p}^{\infty} c_\nu t^\nu, \qquad c_\nu \in J_{d-1}(y), \qquad \nu = p, p+1, \ldots; \tag{35}$$

außerdem gilt:

$$f_y|_{M_y^*} \equiv 0. \tag{36}$$

Wegen der Definition von p und des Hilfssatzes 1 ist $K_0 \geqq p$. Wie aus Hilfssatz 1 folgt, braucht nur gezeigt zu werden, daß der Funktionskeim $f_y' = \sum_{\nu=p}^{K_0} c_\nu \varphi_\nu$ zu J_y^* gehört. Dies ergibt sich aus:

$$f_y' = \sum_{\nu=p}^{K_0} c_\nu F_\nu|_{M_y}.$$

Ist $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ und Og. $[f_y : Q_y^{d-1}] = p-1$, so besitzt f_y eine Darstellung $f_y = c\varphi_{p-1} + h_y$ mit $c \in J_{d-1}(y)$ und Og. $[h_y : Q_y^{d-1}] \geqq p$. Ferner ist $h_y|_{M_y^*} \equiv 0$. Wie soeben bewiesen wurde, ist also h_y in J_y^*. Nun ist jedoch $c\varphi_{p-1}$ wegen der Definition von p und des Hilfssatzes 3 kein Element von J_y; daher ist auch f_y nicht in J_y.

(VIII) Es folgt der Beweis des ersten Teiles der Aussage (3) von Satz 8.

Hilfssatz 5. *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. f_y sei ein Funktionskeim von J_y^* mit* Og. $[f_y : Q_y^{d-1}] \geqq p$. *Dann ist $f_y \in \mathfrak{F}_y$.*

Beweis. Es sei $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$. Dann ist wegen (36) $\varphi_y \cdot f_y|_{M_y^*} \equiv 0$, also $\varphi_y \cdot f_y \in \mathfrak{N}_y^*$. Nun ist:

$$\text{Og.}\,[\varphi_y \cdot f_y : Q_y^{d-1}] = \text{Og.}\,[\varphi_y : Q_y^{d-1}] + \text{Og.}\,[f_y : Q_y^{d-1}] \geqq p.$$

Aus Hilfssatz 4 ergibt sich $\varphi_y \cdot f_y \in J_y^*$. Da diese Aussage für jedes Element von $\mathfrak{N}_y$ gilt, ist $f_y \in \mathfrak{F}_y$. Dies ist die Behauptung.

(IX) Der Beweis von Satz 8 wird beendet durch den Beweis der Aussage (4), aus welcher der zweite Teil der Aussage (3) folgt:

Hilfssatz 6. *Es sei* $y \in Q^{d-1}(U)$ *und* $\Delta(y) \neq 0$. *Der Funktionskeim* $g_y \in J_y$ *habe auf* Q_y^{d-1} *eine Ordnung* $K \leqq p-1$. *Dann ist* g_y *kein Element von* $\mathfrak{F}_y$.

Beweis. Wäre $g_y \in \mathfrak{F}_y$, so müßte für jedes Element $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$ folgen $g_y \cdot \varphi_y \in J_y$. Nehmen wir $\varphi_y = \varphi_{p-K-1}$ (vgl. (33)), so ist $g_y \cdot \varphi_{p-K-1} \in \mathfrak{N}_y^*$ und Og. $[g_y \cdot \varphi_{p-K-1} : Q_y^{d-1}] = p-1$; also gehört nach Hilfssatz 4 der Funktionskeim $g_y \cdot \varphi_{p-K-1}$ nicht zu J_y. Daher ist g_y nicht in $\mathfrak{F}_y$.

5.3. Wenn der analytische Mengenkeim M_y^* leer ist, so ist $J_y^* = J_y$, $\mathfrak{N}_y^* = \mathfrak{N}_y$ (vgl. (II) (4)). Der Satz 8 beschreibt nun die vollen Halme $\mathfrak{F}_y$ bzw. $\mathfrak{a}_y$ in den Punkten von $M \cap U$ mit $\Delta(y) \neq 0$. Diese Situation liegt insbesondere dann in allen Punkten von M vor, wenn die analytische Menge M lokal irreduzibel ist. In diesem Falle ermöglicht der Satz 8 die Berechnung der Führeridealgarbe bzw. adjungierten Idealgarbe in allen Punkten von M mit Ausnahme der Punkte einer Teilmenge von M, die dünn von der Codimension 2 ist.

§ 6. Eine lokale Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe

6.1. Als Anwendung der Ergebnisse von Satz 8 soll eine lokale Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe bewiesen werden. Dazu wird die Voraussetzung der Kohärenz der Strukturgarbe der schwachen Holomorphie gebraucht.

Satz 9. *Es sei* M *eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit* R. x *sei ein Punkt von* M. *Die adjungierte Idealgarbe* $\mathfrak{a}$ *sei in einer Umgebung von* x *kohärent*[1a]. $\mathfrak{a}_x$ *sei der Halm der adjungierten Idealgarbe von* M *in* x. *Es seien* p_x *und* q_x *Funktionskeime in* x, *die in der Struktur des Einbettungsraumes* R *holomorph sind,* $p_x, q_x \in \widetilde{R}_x$. q_x *sei nicht identisch* 0 *auf den Primkeimen von* M *in* x[20]. *Die Spur von* p_x/q_x *auf* M (*vgl. Definition* 4) *ist dann und nur dann schwach holomorph auf* M,

$$\left.\frac{p_x}{q_x}\right|_M \in \mathfrak{N}_x, \tag{37}$$

wenn für alle Elemente $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ *die Spur auf* M *von* $\alpha_x p_x/q_x$ *stark holomorph ist,*

$$\left.\frac{\alpha_x p_x}{q_x}\right|_M \in J_x. \tag{38}$$

Bemerkung: Satz 9 besitzt folgende interessante Formulierung:

Es sei $\mathfrak{Q}$ die Garbe der Quotientenringe von J auf M. In $\mathfrak{Q}$ gilt:

$$\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{N}.$$

Dabei wird bekanntlich $\mathfrak{F}^{-1}$ durch: $(\mathfrak{F}^{-1})_x = \{r_x \in \mathfrak{Q}_x \mid r_x \cdot \mathfrak{F}_x \subset J_x\}$ definiert.

Beweis. (A) Die Notwendigkeit der Bedingung ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition 3 der adjungierten Idealgarbe. Es sei $f_x = p_x/q_x|_M \in \mathfrak{R}_x$. Für jedes Element α_x von $\mathfrak{a}_x$ ist die Spur $\alpha_x|_M = \varphi_x \in \mathfrak{F}_x$. Aus Formel (10) folgt: $f_x \cdot \varphi_x \in J_x$.

(B) Um zu zeigen, daß die Bedingung des Satzes hinreichend für schwache Holomorphie ist, führen wir den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es gebe einen meromorphen Funktionskeim $\Psi_x = p_x/q_x$ mit den Eigenschaften:

(a) $p_x, q_x \in \widetilde{R}_x$,

(b) $q_x \not\equiv 0$ auf den Primkeimen von M in x[20]),

(c) für alle $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ gilt $\alpha_x \Psi_x|_M \in J_x$, ohne daß jedoch $\psi_x = \Psi_x|_M \in \mathfrak{R}_x$ ist. Wegen (c) gibt es einen Primkeim M_x^d von M in x (Dimension d), so daß ψ_x auf M_x^d Polstellen besitzt. Die Polstellenmenge von ψ_x auf M_x^d ist ein $d-1$-dimensionaler analytischer Mengenkeim Q_x^{d-1}.

(C) Wir wählen eine Umgebung V von x in R, so daß eine Basis des Halmes $\mathfrak{a}_x$ jeden Halm $\mathfrak{a}_z$ mit $z \in V$ erzeugt. ($\mathfrak{a}$ ist kohärent in einer Umgebung von x.) Diese Umgebung V sei ferner so klein, daß in ihr analytische bzw. holomorphe Repräsentanten der Mengenkeime M_x, M_x^d, Q_x^{d-1} und der Funktionskeime p_x, q_x, sowie des universellen Nenners D_x von M in x existieren. Wir bezeichnen diese Repräsentanten mit den Symbolen: $M(V)$, $M^d(V)$, $Q^{d-1}(V)$, p, q und setzen: $\Psi = p/q$ und $\psi = \Psi|_M$.

(D) *In jedem Punkte z von $Q^{d-1}(V)$ finden wir den Sachverhalt der Annahme unserer indirekten Schlußweise wieder*, d.h.

(1) z ist eine Polstelle (oder Unbestimmtheitsstelle) für ψ.

(2) Für alle $\alpha_z \in \mathfrak{a}_z$ ist $\Psi_z \cdot \alpha_z|_M \in J_z$. ($\Psi_z$ Funktionskeim von Ψ in z; $\psi_z = \Psi_z|_M$).

Die zweite Eigenschaft ergibt sich daraus, daß α_z eine Linearkombination von Elementen von $\mathfrak{a}_x$ mit Koeffizienten in $\widetilde{R}_z$ ist und diese Eigenschaft für die Elemente von $\mathfrak{a}_x$ besteht.

(E) *Jeder Punkt z von $Q^{d-1}(V)$ ist nicht normal für M.*

In einem normalen Punkte $z \in M$ ist $\mathfrak{a}_z = \widetilde{R}_z$ (vgl. Satz 3). Wäre also $z \in Q^{d-1}(V)$ normal, so müßte $1 \cdot \psi_z \in J_z$ sein, was unmöglich ist, wenn ψ_z in z eine Polstelle hat.

(F) Wegen (D) werden wir die Annahme der indirekten Schlußweise schon widerlegt haben, wenn uns dies für irgendeinen Punkt y von $Q^{d-1}(V)$ gelingt. Wir nehmen für y einen Punkt, in dem sich $\mathfrak{a}_y$ gemäß Satz 8 berechnen läßt.

Wir wählen zunächst einen gewöhnlichen Punkt z von $Q^{d-1}(V)$, und falls jeder Punkt von $Q^{d-1}(V)$ ein singulärer Punkt von $M^d(V)$ ist, werde z so bestimmt, daß die Singularitätenmenge von $M^d(V)$ in z einen gewöhnlichen Punkt hat. Dann gibt es lokale Koordinaten auf R in einer Umgebung von z mit z als Nullpunkt, so daß jeder Primkeim von $M^d(V)$ in z eine Darstellung der Gestalt (19) hat. Auf (19) wird $Q^{d-1}(V)$ durch $t=0$ gegeben. Möglicherweise gibt es verschiedene Primkeime (19) von $M^d(V)$ in z. Wir wählen

einen solchen aus, auf dem $\psi_z = \Psi_z|_M$ wirklich meromorph ist, d.h. für $t=0$ Polstellen hat und bezeichnen diesen mit M_z^d.

Durch Einsetzen der Potenzreihen (19) in p und q gewinnen wir für ψ_z eine Darstellung auf M_z^d:

$$\frac{p}{q}\Big|_{M_z^d} = \psi_z|_{M_z^d} = \frac{1}{t^\sigma} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu}, \tag{39}$$

α_ν, β_ν holomorph für $\{u_1 = 0, \ldots, u_{d-1} = 0\}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_0 \not\equiv 0$, $\beta_0 \not\equiv 0$. Da ψ_z auf M_z^d für $t=0$ wirklich meromorph ist, ist $\sigma \geqq 1$.

(G) Auf die analytische Menge $M = M(V)$ wenden wir im Punkte z den Satz 8 (mit z an Stelle von x) an. Wir bedienen uns weiterhin der Bezeichnungen in 5.2 (I), (II) und (III). Es gibt eine Umgebung $U \subset V$ von z, eine in U holomorphe Funktion $\Delta(u_1, \ldots, u_{d-1})$ und eine ganze Zahl $p \geqq 0$, derart, daß die Aussagen (2), (3) und (4) in Satz 8 bestehen. Wir wählen einen Punkt $y = \{u_1^0, \ldots, u_{d-1}^0, 0, \ldots, 0\} \in Q^{d-1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\beta_0(u_1^0, \ldots, u_{d-1}^0) \neq 0$, vgl. (39),

(b) $\Delta(u_1^0, \ldots, u_{d-1}^0) \neq 0$.

Wegen (a) ist:

$$\psi_y|_{M_y^d} = \frac{1}{t^\sigma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(u_1, \ldots, u_{d-1})\, t^\nu, \qquad \gamma_0 \not\equiv 0, \qquad \sigma \geqq 1, \tag{40}$$

mit $\gamma_\nu \in J_{d-1}(y)$ (vgl. 5.2 (II), (2)).

Die Funktion ψ_y hat laut Annahme unserer indirekten Schlußweise und wegen (D) die folgende Eigenschaft:

Für alle $\alpha_y \in \mathfrak{a}_y$ ist $\psi_y \cdot \alpha_y|_{M_y} \in J_y$. Um einen Widerspruch zu konstruieren, wählen wir für α_y denjenigen Funktionskeim $\Phi_{p+\sigma-1} \in \widetilde{R}_y$, dessen Spur auf M_y der Funktionskeim

$$\varphi_{p+\sigma-1} = \begin{cases} t^{p+\sigma-1} & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases} \tag{41}$$

ist. Gemäß Satz 8 (2) und $\sigma \geqq 1$ ist $\varphi_{p+\sigma-1} \in J_y^*$ und auf Grund von Satz 8 (3) sogar $\varphi_{p+\sigma-1} \in \mathfrak{F}_y$ und daher $\Phi_{p+\sigma-1} \in \mathfrak{a}_y$. Nun gilt wegen (40) und (41) auf $M_y = M_y^d \cup M_y^*$ (vgl. Satz 8):

$$\Phi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^d} = \varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^d} = \gamma_0\, t^{p-1} + t^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu+1}\, t^\nu,$$

$$\Phi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^*} = \varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Wie aus Satz 8 (3) folgt, ist $\varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y$ genau dann in J_y, wenn

$$\gamma_0 \cdot \varphi_{p-1} = \begin{cases} \gamma_0\, t^{p-1} & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases}$$

zu J_y gehört. Diese Möglichkeit wird jedoch durch die letzte Aussage in Satz 8 (2) ausgeschlossen. Damit ist die Annahme der indirekten Schlußweise widerlegt und Satz 9 bewiesen.

§ 7. Die Zählerfunktionen bei stark holomorphen Funktionskeimen

7.1. Wir fassen nun die Zählerfunktionen unserer beiden Sorten von holomorphen Funktionskeimen ins Auge. Besonders einfach lassen sich die Zähler von stark holomorphen Funktionskeimen beschreiben.

Satz 10. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R, $\mathfrak{m}$ die zu M gehörige $\tilde{R}$-Idealgarbe* (vgl. 3.1). *Für M existiere ein universeller Nenner D; vgl. Definition* 5. *Es sei $\mathfrak{i}$ die $\tilde{R}$-Idealgarbe $(\mathfrak{m}, D)$*[27]. *Dann ist $\mathfrak{i}$ kohärent und Untergarbe der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$:*

$$\mathfrak{i} = (\mathfrak{m}, D) < \mathfrak{a}. \tag{42}$$

Es sei x ein Punkt von M und Q_x in x ein in der Struktur $\tilde{R}$ holomorpher Funktionskeim, $Q_x \in \tilde{R}_x$. Dann und nur dann ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. Definition 4) *stark holomorph,*

$$\left.\frac{Q_x}{D}\right|_M \in J_x, \tag{43}$$

wenn Q_x zu $\mathfrak{i}_x$ gehört.

Beweis. (1) Die $\tilde{R}$-Idealgarbe $\mathfrak{i}$ ist kohärent, weil $\mathfrak{m}$ kohärent und D in R holomorph ist. Aus $D \in \mathfrak{a}_x$ in allen Punkten $x \in R$ und (12) folgt (42).

(2) Wenn die Spur von Q_x/D auf M stark holomorph ist, gibt es einen in der Struktur $\tilde{R}$ holomorphen Funktionskeim $H_x \in \tilde{R}_x$, so daß

$$\left.\frac{Q_x}{D}\right|_M = H_x|_M \tag{44}$$

gilt. Hieraus folgt $Q_x - DH_x \equiv 0$ auf M, also $Q_x - DH_x \in \mathfrak{m}_x$ und deswegen $Q_x \in \mathfrak{i}_x$.

(3) Aus $Q_x \in \mathfrak{i}_x$ folgt umgekehrt die Existenz von $m_x \in \mathfrak{m}_x$ und $H_x \in \tilde{R}_x$, so daß $Q_x = m_x + DH_x$ gilt. Da D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet, kann diese Gleichung durch D dividiert werden und liefert (44); also ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. Definition 4) ein Element von J_x.

7.2. Auf der Untersuchung der $\tilde{R}$-Idealgarbe $\mathfrak{i} = (\mathfrak{m}, D)$ beruhen die Arbeiten des Verfassers zum Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen, vgl. [8] und [9]. Auf jene Fragen können mit den Methoden der vorliegenden Arbeit neue Antworten gefunden werden. Hier soll ein anderes Problem behandelt werden. Nachdem es gelungen ist, die Zähler von stark holomorphen Funktionskeimen zu beschreiben, stellt sich dieselbe Aufgabe für die Zähler der schwach holomorphen Funktionskeime.

[27] Das heißt für $x \in R$ ist $\mathfrak{i}_x = (\mathfrak{m}_x, D)$ das Vereinigungsideal von $\mathfrak{m}_x$ und D in $\tilde{R}_x$.

§ 8. Die Zählerfunktionen bei schwach holomorphen Funktionskeimen

8.1. Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R, $\mathfrak{m}$ die $\widetilde{R}$-Idealgarbe von M und $\mathfrak{a}$ die adjungierte Idealgarbe von M. Für M existiere ein universeller Nenner D. Zur Charakterisierung der Zählerfunktionen bei schwach holomorphen Funktionskeimen definieren wir die folgende $\widetilde{R}$-Idealgarbe:

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}, D) : \mathfrak{a}. \tag{45}$$

Dieses Symbol hat folgende Bedeutung:

(1) Für $x \in R - M$ sei der Halm $\mathfrak{n}_x = \widetilde{R}_x$,

(2) für $x \in M$ sei $\mathfrak{n}_x$ die Menge aller Funktionskeime $Q_x \in \widetilde{R}_x$ mit:

$$Q_x \cdot \mathfrak{a}_x < (\mathfrak{m}_x, D). \tag{46}$$

In der Bezeichnung von GRAUERT und REMMERT ist $\mathfrak{n}$ die Annulatoridealgarbe von $\widetilde{R}$ bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{a}/(\mathfrak{m}, D)$, vgl. (42).

8.2. Nun gilt der folgende Satz:

Satz 11. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R und $\mathfrak{m}$ die zu M gehörende Idealgarbe* (vgl. 3.1). *Die Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie auf M sei kohärent*[18a]). *Zu M existiere ein universeller Nenner D. Es sei $\mathfrak{a}$ die adjungierte Idealgarbe von M. Dann ist die in* 8.1 *eingeführte $\widetilde{R}$-Idealgarbe $\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}, D) : \mathfrak{a}$ kohärent. Es sei x ein Punkt von M und Q_x ein in der Struktur $\widetilde{R}$ holomorpher Funktionskeim, $Q_x \in \widetilde{R}_x$.*

Dann und nur dann ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. *Definition* 4) *ein schwach holomorpher Funktionskeim in x,*

$$\frac{Q_x}{D}\Big|_M \in \mathfrak{R}_x, \tag{47}$$

wenn $Q_x \in \mathfrak{n}_x$ ist.

Beweis. (a) Die Kohärenz von $\mathfrak{n}$ folgt aus der Kohärenz von $\mathfrak{a}$ (Satz 4), der Kohärenz von $(\mathfrak{m}, D)$ (Satz 10) und dem Satz über die Kohärenz von Annulatoridealgarben (vgl. 8.1)[17]).

(b) Wenn $\frac{Q_x}{D}\Big|_M \in \mathfrak{R}_x$ ist, so ist laut Definition 3:

$$\alpha_x \frac{Q_x}{D}\Big|_M \in J_x. \tag{48}$$

Aus Satz 10 folgt nun $\alpha_x Q_x \in (\mathfrak{m}_x, D)$. Da diese Relation für jedes $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ besteht, gilt (46), d.h. $Q_x \in \mathfrak{n}_x$.

(c) Die Umkehrung ergibt sich mit $q_x = D$ und $p_x = Q_x$ aus Satz 9. In der Tat, wenn für alle $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ gilt: $\alpha_x Q_x \in (\mathfrak{m}_x, D)$, so ist gemäß Satz 10 für alle solchen α_x die Formel (48) richtig. Aus Satz 9 folgt daher:

$$\frac{Q_x}{D}\Big|_M \in \mathfrak{R}_x. \tag{49}$$

Literatur

[1] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1929.
[2] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Wien u. Innsbruck 1949.
[3] OKA, K.: Sur les foctions analytiques de plusieurs variables, VIII. J. Math. Soc. Japan **3**, 259–278.
[4] GRAUERT, H.: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik. Math. Ann. **131**, 38–75 (1956).
[5] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958).
[6] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. **68**, 393–443 (1958).
[7] HITOTUMATU, S.: Note on the Holomorphy on an analytic subset. Fac. Science, Univ. Tokyo **7**, 604–613 (1958).
[8] THIMM, W.: Über Moduln und Ideale von holomorphen Funktionen mehrerer Variablen. Math. Ann. **139**, 1–13 (1959).
[9] THIMM, W.: Untersuchungen über das Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen. Math. Ann. **139**, 95–114 (1959).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität
(Eingegangen am 13. Juli 1960)

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. 75, 449–466 (1961)

Sur la théorie du prolongement des valuations de Krull

Par

P. RIBENBOIM

Nous faisons ici une étude systématique de la théorie du prolongement des valuations de KRULL aux extensions algébriques. Cet article est une suite à nos précedentes notes [1], [2].

Au n° 1 nous indiquons quelques résultats généraux sur le prolongement de valuations.

Au n° 2 nous considérons l'extension d'une valuation w d'une corps K à un surcorps algébrique $\widetilde{K}$, sous l'hypothèse que w admette un seul prolongement à $\widetilde{K}$. En particulier, nous montrons que si K, muni de w, est complet, alors $\widetilde{K}$, muni de l'unique prolongement $\widetilde{w}$ de w à $\widetilde{K}$ est aussi complet lorsque $[\widetilde{K}:K]$ est fini; le cas où l'anneau de la valuation w possède des idéaux premiers limites exige des soins particuliers.

Au n° 3 nous étudions la théorie du prolongement sans faire des hypothèses sur l'existence de prolongement unique. Après rappeler quelques résultats généraux déjà connus, nous indiquons la condition pour que deux K-automorphismes de $\widetilde{K}$ définissent le même prolongement de la valuation donnée (supposée de rang fini). Ensuite, nous résolvons les questions suivantes: étant connus les prolongements $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_r$ de la valuation w à l'extension algébrique finie $\widetilde{K}|K$, déterminer les prolongements distincts des valuations moins fines que w ainsi que les prolongements distincts (dans des corps des restes convenables) des valuations obtenues de celles moins fines que w par passage aux respectifs corps des restes. Enfin, nous établissons l'importante relation $n \geqq \sum_{i=1}^{r} e_{i0} f_i^0$ entre le degré n de l'extension $\widetilde{K}|K$, les indices de ramification e_{i0} et les degrés d'inértie f_i^0 des valuations qui prolongent w (supposée de rang quelconque).

Enfin, en supposant que la valuation w possède rang fini, nous déterminons aussi des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité dans la relation ci-dessus, ce qui est beaucoup plus délicat. La démonstration de l'inégalité se fait de façon très simple, tandis que pour l'égalité nous utilisons la technique d'induction selon la longueur de l'arbre engendré par l'ensemble des prolongements de w à $\widetilde{K}$. COHEN et ZARISKI [3] et ROQUETTE [4] ont aussi démontré l'inégalité indépendemment et de façon distincte de la notre; toutefois, notre démonstration est certainement plus simple et directe, car il est inutile de faire une induction sur le nombre de prolongements de la valuation w comme ont fait COHEN et ZARISKI, et de même, le raisonnement de ROQUETTE est trop compliqué, en vertu de la notion peu heureuse de

complété d'un corps valué (il est reconnu que pour les valuations de rang supérieur, la bonne notion de complétion est celle de KRULL [5], plus fine que la complétion topologique qui prend en considération seulement les éléments des étages supérieurs du groupe de valeurs, c.a.d., les éléments proches de 0 dans le corps; voir aussi [2]). Quant à l'égalité, nos conditions sont les mêmes que celles de ROQUETTE; COHEN et ZARISKI ont aussi indiqué une condition suffisante pour l'égalité, qui implique notre condition lorsque w est discrète de rang 1, mais dont on ne sait pas la relation avec notre condition dans le cas général.

Nous remercions le Professeur W. KRULL par les précieuses discussions et échanges d'idées, lors de notre séjour en 1956 à l'Institut des Mathématiques de l'Université de Bonn; tous les résultats des articles [1], [2], ainsi que de celui-ci formaient l'ensemble de notre thèse de doctorat.

1.

La terminologie et les notations sont celles de nos précedentes notes déjà citées.

Dans ce n° nous donnerons quelques résultats généraux sur le prolongement de valuations.

Rappelons d'abord (KRULL [5]) que si K est un corps muni de la valuation w, si $\tilde{K}$ est un surcorps de K, alors w admet au moins un prolongement $\tilde{w}$ à $\tilde{K}$. Dans ce travail, nous sommes uniquement intéressés au prolongement de w à un surcorps algébrique fini $\tilde{K}$ de K. Si $\tilde{K}|K$ est une extension (algébrique finie) normale, alors w admet un nombre fini de prolongement distincts $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ à $\tilde{K}$, qui sont des valuations conjuguées, c.a.d., pour tout indice j $(1 \leqq j \leqq r)$ il existe un K-automorphisme σ_j de $\tilde{K}$ tel que $\tilde{w}_j = \tilde{w}_1 \circ \sigma_j$; ainsi, le nombre de ces valuations est fini, au plus égal au nombre de K-automorphismes distincts de $\tilde{K}$ (et ainsi, au plus égal au degré $[\tilde{K}:K]$); toutefois, il se peut que deux automorphismes distincts déterminent la même valuation — ceci a été étudié pour les valuations de rang 1 et sera vu au n° 3 dans un cas plus général. Il résulte que si $\tilde{K}|K$ est une extension normale alors toutes les valuations qui prolongent w ont le même groupe de valeurs. Si par contre $\tilde{K}|K$ est une extension algébrique finie, mais non normale, alors les valuations de $\tilde{K}$ qui prolongent w sont les restrictions des prolongements de w à l'extension normale de K engendrée par $\tilde{K}$; donc, w admet aussi seulement un nombre fini de prolongements à $\tilde{K}$, dont les groupes de valeurs ne coïncident plus nécessairement. Si $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r$ sont les anneaux des valuations de $\tilde{K}$ (non nécessairement normal) qui prolongent w, alors $\bigcap_{i=1}^{r} \tilde{A}_i$ est l'anneau des éléments de $\tilde{K}$, entiers sur l'anneau A de la valuation w.

Les deux lemmes suivants indiquent la nature d'un prolongement quelconque de la valuation w de K à une extension algébrique et à une extension algébrique finie.

LEMME 1. *Soit K un corps muni de la valuation w, soit $\tilde{K}$ un surcorps algébrique de K et $\tilde{w}$ une valuation de $\tilde{K}$ prolongeant w. Avec notations évidentes* (cf. [1], [2]) *on a:*

1) *le groupe $\tilde{\Gamma}$ de la valuation $\tilde{w}$ est contenu dans le groupe divisible engendré par le groupe Γ de la valuation w; donc w et $\tilde{w}$ ont le même rang (et on peut appliquer à ces valuations les résultats indiqués au lemme 1 de* [2]);

2) *pour tout couple d'idéaux premiers correspondants $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$, des anneaux de valuation A, $\tilde{A}$, $\mathfrak{K}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ est un surcorps algébrique du corps $\mathfrak{k}=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ (après une identification canonique).*

Il résulte immédiatement du fait que w et $\tilde{w}$ aient le même rang que pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$ de A, $(0)\subseteqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'\subseteqq\mathfrak{p}^0$, et les correspondants idéaux premiers $\mathfrak{P}$, $\tilde{\mathfrak{P}}'$ de $\tilde{A}$, la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{P}}'}$ de $\mathfrak{K}$ est un prolongement de la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ de $\mathfrak{k}$; en particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et le correspondant idéal premier $\tilde{\mathfrak{p}}$ de $\tilde{A}$, la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ de $\tilde{K}$ est un prolongement de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K.

LEMME 2. *Soit $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini du corps K et $\tilde{w}$ une valuation de $\tilde{K}$ qui prolonge la valuation w de K. Pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ de A, $(0)\subseteqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'\subseteqq\mathfrak{p}^0$, et les correspondants idéaux premiers $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{p}}'$ de $\tilde{A}$, on a, en plus des résultats indiqués au lemme précedent:*

1) *si Δ, Δ' (resp. $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}'$) sont les sous-groupes isolés de Γ (resp. $\tilde{\Gamma}$) correspondants aux idéaux premiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ (resp. $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{p}}'$) alors $e'=(\tilde{\Delta}':\Delta')$ divise $e=(\tilde{\Delta}:\Delta)$; en particulier, pour l'idéal premier $\mathfrak{p}=(0)$, e_0 s'appelle* «l'indice de ramification» *de $\tilde{w}$ sur w; enfin, pour l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$ on a $e^0=1$; en outre, si la valuation w est discrète, alors $\tilde{w}$ l'est aussi.*

2) *$f'=[\tilde{\mathfrak{K}}':\mathfrak{K}']\leqq[\tilde{\mathfrak{K}}:\mathfrak{K}]=f$ (avec notations évidentes); en particulier, pour l'idéal $\mathfrak{p}=(0)$ on a $f_0=n=[\tilde{K}:K]$ et pour l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$, f^0 s'appelle le* «degré d'inertie» *de la valuation $\tilde{w}$ sur w.*

3) $\frac{e_0}{n}\leqq\frac{e}{f}\leqq\frac{e'}{f'}\leqq\frac{1}{f^0}$; *en particulier, $e_0\cdot f^0\leqq n$, c'est-à-dire, on a*

$$(\tilde{\Gamma}:\Gamma)\cdot[\tilde{\mathfrak{K}}^0:\mathfrak{K}^0]\leqq[\tilde{K}:K].$$

En effet, en vertu du lemme bien connu de la théorie des groupes, on a $(\tilde{\Delta}:\Delta)=(\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}':\Delta/\Delta')\cdot(\tilde{\Delta}':\Delta')$, donc e' divise e lorsque $\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{p}'$.

Puisque $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$ est une valuation de $\tilde{\mathfrak{K}}$, ayant corps des restes $\tilde{\mathfrak{K}}'$ et prolongeant la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ de $\mathfrak{K}$, ayant corps des restes $\mathfrak{K}'$, alors le résultat bien connu (SCHILLING [6]) donne $f'\leqq f$ lorsque $\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{p}'$. De même, pour les valuations $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$, $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$, on a $(\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}':\Delta/\Delta')\cdot[\tilde{\mathfrak{K}}':\mathfrak{K}']\leqq[\tilde{\mathfrak{K}}:\mathfrak{K}]$, car leurs groupes des valeurs sont respectivement $\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}'$, Δ/Δ'; puisque $(\tilde{\Delta}':\Delta')$ $(\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}':\Delta/\Delta')=(\tilde{\Delta}:\Delta)$ alors on a $\frac{e}{e'}f'\leqq f$.

2.

Supposons maintenant que K soit un corps muni de la valuation w et $\widetilde{K}$ une extension algébrique de K telle que w admette un prolongement unique $\tilde{w}$ à $\widetilde{K}$. Il est bien connu que cela arrive, par exemple, lorsque K, muni de w, est un corps henselien (en particulier maximal ou complet).

LEMME 3. *Soit K, muni de w, $\widetilde{K}$ un surcorps algébrique de K et supposons que w admette un seul prolongement $\tilde{w}$ à $\widetilde{K}$. Pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ de A, $(0)\subsetneqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'\subsetneqq\mathfrak{p}^0$, la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ de $\mathscr{K}$ admet un prolongement unique à $\widetilde{\mathscr{K}}$, à savoir $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$, dont l'anneau de valuation $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}'}/\tilde{\mathfrak{p}}$ est celui des entiers algébriques de $\widetilde{\mathscr{K}}$ relativement à $A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$. En particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ admet un prolongement unique à K, à savoir $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, dont l'anneau de valuation $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ est celui des entiers algébriques de $\widetilde{K}$ relativement à $A_{\mathfrak{p}}$.*

En effet, d'abord $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$ est un prolongement de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ à $\widetilde{\mathscr{K}}$. Si $\widetilde{\mathscr{B}}$ est l'anneau d'une valuation de $\widetilde{\mathscr{K}}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ alors $\widetilde{\mathscr{B}}\cap\mathscr{K}=A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$, donc $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})\cap A_{\mathfrak{p}}=A_{\mathfrak{p}'}$ (où φ est l'application canonique de $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ sur $\widetilde{\mathscr{K}}$). Il suffit alors de montrer que toute valuation de K moins fine que w admet un seul prolongement à $\widetilde{K}$, car cela entraînerait $\widetilde{\mathscr{B}}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}'}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Si B est l'anneau d'une valuation $\tilde{v}$ de $\widetilde{K}$ qui prolonge la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ (moins fine que w) alors $\widetilde{B}\cap K=A_{\mathfrak{p}}\supseteqq A$, donc $\widetilde{B}\supseteqq\tilde{A}$ (anneau des entiers algébriques sur A) et alors il existe $\tilde{\mathfrak{q}}$, idéal premier de $\tilde{A}$ tel que $\widetilde{B}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$; or, de $\tilde{\mathfrak{q}}\cap A_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}$ il résulte que $\tilde{\mathfrak{q}}=\tilde{\mathfrak{p}}$, c.a.d. $\widetilde{B}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$.

LEMME 4. *Soit K, muni de w, et $\widetilde{K}$ un surcorps algébrique de K tel que w admette un prolongement unique $\tilde{w}$ à l'extension normale de K engendrée par $\widetilde{K}$. Alors on a: $\tilde{w}(x)=\frac{1}{[\widetilde{K}_1:K]}\cdot w\left(N_{\widetilde{K}_1|K}(x)\right)$ pour tout $x\in K$, où $\widetilde{K}_1$ désigne un sous-corps quelconque de $\widetilde{K}$ contenant x et tel que $[\widetilde{K}_1:K]$ soit fini; autrement dit, si $a_m\in K$ est le terme constant du polynôme minimal de x sur K, ayant degré m, alors $\tilde{w}(x)=\frac{1}{m}w(a_m)$; en particulier, x est entier sur l'anneau A de la valuation w si et seulement si $N_{\widetilde{K}_1|K}(x)\in A$.*

LEMME 5. *Soit K, muni de w, un corps valué maximal. Si $\widetilde{K}$ est un surcorps algébrique fini de K, $[\widetilde{K}:K]=n$, et si $\tilde{w}$ est l'unique prolongement de w à $\widetilde{K}$, alors $\widetilde{K}$ est un corps maximal et on a (avec les notations du lemme 2): $\frac{e_0}{n}=\frac{e}{f}=\frac{e'}{f'}=\frac{1}{f^0}$ donc $e_0 f^0=n$.*

En effet, si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ sont des idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w, $(0)\subsetneqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'\subsetneqq\mathfrak{p}^0$, d'après le lemme 6 de [2], le corps $\mathscr{K}=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$, ayant groupe de valeurs Δ/Δ', est un corps maximal. D'après le lemme 3 la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$ est le prolongement unique de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ au corps $\widetilde{\mathscr{K}}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Par un résultat connu (SCHILLING [6]), $\widetilde{\mathscr{K}}$, muni de $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$, est un corps maximal et on a $[\widetilde{\mathscr{K}}':\mathscr{K}']\cdot(\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}':\Delta/\Delta')=[\widetilde{\mathscr{K}}:\mathscr{K}]$, c.a.d. $f'\cdot\frac{e}{e'}=f$, car $\mathscr{K}'$, $\widetilde{\mathscr{K}}'$, sont respectivement les corps des restes de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$, $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}'}$.

Pour traiter le cas analogue d'un corps valué complet, nous allons faire usage du résultat suivant, essentiellement contenu dans le livre de SCHILLING [6]:

Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K, muni de la valuation $\tilde{w}$ prolongeant w. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A de w, soit $\tilde{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$, soient $\mathscr{K}=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathscr{K}}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Soit $\{\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_m\}$ un ensemble d'éléments de $\tilde{\mathscr{K}}$, linéairement indépendants sur $\mathscr{K}$, et pour chaque $i=1, \ldots, m$, soit l'élément $\tilde{b}_i \in \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ tel que $\tilde{\beta}_i$ soit sa classe résidue modulo $\tilde{\mathfrak{p}}$. Si $\tilde{a}=\sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{b}_i \in \tilde{K}$, avec $a_i \in K$ non tous nuls, alors $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(\tilde{a})=\min_{1\leq i\leq m}\{w_{\mathfrak{p}}(a_i)\}$. En particulier, $\{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m\}$ sont linéairement indépendants sur K.

Le lemme qui suit sera utilisé dans la démonstration du théorème 1 pour le cas d'une valuation w dont l'anneau de valuation possède idéal premier limite.

LEMME 6. *Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K, muni de la valuation $\tilde{w}$ prolongeant w; supposons que* (0) *soit un idéal premier limite de l'anneau A de w:* $(0)=\bigcap_{\tau\in\mathsf{T}} \mathfrak{p}_\tau$ *avec* $\mathfrak{p}_\tau \neq (0)$, $\mathfrak{p}_\tau$ *étant un idéal premier de A (pour tout $\tau\in\mathsf{T}$). Alors* $(\tilde{\Gamma}:\Gamma)=\sup_{\tau\in\mathsf{T}}\{(\tilde{\Delta}_\tau:\Delta_\tau)\}$ *et si K est «complet» on a aussi* $[\tilde{K}:K]=\sup_{\tau\in\mathsf{T}}\{[\tilde{\mathscr{K}}_\tau:\mathscr{K}_\tau]\}$ *(où $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ est l'idéal premier de $\tilde{A}$, correspondant à $\mathfrak{p}_\tau$, $\tilde{\mathscr{K}}_\tau=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_\tau}/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, $\mathscr{K}_\tau=A_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$, $\tilde{\Delta}_\tau$, Δ_τ, sont les sous-groupes isolés de $\tilde{\Gamma}$, Γ qui correspondent resp. aux idéaux premiers $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, $\mathfrak{p}_\tau$).*

En effet, comme $\Delta_\tau=\tilde{\Delta}_\tau\cap\Gamma$ alors (à moins d'isomorphisme) $\tilde{\Gamma}/\Gamma \geqq \tilde{\Delta}_\tau/\Delta_\tau$ pour tout indice $\tau\in\mathsf{T}$, donc $\tilde{\Gamma}/\Gamma \geqq \bigcup_{\tau\in\mathsf{T}} \tilde{\Delta}_\tau/\Delta_\tau$; d'autre part, de $\tilde{\Gamma}=\bigcup_{\tau\in\mathsf{T}}\tilde{\Delta}_\tau$ il résulte aussitôt qu'on a l'égalité $\tilde{\Gamma}/\Gamma=\bigcup_{\tau\in\mathsf{T}}\tilde{\Delta}_\tau/\Delta_\tau$. Enfin, comme $\tilde{\Gamma}/\Gamma$ est un groupe fini et $\tilde{\Delta}_\tau/\Delta_\tau > \tilde{\Delta}_{\tau'}/\Delta_{\tau'}$ lorsque $\tilde{\Delta}_\tau > \tilde{\Delta}_{\tau'}$ alors il existe nécessairement un indice τ tel que $\tilde{\Gamma}/\Gamma=\tilde{\Delta}_\tau/\tilde{\Delta}_{\tau'}$; en particulier, $(\tilde{\Gamma}:\Gamma)=\sup_{\tau\in\mathsf{T}}\{(\tilde{\Delta}_\tau:\Delta_\tau)\}$.

Montrons maintenant que si K est complet alors $[\tilde{K}:K]=\sup_{\tau\in\mathsf{T}}\{[\tilde{\mathscr{K}}_\tau:\mathscr{K}_\tau]\}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $\tau_1\in\mathsf{T}$ tel que $[\tilde{\mathscr{K}}_{\tau_1}:\mathscr{K}_{\tau_1}]=\sup\{[\tilde{\mathscr{K}}_\tau:\mathscr{K}_\tau]\}=m<[\tilde{K}:K]$; donc si $\mathfrak{p}_\tau<\mathfrak{p}_{\tau_1}$ alors on a aussi $[\tilde{\mathscr{K}}_\tau:\mathscr{K}_\tau]=m$.

Soit une base $\{\tilde{\beta}_{\tau_1 1}, \ldots, \tilde{\beta}_{\tau_1 m}\}$ de $\tilde{\mathscr{K}}_{\tau_1}$ sur $\mathscr{K}_{\tau_1}$; on peut évidemment supposer que $\tilde{\beta}_{\tau_1 i}\in\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$. Pour chaque $i=1, \ldots, m$ soit $\tilde{b}_i\in\tilde{A}$, dont la classe modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$ soit $\tilde{\beta}_{\tau_1 i}$. Alors les éléments $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m$ sont linéairement indépendants sur K.

Comme $[\tilde{K}:K]>m$ il existe alors un élément $\tilde{c}\in\tilde{A}$ qui est linéairement indépendant des éléments $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m$. Pour chaque $\tau\in\mathsf{T}$, $\mathfrak{p}_\tau<\mathfrak{p}_{\tau_1}$, soit $\tilde{\gamma}_\tau$ la

classe de $\tilde{c}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$; donc $\tilde{\gamma}_\tau = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\tau i} \tilde{\beta}_{\tau i}$ (où chaque $\tilde{\beta}_{\tau i}$ est la classe de $\tilde{b}_i$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ et chaque $\gamma_{\tau i} \in \mathscr{K}_\tau$), en remarquant que $\{\tilde{\beta}_{\tau 1}, \ldots, \tilde{\beta}_{\tau m}\}$ sont linéairement indépendants sur $\widetilde{\mathscr{K}}_\tau$, car la classe de $\tilde{\beta}_{\tau i}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ est $\tilde{\beta}_{\tau_1 i}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Choisissons pour chaque $\mathfrak{p}_\tau$ et chaque $i = 1, \ldots, m$, un élément $c_{\tau i} \in A$ tel que $\gamma_{\tau i}$ soit la classe de $c_{\tau i}$ mod. $\mathfrak{p}_\tau$; alors $c_{\tau i} \equiv c_{\tau' i} (\text{mod. } \mathfrak{p}_\tau)$ lorsque $\mathfrak{p}_{\tau'} \subset \mathfrak{p}_\tau$ $(i = 1, \ldots, m)$, c.a.d. pour chaque i, on obtient un système compatible de congruences. Or, K étant complet, il existe des éléments $c_i \in A$ $(i = 1, \ldots, m)$ tels que $c_i \equiv c_{\tau i} (\text{mod. } \mathfrak{p}_\tau)$ pour tout $\mathfrak{p}_\tau \subset \mathfrak{p}_{\tau_1}$. Alors $\tilde{c} - \sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{b}_i \in \tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ pour tout $\tau \in \mathsf{T}$, car l'image de cet élément est 0 selon l'homomorphisme $\tilde{A} \to \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$. Enfin, de $(0) = \bigcap \mathfrak{p}_\tau$ il résulte que $\tilde{c} = \sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{b}_i$, ce qui serait une contradiction.

THÉORÈME 1. *Soit K un corps complet, muni d'une valuation w. Si $\widetilde{K}$ est un surcorps algébrique fini de K, si $\tilde{w}$ est l'unique valuation de $\widetilde{K}$ prolongeant w, alors $\widetilde{K}$, muni de $\tilde{w}$, est complet.*

DÉMONSTRATION. Nous devons vérifier les conditions (c 1), (c 2) de la définition de corps valué complet, à savoir:

c 1) si $(0) \subset \tilde{\mathfrak{p}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{p}}_2$ sont deux idéaux premiers successifs de l'anneau $\tilde{A}$ de la valuation $\tilde{w}$, alors le corps $\widetilde{\mathscr{K}}_1 = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}/\tilde{\mathfrak{p}}_1$ muni de la valuation de rang 1 $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ est complet (par rapport à la topologie définie par cette valuation);

c 2) si $(\tilde{\mathfrak{p}}_\tau)_{\tau \in \mathsf{T}}$ est une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de $\tilde{A}$, si pour tout $\tau \in \mathsf{T}$, $\tilde{a}_\tau \in \tilde{A}$ et $\tilde{a}_\tau \equiv \tilde{a}_{\tau'} (\text{mod. } \tilde{\mathfrak{p}}_\tau)$ lorsque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau \supset \tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$ alors il existe $\tilde{x} \in \tilde{A}$ tel que $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_\tau (\text{mod. } \tilde{\mathfrak{p}}_\tau)$ pour tout $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ (d'ailleurs cette dernière condition se trouve trivialement remplie lorsque l'anneau A ne possède aucun idéal premier limite).

Ainsi, vérifions d'abord (c 1). Soient $\tilde{\mathfrak{p}}_1$, $\tilde{\mathfrak{p}}_2$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau de la valuation $\tilde{w}$, $(0) \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{p}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}^0$; alors si $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ sont les correspondants idéaux premiers de l'anneau de la valuation w, la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ de $\widetilde{\mathscr{K}}_1 = \tilde{A}_{\mathfrak{p}_1}/\tilde{\mathfrak{p}}_1$ prolonge la valuation $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$ de $\mathscr{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$. Or, $\mathscr{K}_1$ muni de la valuation de rang 1 $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$, étant complet, on déduit en faisant usage d'un résultat connu de la théorie des valuations de rang 1 que $\widetilde{\mathscr{K}}_1$, muni de la valuation de rang 1 $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ est aussi complet, car $\widetilde{\mathscr{K}}_1$ est une extension algébrique finie de $\mathscr{K}_1$ (lemme 2). Donc, $\widetilde{K}$ muni de $\tilde{w}$, est complet.

Vérifions la condition (c 2), en supposant (pour écarter le cas trivial), que $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ soit un idéal premier limite de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$, et que $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \bigcap_{\tau \in \mathsf{T}} \tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, avec $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau \neq \tilde{\mathfrak{p}}_0$, $(\tilde{\mathfrak{p}}_\tau)_{\tau \in \mathsf{T}}$ étant une famille décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de $\tilde{A}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que chaque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ ne soit pas un idéal premier limite car le sous-groupe isolé limite $\tilde{\Delta}_0$ (correspondant à $\tilde{\mathfrak{p}}_0$) de $\tilde{\Gamma}$ est la réunion d'une famille strictement croissante bien ordonnée de sous-groupes isolés *non* limites $\tilde{\Delta}_\tau \neq \tilde{\Delta}_0$ (cf. par example [6]).

Nous pouvons aussi nous restreindre au cas où $\tilde{\mathfrak{p}}_0=(\tilde{0})$. En effet, si $(\tilde{a}_\tau)_{\tau\in\mathsf{T}}$ est une famille d'éléments de $\tilde{A}$, avec $\tilde{a}_\tau\equiv\tilde{a}_{\tau'}$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) lorsque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau\geqq\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$, considérons la famille $(\tilde{b}_\tau)_{\tau\in\mathsf{T}}$ d'éléments de $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_0$ où $\tilde{b}_\tau=\varphi_0(\tilde{a}_\tau)$, $\varphi_0\colon\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_0}\to\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_0}/\tilde{\mathfrak{p}}_0=\tilde{\mathscr{K}}_0$; alors $\tilde{b}_\tau\equiv\tilde{b}_{\tau'}$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau/\tilde{\mathfrak{p}}_0$) lorsque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau/\tilde{\mathfrak{p}}_0\geqq\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}/\tilde{\mathfrak{p}}_0$. Remarquons que le corps $\mathscr{K}_0=A_{\mathfrak{p}_0}/\mathfrak{p}_0$ est complet selon la valuation $v=w_{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}^0}$ (lemme 12 de [2]) et que $\tilde{\mathscr{K}}_0|\mathscr{K}_0$ est une extension algébrique finie (lemme 2). Si on montre que la condition (*c* 2) est valable pour l'idéal nul dans le corps $\tilde{\mathscr{K}}_0$, muni de l'unique valuation $\tilde{v}$ prolongeant v, et pour la famille $(\tilde{b}_\tau)_{\tau\in\mathsf{T}}$, alors il existe $\tilde{y}\in\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_0$ tel que $\tilde{y}\equiv\tilde{b}_\tau$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau/\tilde{\mathfrak{p}}_0$) pour tout $\tau\in\mathsf{T}$. En remarquant que $\tilde{v}=\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_0,\tilde{\mathfrak{p}}^0}$, soit $\tilde{x}\in\tilde{A}$ tel que $\varphi_0(\tilde{x})=\tilde{y}$. Alors $\tilde{x}\equiv\tilde{a}_\tau$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) pour tout $\tau\in\mathsf{T}$ et ainsi la condition (c 2) sera vérifiée pour $(\tilde{a}_\tau)_{\tau\in\mathsf{T}}$, $\tilde{K}$, $\tilde{w}$ et l'idéal $\tilde{\mathfrak{p}}_0$.

Ainsi, supposons que l'idéal nul soit un idéal premier limite de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$ et que $(\tilde{0})=\bigcap_{\tau\in\mathsf{T}}\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, avec $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau\neq(\tilde{0})$. Notons $\mathfrak{p}_\tau$ l'idéal premier de A correspondant à $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, soient $\tilde{\mathscr{K}}_\tau=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_\tau}/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, $\mathscr{K}_\tau=A_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$. Or, par le lemme 6, on a $[\tilde{K}:K]=\sup_{\tau\in\mathsf{T}}\{[\tilde{\mathscr{K}}_\tau:\mathscr{K}_\tau]\}$, car K est complet. Comme ces degrés sont des entiers, il existe nécessairement un idéal premier non nul $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$ tel que $[\tilde{K}:K]=[\tilde{\mathscr{K}}_{\tau_1}:\mathscr{K}_{\tau_1}]$. Ceci étant, il suffit de trouver $\tilde{x}\in\tilde{A}$, $\tilde{x}\equiv\tilde{a}_\tau$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) pour tout $\mathfrak{p}_\tau\subseteqq\mathfrak{p}_{\tau_1}$, car alors si $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}<\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$ on aura $\tilde{a}_\tau\equiv\tilde{a}_{\tau'}$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$) donc $\tilde{x}\equiv\tilde{a}_{\tau'}$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$).

Prenons une base $\{\tilde{d}_1,\ldots,\tilde{d}_m\}$ du $\mathscr{K}_{\tau_1}$-espace vectoriel $\tilde{\mathscr{K}}_{\tau_1}$ et pour chaque $i=1,\ldots,m$, soit $\tilde{c}_i\in\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}}<\tilde{K}$ tel que sa classe résidue mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$ soit $\tilde{d}_i$. Par une remarque antérieure, $\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_m$ sont linéairement indépendants sur K, donc ils forment une base de $\tilde{K}$ sur K.

Ceci étant, exprimons chaque élément $\tilde{a}_\tau$ en termes de la base $\{\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_m\}$: $\tilde{a}_\tau=\sum_{i=1}^{m}a_{\tau i}\tilde{c}_i$ avec $a_{\tau i}\in K$ $(i=1,\ldots,m)$ et nécessairement chaque $a_{\tau i}\in A_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}$, en vertu de la remarque déjà faite.

Donc $\tilde{a}_\tau-\tilde{a}_{\tau'}=\sum_{i=1}^{m}(a_{\tau i}-a_{\tau' i})\tilde{c}_i$ et $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}}(\tilde{a}_\tau-\tilde{a}_{\tau'})=\min_{1\leq i\leq m}\{w_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(a_{\tau i}-a_{\tau' i})\}$; de $\tilde{a}_\tau\equiv\tilde{a}_{\tau'}$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) lorsque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau>\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'}$, il résulte que $\tilde{w}_{\tau_1}(\tilde{a}_\tau-\tilde{a}_{\tau'})\notin\tilde{\Delta}_\tau$ (sous-groupe isolé de $\tilde{\Gamma}$ associé à $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) et ainsi $w_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(a_{\tau i}-a_{\tau' i})\notin\tilde{\Delta}_\tau\cap\Gamma=\Delta_\tau$, donc $a_{\tau i}\equiv a_{\tau' i}$ (mod. $\mathfrak{p}_\tau$) lorsque $\mathfrak{p}_\tau>\mathfrak{p}_{\tau'}$ $(i=1,\ldots,m)$.

Or, comme K, muni de w, est complet, il en est de même pour la valuation $w_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}$, donc chacun des systèmes compatibles de congruences $a_{\tau i}\equiv a_{\tau' i}$ (mod. $\mathfrak{p}_\tau$) lorsque $\mathfrak{p}_\tau>\mathfrak{p}_{\tau'}$ $(i=1,\ldots,m)$, $a_{\tau i}\in A_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}$, possède solution $x_i\in A_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}$: $x_i\equiv a_{\tau i}$ (mod. $\mathfrak{p}_\tau$) pour tout $\tau\in\mathsf{T}$ $(i=1,\ldots,m)$. Soit $\tilde{x}=\sum_{i=1}^{m}x_i\tilde{c}_i\in\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}}$; alors $\tilde{x}-\tilde{a}_\tau=\sum_{i=1}^{m}(x_i-a_{\tau i})\tilde{c}_i\in\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ (pour tout τ), car $\tilde{w}_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(\tilde{x}-\tilde{a}_\tau)=\min_{1\leq i\leq m}\{w_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(x_i-a_{\tau i})\}$ et de $x_i-a_{\tau i}\in\mathfrak{p}_\tau$ vient $w_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(x_i-a_{\tau i})\notin\Delta_\tau$ $(i=1,\ldots,m)$ donc $\tilde{w}_{\mathfrak{p}_{\tau_1}}(\tilde{x}-\tilde{a}_\tau)\notin\tilde{\Delta}_\tau$ c.a.d. $\tilde{x}\equiv\tilde{a}_\tau$ (mod. $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$) pour tout $\tau\in\mathsf{T}$.

3.

Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K. Il a été rappelé au n° 1 que w admet un nombre fini de prolongements $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ à $\tilde{K}$ et que si $\tilde{K}|K$ est une extension normale alors les prolongements de w sont des valuations conjuguées, c.a.d., pour tout indice j $(1 \leqq j \leqq r)$ il existe un K-automorphisme σ_j de $\tilde{K}$ tel que $\tilde{w}_j = \tilde{w}_1 \circ \sigma_j$. Nous allons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur deux K-automorphismes de $\tilde{K}$ pour que les correspondantes valuations coïncident.

Cette question a déjà été résolue (HASSE [7]) pour le cas où w possède rang 1. Nous indiquerons la solution lorsque w possède *rang fini*, en raisonnant par induction sur le rang de w; en outre, pour écarter des difficultés techniques dans l'induction (et dont la nature sera expliquée ci-dessous) nous allons nous restreindre au cas d'une valuation *discrète* w.

Il est alors convenable de utiliser la méthode de HASSE pour décrire les différents prolongements de la valuation w au surcorps $\tilde{K}$. Nous pourrions nous ramener au cas où $\tilde{K}|K$ est une extension normale, toutefois, ayant en vue une application ultérieure, nous ne ferons pas cette hypothèse; le cas d'une extension algébrique arbitraire n'est pas sensiblement plus difficile que celui des extensions normales.

Soit donc K un corps muni de la valuation discrète de rang fini w, $\tilde{K}|K$ une extension algébrique de degré n, soit $\hat{K}$ une extension immédiate de K qui soit un corps valué complet (par exemple, une extension immédiate maximale de K), et $\hat{w}$ le prolongement de w à $\hat{K}$. Soit K^* une clôture algébrique de $\hat{K}$, w^* le prolongement unique de $\hat{w}$ à K^*; notons K_0^* la fermeture algébrique de K dans K^*, donc K_0^* est aussi algébriquement clos. Soit $R = \{\varrho_1, \ldots, \varrho_m\}$ l'ensemble des K-isomorphismes distincts de $\tilde{K}$ dans K^*, donc $\varrho_i(\tilde{K}) = K_i^* \subseteqq K_0^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ (rappelons qu'on a $m \leqq n$ et $m = n$ exactement lorsque $\tilde{K}|K$ est séparable); enfin, notons $\hat{K}_i = K_i^* \hat{K}$ le corps composé de K_i^* et $\hat{K}$, donc pour tout indice $i = 1, \ldots, m$, $\hat{K}_i|\hat{K}$ est une extension algébrique ayant degré $[\hat{K}_i : \hat{K}] = n_i \leqq n = [\tilde{K} : K]$. Toute valuation de $\tilde{K}$ qui prolonge w est du type $w^* \circ \varrho_i$ $(i = 1, \ldots, m)$; notons $\tilde{A}_i$ l'anneau de la valuation $w^* \circ \varrho_i$. Dans le cas particulier où $\tilde{K}|K$ est une extension normale, on peut déjà supposer que $\tilde{K} \subseteqq K_0^*$, donc $\tilde{K} = K_1^* = K_2^* = \cdots = K_m^*$ et alors $G = \{\varrho_i | i = 1, \ldots, m\}$ est l'ensemble des K-automorphismes de $\tilde{K}$; dans ce cas, si $\tilde{w}$ est la restriction à $\tilde{K}$ de la valuation w^*, alors toute valuation de $\tilde{K}$ qui prolonge w est du type $\tilde{w} \circ \sigma_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ où $\sigma_i = \varrho_i \circ \varrho_1^{-1}$ (resp. $\sigma_i = \varrho_i$ si on a fait l'identification).

LEMME 7. (HASSE [7]) *Soit w une valuation de rang 1 (non nécessairement discrète) du corps K, soit $\hat{K}$ le «complété» de K, muni de $\hat{w}$ (prolongement unique de w à $\hat{K}$); avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a $w^* \circ \varrho_i = w^* \circ \varrho_j$ si et seulement si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction à K_i^* d'un $\hat{K}$-isomorphisme de $\hat{K}_i$ sur $\hat{K}_j$.*

On dit alors, suivant HASSE, que ϱ_i, ϱ_j sont équivalents selon la valuation w et on écrit $\varrho_i \equiv \varrho_j\ (w, \widetilde{K}\,|\,K)$.

Dans le cas particulier où $\widetilde{K}|K$ est une extension galoisienne alors on a le corollaire:

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus,* $w^* \circ \sigma_i = w^* \circ \sigma_j$ *si et seulement si* $\sigma_j \circ \sigma_i^{-1}$ *est un* $(\widetilde{K} \cap \hat{K})$*-automorphisme de* $\widetilde{K}$.

Le corollaire se déduit aussitôt, utilisant un résultat bien connu de la théorie des corps commutatifs (BOURBAKI [8], ch. V, 10, th. 1).

Pour généraliser ce résultat de HASSE au cas où w est une valuation de rang fini, discrète, faisons quelques remarques.

a) Si $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ est une valuation de $\widetilde{K}$ prolongeant w, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, si $\mathfrak{p}^*$, $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ sont resp. les correspondants idéaux premiers de A^* (anneau de w^* de K^*) et de $\tilde{A}_i$ (anneau de $\tilde{w}_i^*$ de K^*), alors $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = w^*_{\mathfrak{p}^*} \circ \varrho_i$.

b) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, si $\hat{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}^*$, sont resp. les correspondants idéaux premiers de $\hat{A}$ (anneau de la valuation $\hat{w}$ de $\hat{K}$) et de A^*, alors $\mathscr{K}^* = A^*_{\mathfrak{p}^*}/\mathfrak{p}^*$ (corps des restes de K^* selon $w^*_{\mathfrak{p}^*}$) est une clôture algébrique de $\hat{\mathscr{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}/\hat{\mathfrak{p}}$ (corps des restes de $\hat{K}$ selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$); $\hat{\mathscr{K}}$ est maximal selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}},\hat{\mathfrak{p}}^*}$ et $w^*_{\mathfrak{p}^*,\mathfrak{p}^{**}}$ est l'unique prolongement de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}},\hat{\mathfrak{p}}^*}$ à $\mathscr{K}^*$.

c) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ l'idéal premier correspondant de l'anneau $\tilde{A}_i$ de la valuation $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ de $\widetilde{K}$ (où $1 \leqq i \leqq m$), notons $\tilde{\mathscr{K}}_i = (\tilde{A}_{i\tilde{\mathfrak{p}}_i})/\tilde{\mathfrak{p}}_i$ le corps des restes de $\widetilde{K}$ selon $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = w^*_{\mathfrak{p}^*} \circ \varrho_i$, et de même, notons $\mathscr{K}_i^*$ le corps des restes de $K_i^* = \varrho_i(\widetilde{K})$ par la valuation induite par $w^*_{\mathfrak{p}^*}$; enfin, notons $\tilde{\varphi}_i$: $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} \to \tilde{\mathscr{K}}_i$ et φ_i^*: $K_i^* \cap A^*_{\mathfrak{p}^*} \to \mathscr{K}_i^*$ les homomorphismes canoniques de passage aux corps des restes, et soit $\chi_i = \chi(\varrho_i, \mathfrak{p})$ l'application définie par $\chi_i \circ \tilde{\varphi}_i = \varphi_i^* \circ \varrho_i$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$, χ_i est un $\mathscr{K}$-isomorphisme de $\tilde{\mathscr{K}}_i$ sur $\mathscr{K}_i^*$ (car $\varrho_i(\tilde{\mathfrak{p}}_i) = \mathfrak{p}^* \cap K_i^*$). En particulier, si on prend $\mathfrak{p} = (0)$ alors $\chi\,(\varrho_i, (0)) = \varrho_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

d) Si $\tilde{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier commun aux anneaux de valuation $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_j$, alors $\tilde{\mathscr{K}}_i = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}Q}/\tilde{\mathfrak{p}} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathscr{K}}_j$, donc on peut considérer l'application $\chi_j \circ \chi_i^{-1}$ de $\mathscr{K}_i^*$ sur $\mathscr{K}_j^*$, laquelle est un $\mathscr{K}$-isomorphisme (avec $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$).

e) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors pour tout indice $i = 1, \ldots, m$, on a (avec notations évidentes): $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i, \tilde{\mathfrak{p}}_i^*} = w^*_{\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}} \circ \chi_i$, où $\chi_i = \chi(\varrho_i, \mathfrak{p})$ et $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$. En effet, cela résulte du th. 2 de [1] et des considérations ci-dessus, car si $\xi = \tilde{\varphi}_i(x)$, avec $x \in (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, $x \notin \tilde{\mathfrak{p}}_i$, alors $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i, \tilde{\mathfrak{p}}_i^*}(\xi) = \tilde{w}_i(x) = w^*\left(\varrho_i(x)\right) = w^*_{\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}}\left(\varphi_i^*\left(\varrho_i(x)\right)\right) = w^*_{\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}}\left(\chi_i(\tilde{\varphi}_i(x))\right) = w^*_{\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}} \circ \chi_i(\xi)$.

f) Si $\hat{K}$ est une extension immédiate maximale de K selon w et $\hat{w}$ le prolongement unique de w à $\hat{K}$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w et $\hat{\mathfrak{p}}$ est le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\hat{w}$, il existe un corps $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ tel que $K \subseteqq \hat{K}_{\mathfrak{p}} \subseteqq \hat{K}$ et que, muni de la valuation induite par $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ soit une extension immédiate maximale de K, selon $w_{\mathfrak{p}}$ (cf. lemme 5 de [2]).

Nous allons maintenant définir l'équivalence $\varrho_i \equiv \varrho_j\ (w, \widetilde{K}\,|\,K)$.

Soit $(0)=\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_{l-1}\subset\mathfrak{p}_l=\mathfrak{p}^0$ la suite strictement croissante des idéaux premiers de A (donc l est égal au rang de w). Pour tout $h=0, 1, \ldots, l-1$, soit $\mathscr{K}_h$ le corps des restes de K selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_h}$ (si $h=0$ alors $\mathscr{K}_h=K$). Soit $\hat{K}$ une extension immédiate maximale de K selon la valuation w; par le lemme 5 de [2], pour toute valuation $w_{\mathfrak{p}_h}$, moins fine que w, il existe une extension immédiate maximale $\hat{K}_{\mathfrak{p}_h}$ de K selon $w_{\mathfrak{p}_h}$, de façon que $K\subseteq\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}\subseteq\hat{K}_{\mathfrak{p}_2}\subseteq\cdots\subseteq\hat{K}_{\mathfrak{p}_l}=\hat{K}$. Pour tout h soit $\hat{\mathscr{K}}_h$ l'extension immédiate maximale de $\mathscr{K}_h$ (relativement à $w_{\mathfrak{p}_h,\mathfrak{p}^0}$) obtenue comme corps des restes de $\hat{K}$ selon la valuation $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_h}$; de même, soit $(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ l'extension immédiate maximale de $\mathscr{K}_h$ selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_h,\mathfrak{p}_{h+1}}$, de façon que $(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ soit contenue dans $\hat{\mathscr{K}}_h$ (lemme 5 de [2]); alors $(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ est le corps des restes de $\hat{K}_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ selon la valuation $\hat{w}_{\mathfrak{p}_h}$. Pour $h=0, 1, \ldots, l-1$, soient $(\mathscr{K}_h)_i^*$, $(\mathscr{K}_h)_j^*$ resp. les corps des restes de K_i^*, K_j^* par les valuations induites par $w_{\mathfrak{p}_h^*}^*$ (où $\mathfrak{p}_h^*$ est l'idéal premier de l'anneau de w qui correspondent à $\mathfrak{p}_h$).

DÉFINITION. *Avec ces hypothèses et notations, on pose* $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w, \tilde{K}|K)$ *lorsque, pour tout* $h=0, 1, \ldots, l-1$, *l'application* $\chi(\varrho_j, \mathfrak{p}_h)\circ\chi^{-1}(\varrho_j, \mathfrak{p}_h)$ *est la restriction d'un* $(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$*-isomorphisme de* $(\mathscr{K}_h)_i^*\cdot(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ *sur* $(\mathscr{K}_h)_j^*\cdot(\hat{\mathscr{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$; *en particulier, pour* $h=0$, $\varrho_j\circ\varrho_i^{-1}$ *est la restriction d'un* $\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}$*-isomorphisme de* $K_i^*\cdot\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}$ *sur* $K_j^*\cdot\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}$.

Dans le cas particulier où la valuation w possède rang 1 et est discrète, cette définition coïncide avec celle indiquée au lemme 7, car alors le complété de w est une extension immédiate maximale.

THÉORÈME 2. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, si* w *est une valuation de rang fini, discrète, alors* $w^*\circ\varrho_i=w^*\circ\varrho_j$ *si et seulement si* $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w, \tilde{K}|K)$.

DÉMONSTRATION. Le théorème se réduit au lemme 7 lorsque w possède rang 1, car w étant discrète, le corps complété est une extension immédiate maximale.

Supposons donc que w possède rang supérieur à 1 et que le théorème soit déjà démontré pour les valuations ayant rang inférieur à celui de w.

Soit $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w, \tilde{K}|K)$. Nous allons d'abord montrer que $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w_{\mathfrak{p}_1}, \tilde{K}|K)$, donc $w_{\mathfrak{p}_1}$ étant de rang 1, il résulte par le lemme 7 que $(\tilde{w}_i)_{\mathfrak{p}_{1i}}=(\tilde{w}_j)_{\mathfrak{p}_{1j}}$ et alors $\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}=\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}$, donc $\tilde{\mathscr{K}}_{1i}=(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}}/\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}=(\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}}/\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}=\tilde{\mathscr{K}}_{1j}$; par simplicité, notons $\tilde{\mathscr{K}}_1$ ce corps. Ensuite, nous montrerons que si $\chi_{1i}=\chi(\varrho_i, \mathfrak{p}_1)$, $\chi_{1j}=\chi(\varrho_j, \mathfrak{p}_1)$ alors $\chi_{1i}\equiv\chi_{1j}(w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}, \tilde{\mathscr{K}}_1|\mathscr{K}_1)$; par induction, car le rang de $w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}$ est strictement inférieur à celui de w, il résulte que $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i},\tilde{\mathfrak{p}}_i^*}=(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j},\tilde{\mathfrak{p}}_j^*}$. Enfin, par le théorème des valuations composées (th. 3 de [1]) on conclut que $\tilde{w}_i=\tilde{w}_j$.

Ainsi, montrons que $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w_{\mathfrak{p}_1}, \tilde{K}|K)$. En effet, si on prend l'extension immédiate maximale $\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}$ de K selon $w_{\mathfrak{p}_1}$, contenue dans l'extension immédiate maximale donnée $\hat{K}$ de K selon w (cf. lemme 5 de [2]), alors $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w_{\mathfrak{p}_1}, \tilde{K}|K)$ résulte comme cas particulier de $\varrho_i\equiv\varrho_j$ $(w, \tilde{K}|K)$, en rappelant que le seul

idéal premier non nul de l'anneau de $w_{\mathfrak{p}_1}$ est $\mathfrak{p}_1$, et en appliquant la condition déduite de $\varrho_i \equiv \varrho_j$ $(w, \widetilde{K}\,|\,K)$ pour $h=0$.

Montrons que $\chi_{1i} \equiv \chi_{1j}(w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}, \widetilde{\mathscr{K}}_1\,|\,\mathscr{K}_1)$. Notons $\mathfrak{q}_h = \mathfrak{p}_{h+1}/\mathfrak{p}_1$, donc les idéaux premiers de l'anneau de $w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}$ sont $(0) \subset \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{q}^0$. Pour tout $h=0, 1, \ldots, l-2$, le corps des restes de $\mathscr{K}_1$ selon la valuation $(w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0})_{\mathfrak{q}_h} = w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_{h+1}}$ (corollaire au th. 2 de [*1*]) est égal au corps des restes de K selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_{h+1}}$, c.a.d. à $\mathscr{K}_{h+1}$ (th. 2 de [*1*]). Alors $\widehat{\mathscr{K}}_{h+1}$, qui est l'extension immédiate maximale de $\mathscr{K}_h$ qui a été définie comme corps des restes de $\widehat{K}$ selon la valuation $\widehat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_{h+1}}$, est aussi le corps des restes de $\widehat{\mathscr{K}}_1$ selon la valuation $(\widehat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_1,\hat{\mathfrak{p}}^0})_{\mathfrak{q}_h} = \widehat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_1,\hat{\mathfrak{p}}_{h+1}}$. De même, $(\widehat{\mathscr{K}}_{h+1})_{\mathfrak{p}_{h+2}}$, qui est l'extension immédiate maximale de $\mathscr{K}_{h+1}$ selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_{h+1},\mathfrak{p}_{h+2}}$ et contenue dans $\widehat{\mathscr{K}}_{h+1}$, est aussi l'extension immédiate maximale de $\mathscr{K}_{h+1}$ selon la valuation $(w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0})_{\mathfrak{q}_h,\mathfrak{q}_{h+1}} = w_{\mathfrak{p}_{h+1},\mathfrak{p}_{h+2}}$ (cor. au th. 2 de [*1*]). Enfin, puisque les corps des restes de $\mathscr{K}_1^* = \chi_{1i}(\mathscr{K}_1)$ et $\mathscr{K}_j^* = \chi_{1j}(\widetilde{\mathscr{K}}_1)$ par la valuation induite par $(w^*_{\mathfrak{p}_1^*,\mathfrak{p}^{0*}})_{\mathfrak{q}_h^*} = w^*_{\mathfrak{p}_h^*,\mathfrak{p}_{h+1}^*}$ sont resp. égaux aux corps restes de $K_i^* = \varrho_i(\widetilde{K})$ et $K_j^* = \varrho_j(\widetilde{K})$ par la valuation induite par $w_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ (th. 2 de [*2*] et remarques (c), (e)), ils coincident donc avec $(\mathscr{K}_{h+1})_i^*$, $(\mathscr{K}_{h+1})_j^*$. Ceci étant, il résulte comme cas particulier de $\varrho_i \equiv \varrho_j$ $(w, \widetilde{K}\,|\,K)$, en appliquant la définition pour $h=1, 2, \ldots, l-1$, que $\chi_{1i} \equiv \chi_{1j}$ $(w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}, \widetilde{\mathscr{K}}_1\,|\,\mathscr{K}_1)$. Cela permet de conclure que $\widetilde{w}_i = \widetilde{w}_j$.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{w}_i = \widetilde{w}_j$ et soit $(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{l-1} \subset \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}^0$ la suite strictement croissante des idéaux premiers de l'anneau de la valuation w. Alors $(\widetilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}} = (\widetilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}}$ (où $\tilde{\mathfrak{p}}_{1i} = \tilde{\mathfrak{p}}_{1j}$ est l'idéal premier qui correspond à $\mathfrak{p}_1$) ; puisque $(\widetilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}} = w^*_{\mathfrak{p}_1^*} \circ \varrho_i$, $(\widetilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}} = w^*_{\mathfrak{p}_1^*} \circ \varrho_j$ et que ces valuations sont discrètes de rang 1, il résulte par le lemme 7 que $\varrho_i \equiv \varrho_j$ $(w_{\mathfrak{p}_1}, \widetilde{K}\,|\,K)$. De même, $(\widetilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i},\tilde{\mathfrak{p}}_l^0} = (\widetilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j},\tilde{\mathfrak{p}}_j^0}$; puisque $(\widetilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i},\tilde{\mathfrak{p}}_l^0} = w^*_{\mathfrak{p}_1^*,\mathfrak{p}^{0*}} \circ \chi_{1i}$, $(\widetilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j},\tilde{\mathfrak{p}}_j^0} = w^*_{\mathfrak{p}_1^*,\mathfrak{p}^{0*}} \circ \chi_{1j}$ (en vertu de la remarque (e)), on conclut par induction, car $w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}^0}$ est discrète de rang inférieur à celui de w, que $(\widetilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i},\tilde{\mathfrak{p}}_l^0} = (\widetilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j},\tilde{\mathfrak{p}}_j^0}$. Enfin, par le théorème des valuations composées, on déduit que $\widetilde{w}_i = \widetilde{w}_j$.

REMARQUE. Dans le cas où w est une valuation de rang fini, non nécessairement discrète, la définition indiquée ci-dessus a encore un sens et le th. 1 continue vrai.

Rappelons ces résultats (RIBENBOIM [*9*]).

Soit K un corps, muni de la valuation w ayant rang bien ordonné, soit $\widehat{K}$, muni de $\widehat{w}$, une extension immédiate maximale de K. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de l'anneau A de w qui précède immédiatement l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$, soit $\hat{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\widehat{w}$. Soient $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $\widehat{\mathscr{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}/\hat{\mathfrak{p}}$, resp. les corps des restes de K selon $w_{\mathfrak{p}}$ et de $\widehat{K}$ selon $\widehat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$; puisque $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ est une valuation de rang 1 et que $\widehat{\mathscr{K}}$ est une extension immédiate maximale de $\mathscr{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$, alors il existe un sous-corps $\check{\mathscr{K}}$ de $\widehat{\mathscr{K}}$ isomorphe au complété (topologique) de $\mathscr{K}$ selon $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$. Soit $B = \varphi^{-1}(\check{\mathscr{K}})$ (où $\varphi: \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}} \to \widehat{\mathscr{K}}$ est l'application canonique de passage au quotient) et $\check{K}$ le corps des fractions de B, donc $K \subseteq \check{K} \subseteq \widehat{K}$.

On démontre que $\check{K}$, muni de la valuation $\check{w}$, induite par $\hat{w}$, est un corps valué complet. Ce corps complet, univoquement défini dans l'extension immédiate maximale donnée K, s'appelle le *complété distingué* de K dans $\hat{K}$.

On démontre que l'anneau $\check{A}$ de la valuation $\check{w}$ de $\check{K}$ est égal à l'ensemble des éléments de $\hat{K}$ qui sont pseudo-limites d'au moins une suite pseudo-convergente distinguée d'éléments de K (cf. définition et th. 3 de [2]).

Il résulte que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w, $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^0$, si $\hat{\mathfrak{p}}$ est le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\hat{w}$, alors le corps complété distingué de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ muni de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ dans l'extension immédiate maximale $\hat{\mathscr{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}/\hat{\mathfrak{p}}$, est égal au corps des restes de $\check{K}$ selon la valuation induite par $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w, $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^0$, si $\hat{K}$ est une extension immédiate maximale de K muni de w, si $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ est l'extension immédiate maximale de K muni de $w_{\mathfrak{p}}$ et tel que $K \subseteqq \hat{K}_{\mathfrak{p}} \subseteqq \hat{K}$, si $\check{K}$, $\check{K}_{\mathfrak{p}}$ désignent resp. les corps complétés distingués de K selon w (dans $\hat{K}$) et selon $w_{\mathfrak{p}}$ (dans $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$), alors $K \subseteqq \check{K}_{\mathfrak{p}} \subseteqq \check{K}$.

Nous rechercherons maintenant les différents prolongements de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K et la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ sont des idéaux premiers de l'anneau A de w tels que $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p}^0$.

LEMME 8. *Soit w une valuation du corps K admettant les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ au corps $\tilde{K}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A de w et pour tout indice i soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ l'idéal premier unique de l'anneau $\tilde{A}_i$ de $\tilde{w}_i$ tel que $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$. Alors, les valuations de $\tilde{K}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p}}$ sont exactement $(\tilde{w}_1)_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}$, $(\tilde{w}_2)_{\tilde{\mathfrak{p}}_2}, \ldots, (\tilde{w}_r)_{\tilde{\mathfrak{p}}_r}$, lesquelles ne sont pas nécessairement distinctes. Pour qu'on ait $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ il faut et il suffit qu'on ait $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, c.a.d. $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteqq \tilde{A}_j$ ou de même $\tilde{\mathfrak{p}}_j \subseteqq \tilde{A}_i$.*

Il est clair que les valuations $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$ prolongent la valuation $w_{\mathfrak{p}}$. Montrons que si $\tilde{w}'$ est une valuation de $\tilde{K}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p}}$ alors $\tilde{w}'$ est égale à une des $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$. Si $\tilde{A}'$ est l'anneau de $\tilde{w}'$ alors $\tilde{A}' \cap K = A_{\mathfrak{p}} \supseteqq A$, donc $\tilde{A}' \supseteqq \bigcap_{i=1}^{r} \tilde{A}_i$, car $\tilde{A}'$ est intégralement fermé et contient donc l'anneau des entiers algébriques de $\tilde{K}$ sur A, égal à l'intersection des anneaux de valuation qui prolongent w à $\tilde{K}$. Or, par un résultat de KRULL [5], il existe un indice i tel que $\tilde{A}' \supseteqq \tilde{A}_i$ et ainsi on a $\tilde{A}' = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}$, où $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ est un idéal premier de $\tilde{A}_i$; or, de $A_{\mathfrak{p}} = \tilde{A}' \cap K = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}_i} \cap K$ il vient $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{q}}_i \cap A$ et alors $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_i$, donc $\tilde{A}' = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$.

Quant à la deuxième affirmation, il est clair que si $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ alors $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ donc $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est un idéal premier de $(\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$, d'où $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteqq \tilde{\mathfrak{p}}_j$ et de même $\tilde{\mathfrak{p}}_j \subseteqq \tilde{\mathfrak{p}}_i$, c.a.d. $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, et réciproquement. Il est aussi clair que si $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteqq \tilde{A}_j$ alors $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$, en vertu du lemme 3 de [1], car les valuations de $\tilde{K}$ qui prolongent w sont deux à deux incomparables selon la relation $\subseteqq$. Donc, de $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_j \cap A = \mathfrak{p}$ et d'après l'univocité de $\tilde{\mathfrak{p}}_j$ dans $\tilde{A}_j$ avec cette propriété, on a $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, donc $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$.

Soient maintenant $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ des idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w de K, tels que $(0) \subseteqq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p}^0$. Pour tout indice i $(i = 1, \ldots, r)$ soient $\tilde{\mathfrak{p}}_i < \tilde{\mathfrak{p}}'_i$ les idéaux premiers correspondants de l'anneau $\tilde{A}_i$ de la valuation $\tilde{w}_i$ de $\tilde{K}$ qui prolonge w (où les valuations $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_r$ sont toutes distinctes), et notons $\tilde{\mathscr{K}}_i = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}/\tilde{\mathfrak{p}}_i$.

LEMME 9. *Avec les notations ci-dessus, la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ admet le prolongements $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$ à $\tilde{\mathscr{K}}_i$, où les indices j sont déterminés par la propriété que $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$. Pour qu'on ait $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j} = (\tilde{w}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}_h, \tilde{\mathfrak{p}}'_h}$ (avec $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h = \tilde{\mathfrak{p}}_i$) il faut et il suffit que $\tilde{\mathfrak{p}}'_j = \tilde{\mathfrak{p}}'_h$, c'est-à-dire $\tilde{\mathfrak{p}}'_j \subseteqq \tilde{A}_h$, ou de même $\tilde{\mathfrak{p}}'_h \subseteqq \tilde{A}_j$.*

En effet, les valuations $(\tilde{w}_j)_{\mathfrak{p}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$, avec $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$, prolongent la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ à $\tilde{\mathscr{K}}_i$.

Soit v' une valuation de $\tilde{\mathscr{K}}_i$ prolongeant la valuation $w_{\tilde{\mathfrak{p}},\mathfrak{p}'}$ de $\mathscr{K}$ et notons B' son anneau de valuation. Si $\tilde{\varphi}_i : (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} \to \tilde{\mathscr{K}}_i$, $\varphi : A_{\mathfrak{p}} \to \mathscr{K}$ désignent les homomorphismes canoniques de passage au quotient, de $B' \cap \mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$ il vient $B \cap A_{\mathfrak{p}} = \tilde{\varphi}_i^{-1}(B' \cap \mathscr{K}) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}'}$, où $B = \tilde{\varphi}_i^{-1}(B')$ est l'anneau d'une valuation v de $\tilde{K}$. D'après le théorème des valuations composées on a $B \subseteqq (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, c.a.d. $v \geqq (\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, car v' est une valuation du corps des restes $\tilde{\mathscr{K}}_i$ de $\tilde{K}$ selon $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$. Or, $B \cap K$ est l'anneau d'une valuation de K et on a $B \cap A_{\mathfrak{p}} = (B \cap K) \cap A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}'}$, donc de $A_{\mathfrak{p}'} < A_{\mathfrak{p}}$ et du corollaire 2 au th. 1 de [1], il résulte que $B \cap K = A_{\mathfrak{p}'}$, donc v prolonge $w_{\mathfrak{p}'}$. Par le lemme 8, on a $B = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j} \subsetneqq (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, pour un indice convenable j; mais alors $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = ((\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j})_{\tilde{\mathfrak{q}}_j} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{q}}_j}$, où $\tilde{\mathfrak{q}}_j$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$ contenu dans $\tilde{\mathfrak{p}}'_j$; alors $\tilde{\mathfrak{q}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$ et de $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$ il vient $\tilde{\mathfrak{q}}_j \cap A = \mathfrak{p}$ donc $\tilde{\mathfrak{q}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_j$ (défini comme l'unique idéal premier de $\tilde{A}_j$ avec la propriété ci-dessus). Ainsi, $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$. De cela il résulte que l'anneau de la valuation v' est égal à $B/\tilde{\mathfrak{p}}_i = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j}/\tilde{\mathfrak{p}}_j$, donc $v' = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$.

Quant à la deuxième affirmation, il est clair que si $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h = \tilde{\mathfrak{p}}_i$ et $\tilde{\mathfrak{p}}'_j = \tilde{\mathfrak{p}}'_h$ alors $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j} = (\tilde{w}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}_h, \tilde{\mathfrak{p}}'_h}$. Réciproquement, si cela arrive alors $(\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j}/\tilde{\mathfrak{p}}_j = (\tilde{A}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_h}/\tilde{\mathfrak{p}}_h$, de $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h$ on déduit que $\tilde{\mathfrak{p}}'_h$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$ contenu dans $\tilde{\mathfrak{p}}'_j$, donc $\tilde{\mathfrak{p}}'_h = \tilde{\mathfrak{p}}'_j$.

Nous allons maintenant démontrer l'inégalité $n \geqq \sum_{i=1}^{r} e_{i0} f_i^0$ entre les indices de ramification e_{i0}, les degrés d'inértie f_i^0 des r valuations qui prolongent une valuation donnée w (de rang quelconque) de K à un surcorps algébrique $\tilde{K}$ de K ayant degré n. Ensuite, nous nous occuperons de la question plus délicate de trouver des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité.

Pour cela, revenons à la méthode de HASSE, indiquée au début de ce n°, pour décrire les différents prolongements de w au surcorps algébrique $\tilde{K} \mid K$.

Tout d'abord démontrons directement un lemme qui pourrait être obtenu comme corollaire du th. 2.

LEMME 10. *Avec ces hypothèses et les notations introduites, si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction d'un $\tilde{K}$-isomorphisme de $K_i^* \cdot \tilde{K}$ sur $K_j^* \cdot \tilde{K}$ alors les valuations $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ et $\tilde{w}_j = w^* \circ \varrho_j$ de $\tilde{K}$ coïncident.*

En effet, soit η le $\hat{K}$-isomorphisme de $K_i^* \cdot \hat{K}$ sur $K_j^* \cdot \hat{K}$ dont la restriction à K_i^* est égale à $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$. En vertu du lemme 4 on a $\tilde{w}_i(x) = \frac{1}{[K_i^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_i^* \hat{K}|\hat{K}}(\varrho_i(x))\right)$ et de même $\tilde{w}_j(x) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_j^* \hat{K}|\hat{K}}(\varrho_j(x))\right)$ pour tout $x \in \tilde{K}$, car la valuation $\hat{w}$ admet prolongement unique à toute extension algébrique de $\hat{K}$. Or, par l'hypothèse on a $[K_j^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = [K_i^* \cdot \hat{K} : \hat{K}]$ et $N_{K_j^* \cdot \hat{K}|\hat{K}} \circ \eta = N_{K_i^* \cdot \hat{K}|\hat{K}}$, donc $\tilde{w}_j(x) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_j^* \cdot \hat{K}|\hat{K}}(\varrho_j(x))\right) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_j^* \hat{K}|\hat{K}}(\varrho_j \circ \varrho_i^{-1} \circ \varrho_i(x))\right) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_j^* \hat{K}|\hat{K}}(\eta \circ \varrho_i(x))\right) = \frac{1}{[K_i^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}\left(N_{K_i^* \hat{K}|\hat{K}}(\varrho_i(x))\right) = \tilde{w}_i(x)$.

THÉORÈME 3. *Soit K un corps, muni de la valuation w, soit $\tilde{K}|K$ un sur-corps algébrique de degré n et $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ les prolongements distincts de w à $\tilde{K}$. Alors $n \geqq \sum_{i=1}^{r} e_{i0} \cdot f_{i0}$, où e_{i0}, f_{i0}, désignent resp. l'indice de ramification et le degré d'inertie de la valuation $\tilde{w}_i$ de l'extension $\tilde{K}|K$ (pour $i = 1, \ldots, r$).*

DÉMONSTRATION. Numérotons les m K-isomorphismes ϱ_i de $\tilde{K}$ dans K_0^*, de façon que si $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K})$, alors $K_1^* \hat{K}, \ldots, K_s^* \hat{K}$ soient tels qu'il n'existe entre eux aucun $\hat{K}$-isomorphisme dont la restriction soit du type $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$, et que cet ensemble soit maximal avec cette propriété; en outre, supposons que $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ soient tels que $\tilde{w}_1 = w^* \circ \varrho_1, \ldots, \tilde{w}_r = w^* \circ \varrho_r$, soient les prolongements distincts de w; par le lemme 10 on a $r \leqq s$.

Supposons d'abord que $\tilde{K}|K$ soit une extension séparable, donc il existe un élément primitif $t \in \tilde{K}$, c.a.d. $\tilde{K} = K(t)$; soit $f \in K[x]$ le polynôme minimal de t sur K, donc f possède degré $n = [\tilde{K} : K]$. Considérons la décomposition de f en facteurs irréductibles sur $\hat{K}$: $f = f_1 \ldots f_{s'}$, où $f_i \in \hat{K}[X]$ et n_i désigne le degré de f_i $(i = 1, \ldots, s')$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K}) = K\left(\varrho_i(t)\right)$ donc $K_i^* \cdot \hat{K} = \hat{K}\left(\varrho_i(t)\right)$, et alors $[K_i^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = n_\varkappa$ si et seulement si $\varrho_i(t)$ est racine du polynôme $f_\varkappa$ irréductible sur $\hat{K}$. Enfin, il existe un $\hat{K}$-isomorphisme entre deux corps $K_i^* \cdot \hat{K}$ et $K_j^* \cdot \hat{K}$ prologeant $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ si et seulement si $\varrho_i(t)$, $\varrho_j(t)$ sont racines d'un même polynôme $f_\varkappa$, irréductible sur $\hat{K}$. Donc $s' = s$ et alors $n = \sum_{\varkappa=1}^{s'} n_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{s} n_\varkappa$.

Si par contre $\tilde{K}|K$ n'est pas nécessairement séparable, soit $\tilde{K}'$ la plus grand extension séparable de K contenue dans $\tilde{K}$; soit p la caractéristique de K, donc $[\tilde{K} : \tilde{K}']$ est une puissance p^h. Soient $\varrho_1', \ldots, \varrho_m'$ les K-isomorphismes de $\tilde{K}'$ dans K_0^*; chaque ϱ_i' admet un prolongement unique ϱ_i à l'extension purement inséparable $\tilde{K}|\tilde{K}'$, donc $m' \leqq m$, $K_\varkappa'^* = \varrho_\varkappa'(\tilde{K}')$ est la plus grande extension séparable de K contenue dans $K_\varkappa^* = \varrho_\varkappa(\tilde{K})$ et on a $p^h = [\tilde{K} : \tilde{K}'] = [K_\varkappa^* : K_\varkappa'^*] \geqq [K_\varkappa^* \cdot \hat{K} : K_\varkappa'^* \cdot \hat{K}]$. Donc $n = [\tilde{K} : K] = [\tilde{K} : \tilde{K}'] \cdot [\tilde{K}' : K] = p^h \cdot \sum_{\varkappa=1}^{s'} n_\varkappa' = \sum_{\varkappa=1}^{s} p^h \cdot n_\varkappa' \geqq \sum_{\varkappa=1}^{s} [K_\varkappa^* \cdot \hat{K} : K_\varkappa'^* \cdot \hat{K}] \cdot [K_\varkappa'^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = \sum_{\varkappa=1}^{s} [K_\varkappa^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = \sum_{\varkappa=1}^{s} n_\varkappa$.

Or, puisque $s \geqq r$ alors $n \geqq \sum_{\varkappa=1}^{s} n_\varkappa \geqq \sum_{\varkappa=1}^{r} n_\varkappa$.

Enfin, le groupe de valeurs $\hat{\Gamma}$ de la valuation $\hat{w}$ de $\hat{K}$ possède indice fini dans $\hat{\Gamma}_i^* = w^*(K_i^* \cdot \hat{K})^\cdot$, car $K_i^* \cdot \hat{K} | \hat{K}$ est une extension algébrique; or, de $\hat{\Gamma} = \Gamma \subseteqq \Gamma_i^* = w^*(K_i^*)^\cdot \subseteqq w^*(K_i^* \cdot \hat{K})^\cdot = \hat{\Gamma}_i^*$, il résulte que $(\hat{\Gamma}_i^* : \hat{\Gamma}) = \hat{e}_i \geqq e_i = (\Gamma_i^* : \Gamma)$. De même, le corps des restes $\hat{\mathfrak{K}}_i^{*0}$ de $K_i^* \cdot \hat{K}$ selon w^* est une extension algébrique finie du corps des restes $\hat{\mathfrak{K}}^0$ de $\hat{K}$ selon $\hat{w}$; or $\hat{\mathfrak{K}}^0 = \mathfrak{K}^0$ (corps des restes de K selon w) et le corps des restes $\mathfrak{K}_i^{*0} = \tilde{\mathfrak{K}}_i^0$ de K_i^* selon w^* étant tel que $\mathfrak{K}^0 = \hat{\mathfrak{K}}^0 \subseteqq \mathfrak{K}_i^{*0} \subseteqq \hat{\mathfrak{K}}_i^{*0}$ il résulte que $[\mathfrak{K}_i^{*0} : \mathfrak{K}^0] = f_i^0 \leqq \hat{f}_i^0 = [\hat{\mathfrak{K}}_i^{*0} : \hat{\mathfrak{K}}^0]$.

Or, puisque $n_i \geqq \hat{e}_{i0} \cdot \hat{f}_i^0$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, par le lemme 2 alors $n \geqq \sum_{i=1}^{r} n_i \geqq \sum_{i=1}^{r} \hat{e}_{i0} \cdot \hat{f}_i^0 \geqq \sum_{i=1}^{r} e_{i0} \cdot f_i^0$.

Nous donnerons maintenant des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité dans la relation ci-dessus.

THÉORÈME 4. *Soit K un corps muni de la valuation discrète w de rang fini et $\tilde{K} | K$ une extension algébrique ayant degré n. Soient $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$, $(r \geqq 1)$ les différents prolongements de w à $\tilde{K}$ et pour chaque indice $i = 1, \ldots, r$, notons e_{i0}, f_i^0 resp. les degrés de ramification et d'inértie de $\tilde{w}_i$ sur w. Si pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de w (aussi pour $\mathfrak{p} = (0)$) et pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, l'extension (algébrique) $\tilde{\mathfrak{K}}_i | \mathfrak{K}$ est séparable (aussi $\tilde{K} | K$ est séparable) alors on a $n = \sum_{i=1}^{r} e_{i0} \cdot f_i^0$.*

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par induction sur le rang de w.

Supposons que w possède rang 1. Soit $\hat{K}$, muni de $\hat{w}$, le complété du corps valué K. Puisque w est discrète, alors $\hat{K}$, $\hat{w}$, est un corps valué maximal (cf. SCHILLING [6]). On détermine les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ de w à $\tilde{K}$ selon le schéma de HASSE déjà indiqué. Par le lemme 7, si $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ sont les K-isomorphismes de $\tilde{K}$ dans K_0^* alors $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i = w^* \circ \varrho_j = \tilde{w}_j$ si et seulement si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction d'un $\hat{K}$-isomorphisme de $\tilde{K}_i \cdot \hat{K}$ sur $\tilde{K}_j \cdot \hat{K}$, donc le nombre r de valuations distinctes qui prolongent w à $\tilde{K}$ est égal au nombre maximum s de corps $\tilde{K}_i \cdot \hat{K}$, $\tilde{K}_j \cdot \hat{K}$ entre lesquels il n'y a pas de $\hat{K}$-isomorphisme prolongeant $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$. Or, $\tilde{K} | K$ étant séparable, on a $n = \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{r} n_i$ et $\hat{K}$ étant maximal, alors $n_i = e_{i0} \cdot f_i^0$ (pour $i = 1, \ldots, r$), par le lemme 5, donc $n = \sum_{i=1}^{r} e_{i0} \cdot f_i^0$.

Supposons maintenant que w possède rang strictement supérieur à 1 et que le théorème soit déjà démontré pour les valuations ayant rang strictement inférieur à celui de w. Nous allons faire une deuxième induction sur la longueur l de l'arbre engendré par les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ de w à $\tilde{K}$.

Ceci étant, passons à la démonstration du théorème, dans le cas où $l = 1$, donc nécessairement $r = 1$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier minimal de A; alors $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^0$ car le rang de w est plus grand que 1. Soit $\tilde{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier

de l'anneau $\tilde{A}$ de l'unique prolongement $\tilde{w}$ de w à $\tilde{K}$, et notons Δ, $\tilde{\Delta}$, les sous-groupes isolés des groupes de valeurs Γ, $\tilde{\Gamma}$, qui correspondent à $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$. Par le lemme 3, la valuation discrète $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K}=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ admet un prolongement unique $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}^0}$ à l'extension algébrique séparable $\tilde{\mathscr{K}}=\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ de $\mathscr{K}$; puisque $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ possède groupe de valeurs Δ, son rang est strictement inférieur à celui de w, donc $f=[\tilde{\mathscr{K}}:\mathscr{K}]=(\tilde{\Delta}:\Delta)\cdot[\tilde{\mathscr{K}}^0:\mathscr{K}^0]=e\cdot f^0$ (car l'hypothèse de séparabalité est encore vérifiée pour la valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$) D'autre part, la valuation discrète de rang 1 $w_{\mathfrak{p}}$ de K admet un prolongement unique (lemme 3) $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ à $\tilde{K}$ et alors on a aussi $n=[\tilde{K}:K]=(\tilde{\Gamma}/\tilde{\Delta}:\Gamma/\Delta)\cdot[\tilde{\mathscr{K}}:\mathscr{K}]=\dfrac{(\tilde{\Gamma}:\Gamma)}{(\tilde{\Delta}:\Delta)}[\tilde{\mathscr{K}}:\mathscr{K}]=\dfrac{e_0}{e}\cdot f=e_0\cdot f^0$.

Soit maintenant $l=2$ et supposons d'abord que les valuations prolongées $\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_r$ soient deux à deux indépendantes. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A, donc $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^0$. Pour chaque valuation $\tilde{w}_i$ d'anneau $\tilde{A}_i$, soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ le correspondant idéal premier. Notons Δ, $\tilde{\Delta}_i$ resp. les sous-groupes isolés correspondants à $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_i$. Les valuations deux à deux indépendantes, donc distinctes $(\tilde{w}_1)_{\tilde{\mathfrak{p}}_1},\ldots,(\tilde{w}_r)_{\tilde{\mathfrak{p}}_r}$ sont les prolongements de $w_{\mathfrak{p}}$ à $\tilde{K}$ (lemme 8). Par l'induction (puisque $w_{\mathfrak{p}}$ est discrète et vérifie la condition de séparabilité de l'enoncé) alors $n=[\tilde{K}:K]=\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\Gamma}_i/\tilde{\Delta}_i:\Gamma/\Delta)\cdot[\tilde{\mathscr{K}}_i:\mathscr{K}]=\sum_{i=1}^{r}(e_{i0}/e_i)\cdot f_i$. Or, pour chaque indice $i=1,\ldots,r$, la valuation discrète $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K}$ admet un prolongement unique $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i,\tilde{\mathfrak{p}}_i^0}$ au corps $\tilde{\mathscr{K}}_i$ (lemme 9); puisque $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ possède rang strictement inférieur à celui de w et satisfait la condition de séparabilité de l'enoncé, alors $f_i=[\tilde{\mathscr{K}}_i:\mathscr{K}]=(\tilde{\Delta}_i:\Delta)\cdot[\tilde{\mathscr{K}}_i^0:\mathscr{K}^0]=e_i\cdot f_i^0$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$. Donc $n=\sum_{i=1}^{r}(e_{i0}/e_i)\cdot f_i=\sum_{i=1}^{r}e_{i0}\cdot f_i^0$.

Si par contre les valuations $\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_r$ ne sont pas deux à deux indépendantes, alors $\tilde{A}_i\cdot\tilde{A}_j=\tilde{B}\neq\tilde{K}$ quelque soit $i\neq j$; soit $\tilde{v}$ la valuation dont $\tilde{B}$ est l'anneau et notons $\tilde{\mathfrak{p}}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_r$, donc $\tilde{\mathfrak{p}}\neq(0)$ et $\tilde{\mathfrak{p}}$ est l'idéal maximal de $\tilde{B}$; soit $\mathfrak{p}=\tilde{\mathfrak{p}}\cap A$, donc $\mathfrak{p}\neq(0)$ et $\mathfrak{p}$ n'est pas l'idéal maximal de A. Pour tout indice $i=1,\ldots,r$, soit $\tilde{\Delta}_i$ le sous-groupe isolé de $\tilde{\Gamma}_i$ qui correspond à $\tilde{\mathfrak{p}}$ et $\tilde{\Omega}=\tilde{B}/\tilde{\mathfrak{p}}=(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ (pour tout indice i) est une extension algébrique finie de $\mathscr{K}=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, ayant degré $f=[\tilde{\Omega}:\mathscr{K}]$. Les seuls prolongements de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ au corps $\tilde{\Omega}$ sont $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}},\tilde{\mathfrak{p}}_i^0}$ $(i=1,\ldots,r)$, lesquels sont deux à deux indépendants, car $l=2$. Alors $f=[\tilde{\Omega}:\mathscr{K}]=\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\Delta}_i:\Delta)\cdot[\tilde{\mathscr{K}}_i^0:\mathscr{K}^0]=\sum_{i=1}^{r}e_i\cdot f_i^0$. Or, d'autre part $\tilde{v}=(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ (quelque soit $i=1,\ldots,r$) est l'unique prolongement de $w_{\mathfrak{p}}$ au corps $\tilde{K}$. Ainsi, l'arbre engendré par les prolongements de $w_{\mathfrak{p}}$ possède longueur 1, et par induction on a nécessairement $n=[\tilde{K}:K]=(\tilde{\Gamma}_i/\tilde{\Delta}_i:\Gamma/\Delta)\cdot[\tilde{\Omega}:\mathscr{K}]=(e_{i0}/e_i)\cdot f$ quelque soit $i=1,\ldots,r$. Ainsi $n=(e_{i0}/e_i)\cdot\sum_{j=1}^{r}e_j\cdot f_j^0=\sum_{j=1}^{r}e_{j0}\cdot f_j^0$.

Supposons le théorème vrai lorsque l'arbre engendré par les prolongements $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ possède longueur strictement inférieure à l (où $l > 2$).

Soit $\tilde{u}$ la valuation de $\tilde{K}$ égale à la borne inférieure des prolongements de la valuation donnée, $\tilde{u} = \tilde{w}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{w}_r$ ($\tilde{u}$ peut être aussi la valuation triviale de $\tilde{K}$), donc $\tilde{u}$ est le premier élément de l'arbre $\mathscr{A}$ engendré par l'ensemble $\{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r\}$; notons $\tilde{C}$ l'anneau de la valuation $\tilde{u}$. Soient, de même, $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_s$ les valuations de $\tilde{K}$ qui sont les éléments minimaux distincts de $\tilde{u}$ dans l'arbre $\mathscr{A}$ (donc $s \geqq 2$), et notons $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_s$ leurs respectifs anneaux de valuation. Numérotons ensuite les valuations $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_r$ de façon que pour tout indice $i = 1, \ldots, s$ les valuations $\tilde{w}_{i1}, \tilde{w}_{i2}, \ldots, \tilde{w}_{ir_i}$ soient exactement celles plus fines que $\tilde{v}_i$. Notons $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{\mathfrak{p}}^0_{ij}$, $\tilde{\Gamma}_{ij}$ resp. l'anneau, l'idéal maximal et le groupe de valeurs de $\tilde{w}_{ij}$. Pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux de valuation $\tilde{A}_{ij}$ ($j = 1, \ldots, r_i$), donc $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est l'idéal maximal de $\tilde{B}_i$; dans chaque groupe $\tilde{\Gamma}_{ij}$ soit $\tilde{\Delta}_{ij}$ le sous-groupe isolé correspondant à $\tilde{\mathfrak{p}}_i$; on a alors $\tilde{B}_i = \tilde{A}_{i1} \cdot \tilde{A}_{i2} \ldots \tilde{A}_{ir_i} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$ (pour j quelconque) et le groupe de valeurs de $\tilde{v}_i$ est $\tilde{\Xi}_i \cong \tilde{\Gamma}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij}$ (pour j quelconque). De même, si $\tilde{\mathfrak{q}}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux $\tilde{A}_{ij}$ (i, j quelconques) alors pour tout indice i on a $\tilde{\mathfrak{q}} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_i$, $\tilde{C} = (\tilde{B}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ (i, j quelconques), $\tilde{\mathfrak{q}}$ est l'idéal maximal de $\tilde{C}$, et si $\tilde{\Delta}_{ij}$ est le sous groupe isolé de $\tilde{\Gamma}_{ij}$ qui correspond à l'idéal premier $\tilde{\mathfrak{q}}$ alors le groupe de valeurs de $\tilde{u}$ s'écrit $\tilde{\Theta} = \tilde{\Gamma}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij}$ (i, j quelconques). Notons aussi $\mathfrak{p}^0 = \tilde{\mathfrak{p}}^0_{ij} \cap A$ (idéal maximal de A), $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A$, $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap A$, $\tilde{\mathscr{K}}^0_{ij} = \tilde{A}_{ij}/\tilde{\mathfrak{p}}^0_{ij}$, $\tilde{\mathscr{K}}_i = \tilde{B}_i/\tilde{\mathfrak{p}}_i = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}/\tilde{\mathfrak{p}}_i$ (j quelconque), $\tilde{\mathfrak{Q}} = \tilde{C}/\tilde{\mathfrak{q}} = (\tilde{B}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}}/\tilde{\mathfrak{q}} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{q}}}/\tilde{\mathfrak{q}}$ (i, j quelconques), $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$, $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q} = A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}$.

Pour tout indice $i = 1, \ldots, s$ le corps $\tilde{\mathscr{K}}_i$ est une extension algébrique de $\mathscr{K}$, ayant degré f_i, et les prolongements distincts de $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ de $\mathscr{K}$ à $\tilde{\mathscr{K}}_i$ sont $(\tilde{w}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}, \tilde{\mathfrak{p}}^0_{ij}$ ($j = 1, \ldots, r_i$), en vertu du lemme 9. Puisque $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ possède rang strictement inférieur à celui de w, alors par l'induction on a $f_i = [\tilde{\mathscr{K}}_i : \mathscr{K}] = \sum_{j=1}^{r_i} (\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta) \cdot [\tilde{\mathscr{K}}^0_{ij} : \mathscr{K}^0] = \sum_{j=1}^{r_i} e_{ij}(\mathfrak{p}) \cdot f^0_{ij}$, où $e_{ij}(\mathfrak{p}) = (\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta)$, $f^0_{ij} = [\tilde{\mathscr{K}}^0_{ij} : \mathscr{K}^0]$ et Δ est le sous-groupe isolé de Γ qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

Le corps $\tilde{\mathfrak{Q}}$ est une extension algébrique de $\tilde{\mathfrak{Q}}$ ayant degré f. Les prolongements distincts de $w_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}$ à $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sont exactement les valuations $(\tilde{v}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{p}}_i}$ ($i = 1, \ldots, s$), en vertu du lemme 9. Puisque le groupe de valeurs de $w_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}$ est isomorphe à Λ/Δ et ainsi discret, et puisque les valuations $(\tilde{v}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{p}}_i}$ de $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sont deux à deux indépendantes, alors par l'induction il résulte que $f = [\tilde{\mathfrak{Q}} : \mathfrak{Q}] = \sum_{i=1}^{s} (\tilde{\Lambda}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij} : \Lambda/\Delta) \cdot [\tilde{\mathscr{K}}_i : \mathscr{K}]$, où $\tilde{\Lambda}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij}$ est le sous-groupe isolé de $\tilde{\Xi}_i \cong \tilde{\Gamma}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij}$ qui correspond à l'idéal premier $\tilde{\mathfrak{q}}$ (j quelconque); de $(\tilde{\Lambda}_{ij}/\tilde{\Delta}_{ij} : \Lambda/\Delta) = \frac{(\tilde{\Lambda}_{ij} : \Lambda)}{(\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta)} = \frac{e_{ij}(\mathfrak{q})}{e_{ij}(\mathfrak{p})}$ il résulte que $f = \sum_{i=1}^{s} \frac{e_{ij}(\mathfrak{q})}{e_{ij}(\mathfrak{p})} \cdot f_i$ (j quelconque).

Enfin, la valuation discrète $w_{\mathfrak{q}}$ de K admet un prolongement unique $\tilde{u} = (\tilde{v}_i)_{\mathfrak{q}} = (\tilde{w}_{ij})_{\mathfrak{q}}$ $(i, j$ quelconques) à $\widetilde{K}$. Alors, par l'induction, on déduit que $n = [\widetilde{K}:K] = (\widetilde{\Gamma}_{ij}/\widetilde{\Lambda}_{ij}:\Gamma/\Lambda) \cdot [\widetilde{\Omega}:\Omega] = \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(\mathfrak{q})} \cdot f$ $(i, j$ quelconques). Ainsi, on a $n = \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(\mathfrak{q})} \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{e_{hk}(\mathfrak{q})}{e_{hk}(\mathfrak{p})} \cdot f_h = \sum_{i=1}^{s} \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(\mathfrak{p})} \cdot f_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(\mathfrak{p})} \cdot \left(\sum_{k=1}^{r_i} e_{ik}(\mathfrak{p}) \cdot f^0_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r_i} e_{ij}(0) \cdot f^0_{ij}$, car i, j étaient quelconques. Cela termine la démonstration du théorème.

Bibliographie

[1] RIBENBOIM, P.: Le Théorème d'Approximation pour les Valuations de Krull. Math Z. **68**, 1–18 (1957).

[2] RIBENBOIM, P.: Corps Maximaux et Complets par des Valuations de Krull. Math. Z. **69**, 466–479 (1958).

[3] COHEN, I. S., et O. ZARISKI: A Fundamental Inequality in the Theory of Extensions of Valuations. Illinois J. of Math. **1**, 1–8 (1957).

[4] ROQUETTE, P.: On the Prolongation of Valuations. Trans. A.M.S. **88**, 42–56 (1958).

[5] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160–196 (1932).

[6] SCHILLING, O. F. G.: Valuation Theory. Amer. Math. Soc., New York, 1950.

[7] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin: Akademie Verlag 1949.

[8] BOURBAKI, N.: Algèbre, chap. V. Paris: Hermann & Cie. 1953.

[9] RIBENBOIM, P.: Sôbre a Teoria das Valorizações de Krull. Boletim da Soc. Mat. São Paulo 11 (à paraître).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (Brasil)

(Eingegangen am 13. Februar 1960)